BerkalaFisika ***ISSN : 1410 - 9662***
Vol 13. , No.2, Edisi khusus April 2010, hal A1-A6

PERSAMAAN FOKKER PLANCK DAN APLIKASINYA DALAM ASTROFISIKA

Dwi Satya Palupi
Jurusan Fisika ,FMIPA UGM
dwi_sp@ugm.ac.id

Abstract

It has been established Fokker-Planck equation to obtain the evolution of particle distribution functions that describe the motion of particles in a fluid that can not be described by the Liouville equation. Fokker-Planck equation contains a diffusion component particles and the interaction between the particles will be discussed application of Fokker-Planck equation in astrophysics since the plasma in the form of interstellar space so that there is interaction between the particles making up the plasma.

Keywords: Fokker-Planck, plasma, astrophysics

Abstrak

Telah dibentuk persamaan Fokker-Planck untuk mendapatkan evolusi fungsi distribusi partikel yang menggambarkan gerakan partikel dalam suatu fluida yang tidak dapat digambarkan oleh persamaan Liouville. Persamaan Fokker-Planck berisi komponen diffusi partikel dan interaksi antar partikel Akan dibahas aplikasi Persamaan Fokker-Planck dalam astrofisika mengingat ruang antar bintang berupa plasma sehingga terdapat interaksi antara partikel-partikel penyusun plasma.

Kata Kunci: Fokker-Planck, plasma, astrofisika

PENDAHULUAN

Tinjau suatu sistem yang terdiri M partikel dengan M cukup besar . Gerakan partikel-partikel tersebut dapat dicari dengan menyelesaikan persamaan Liouville[Boris Somov, 2006][6] yaitu

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = 0 \qquad (1)$$

Dengan f adalah fungsi distribusi partikel. $\mathbf{F}$ adalah gaya yang bekerja pada partikel.

Teorema Lioville menyatakan fungsi disribusi partikel menjadi konstan jika dipenuhi syarat $\mathrm{div}_{\mathbf{v}} \dot{\mathbf{v}} = 0$. Pers.(1) merupakan persamaan kontinuitas dengan syarat $\mathrm{div}_{\mathbf{v}} \dot{\mathbf{v}} = 0$.

Apabila partikel bertumbukan sehingga partikel mengalami perlambatan atau mendapat gaya gesek sebagai $\mathbf{F} = -k\mathbf{v}$ maka syarat diatas tidak terpenuhi sehingga persamaan Lioville tidak dapat digunakan. Sebagai gantinya evolusi fungsi distribusi digantikan oleh persamaan Fokker Planck [5] yang akan diturunkan dalam makalah ini. Untuk kesederhanaan akan ditiinjau terlebih dahulu persamaan Fokker Planck satu dimensi. Kemudian persamaan Fokker-Planck dalam ruang kecepatan dan beberapa aplikasi persamaan Fokker-Planck dalam astrofisika.

Sebagai akibat terjadi tumbukan antar partikel, partikel mengalami perubahan arah gerak secara acak. Partikel yang disebut sebagai partikel Brownian tersebut memiliki fungsi distribusi $f\left(\vec{r}, v, t\right)$ dan mengalami proses diffusi. Gerakan partikel bersifat acak, dan gerakan partikel tidak dipengaruhi oleh gerakan partikel sebelummya atau dengan kata lain partikel tidak dapat mengingat lagi gerakan sebelumnya. [3],[5]. Dengan kata lain partikel mengikuti proses Markov . Jika pergeseran partikel pada suatu saat adalah $X(t)$ dan fungsi distribusi $f\left(\vec{r},v,t\right)$ dinyaatakan dalam probabilitas transisi posisi x_0 dari saat s menjadi x di saat t adalah $P(x_0,s;x,t)$ dengan $s < t$., maka rapat probabilitas transisi atau fungsi distribusi diberikan oleh

$$p(x_0,s;x,t)dx = \Pr\left\{x \le X(t) < x+dx \middle| X\left(t_0\right)=x\right\} \tag{2}$$

dengan

$$P(x_0,s;x,t) = \Pr\left\{x \le X(t) < x+dx \middle| X\left(t_0\right)=x\right\}.$$

Untuk proses yang homogen rapat probabilitas transisi hanya tergantung pada selang interval (t - s) maka rapat probabilitas transisi dapat dinyatakan hanya dengan parameter, x_0, x, (t-s) saja. Sehingga $\Pr\left\{x \le X(t) < x+dx \middle| X\left(t_0\right)=x\right\}$ dapat dinyatakan sebagai $p(x_0,x;t)dx$ untuk sebarang t_0. Berdasarkan persamaan Chapman-Kolmogorov maka rapat pobabilitas transisi dapat dituliskan sebagai berikut :

$$p(x_0,s;x,t) = \int p(x_0,s;z,v)p(z,v;x,t)dz \tag{3}$$

Andaikan partikel Brownian dalam interval waktu yang singkat Δt bergeser sejauh Δx , maka total pergeseran dalam waktu t adalah $X(t)$ setelah melakukan N langkah dinyatakan sebagai

$$X\left(t\right) = \sum_{i=1}^{n} Z_i$$

Z_i adalah variabel random yang menyatakan panjang atau jarak pada langkah ke i. Waktu yang diperlukan setiap langkah adalah Δt, maka banyaknya langkah adalah $N = \left(t/\Delta t\right)$. Jarak terjadi pada tiap tahap bisa berupa $+\Delta x$ yang berarti partikel bergerak maju atau berupa $-\Delta x$ yang berarti partikel bergerak mundur. Probabilitas jarak berupa $+\Delta x$ dapat dimisalkan sebagai p dan probabilitas jarak berupa $-\Delta x$ dapat dimisalkan sebagai q. Probabilitas total kedua gerakan dengan demikian = $p + q$ =1. Harga harap pergeseran ke i dapat dituliskan sebagai

$$E\left\{Z_i\right\} = \left(p-q\right)\Delta x \text{ dan}$$

$$\operatorname{var}\left(Z_i\right) = 4pq\left(\Delta x\right)^2 \tag{4}$$

Harga harap untuk total langkah adalah

$$E\left\{Z\left(t\right)\right\} = NE\left\{Z_i\right\} = \frac{t}{\Delta t}\left(p-q\right)\Delta x$$

$$\text{dan } E\left\{X\left(t\right)\right\} \tag{5}$$

$$\operatorname{var}\left(X\left(t\right)\right) = N\operatorname{var}\left(Z_i\right) = \frac{t}{\Delta t}4pq\left(\Delta x\right)^2 \tag{6}$$

Diambil Δt dan Δx sangat kecil infinitif mendekati 0 , sehingga nilai $\left(\Delta x\right)^2/\Delta t$ memiliki nilai tertentu dan nilai (p - q) mendekati suatu kelipatan Δx. Andaikan dalam selang waktu t, $X\left(t\right)$ memiliki fungsi nilai rata-rata sebagai μt dan fungsi variannya sama dengan $\sigma^2 t$, harga harap $E\left\{X\left(t\right)\right\}$ persatuan waktu adalah

$$E\left\{X\left(t\right)\right\} \to \mu \text{ dan } \operatorname{var}\left\{X\left(t\right)\right\} \to \sigma^2 \tag{7}$$

Persamaan (5) untuk t=1 dan pers.(7) memberikan

$$\frac{t}{\Delta t}\left(p-q\right)\Delta x \to \mu\,,\ \frac{4pq\left(\Delta x\right)^2}{\Delta t} \to \sigma^2 \tag{8}$$

Kaitan (4) dan (8) akan terpenuhi jika

$$\Delta x = \sigma\left(\Delta t\right)^{\frac{1}{2}} \text{ dan}$$

$$p = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\mu\left(\Delta t\right)^{\frac{1}{2}}}{\sigma}\right), q = \left(1-\frac{\mu\left(\Delta t\right)^{\frac{1}{2}}}{\sigma}\right) \tag{9}$$

Karena Z_i merupakan variabel random, penjumlahan $\sum_{i=1} Z_i = X\left(t\right)$ untuk N

besar mendekati distribusi dengan rata-rata μt danvariansi $\sigma^2 t$. t menyatakan panjang interval waktu selama pergeseran $X(t)-X(0)$. Dengan demikian sekarang kita menemukan bahwa untuk $0 < s < t$,$X(t) - X(s)$ memiliki distribusi normal dengan rata-rata $\mu(t - s)$ dan variansi $\sigma^2(t - s)$. Kenaikan $X(s)-X(0)$ dan $X(t)-X(s)$ saling tidak tergantung yang mengindikasikan $X(t)$ merupakan proses Markov.

Rapat transisi di titik sekitar $x \pm \Delta x$ dapat diekspansikan dengan deret Taylor

$$p(x_0, x \pm \Delta x; t-\Delta t) = p(x_0,x;t) - \Delta t\frac{\partial p}{\partial t} \pm \Delta x\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{2}(\pm\Delta x)^2\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + 0(\Delta t) \tag{10}$$

Mengingat

$$p(x_0,x;t) = pp(x_0,x-\Delta x;t-\Delta t)\Delta x + qp(x_0,x-\Delta x;t-\Delta t)\Delta x \tag{11}$$

Pers.(10) dan pers.(11) memberikan

$$p(x_0,x;t) = p(x_0,x;t) - \Delta t\frac{\partial p}{\partial t} - \Delta x(p-q)\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{2}(\Delta x)^2\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + O$$

dengan membagi kedua sisi pers.(12), serta dengan mengambil limit $\Delta x \to 0$, $\Delta t \to 0$ diperoleh persamaan diffusi maju bagi proses gerakan Brownian sebagai

$$\frac{\partial}{\partial t}p(x_0,x;t) = -\mu\frac{\partial}{\partial x}p(x_0,x;t) + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}p(x_0,x;t) + O$$

untuk Δx dan Δt sangat kecil seperti pers.(7) Kuantitas μ dan σ dapat diinterpretaskan sebagai

$$\lim_{\Delta t \to 0}\frac{E\{X(t+\Delta t)-X(t)\}}{\Delta t} = \mu$$

$$\lim_{\Delta t \to 0}\frac{E\{X(t+\Delta t)-X(t)\}^2}{\Delta t} = \sigma^2 \tag{12}$$

Secara umum pers.(12) jika x_0 pada suatu saat adalah fungsi waktu atau merupakan $X(t)$ maka pers.(12) menjadi

$$\lim_{\Delta t \to 0}\frac{E\{X(t+\Delta t)-X(t) \mid X(t)=x\}}{\Delta t} = a(t,x)$$

$$\lim_{\Delta t \to 0}\frac{E\{[X(t+\Delta t)-X(t)]^2 \mid X(t)=x\}}{\Delta t} = b(t,x) \tag{13}$$

$a(t,x)$ disebut sebagai koefisien apung (drift koefisien) dan $b(t,x)$ disebut sebagai koefisien diffusi. Pers.(12), (13) menghasilkan persamaan Fokker-Planck [3],[5]:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(a(x,t)p) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(b(t,x)p) \tag{14}$$

Persamaan Fokker Planck yang menggambarkan distribusi evolusi karena tumbukan yang lemah sehingga terjadi pergeseran kecil dapat disajikan dalam ruang kecepatan. Jika f adalah fungsi distribusi yang tidak tergantung pada ruang $f=(v,t)$ maka persamaan Fokker-Planck berbentuk [2],[6]

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_c = -\frac{\partial}{\partial v}[a_\alpha f] + \frac{\partial^2}{\partial v_\alpha \partial v_\beta}[b_{\alpha\beta} f] \tag{15}$$

Koefisien a merupakan koefisien gesekan dinamis. Partikel Brownian mendapat gaya gesek yang berlawanan dengan gerakan dan koefisien b merupakan koefisien diffusi yang merupakan rata-rata perubahan kecepatan. Suku pertama persamaan Fokker –Planck (15) merupakan gesekan yang memperlambat partikel berkas dan menggerakan partikel menuju kecepatan nol dalam ruang fasa , sedang bentuk kedua menyajikan difusi berkas partikel dalam ruang kecepatan tiga dimensi

APLIKASI PERSAMAAN FOKKER PLANCK DALAM ASTROFISIKA

Ruang antar bintang tersusun oleh sistem plasma. Sistem plasma tersusun oleh ion-ion, yang dapat bermuatan positip atau negatif atau bermuatan positip dan negatif sehingga total muatan plasma bernilai 0 atau netral. Karena sistem plasma tersusun atas ion-ion maka terjadi interaksi Coulomb antara partikel penyusun plasma.

Tumbukan dalam sebuah plasma tidak dapat ditentukan secara unik seperti pada atom netral [1]. Interaksi potensial Coulomb dengan partikel lain memberikan dua pengaruh yaitu pertama partikel uji yang bergerak di dalam plasma mengalami penyimpangan dari arah semula, yang kedua mempercepat medan partikel. Pengaruh yang kedua menyumbang kehilangan energi dan memberikan gaya gesek pada gerakan partikel uji. Kedua efek tersebut tergantung pada rasio kedua partikel.

Tinjau berkas partikel cepat dalam plasma yang terionisasi penuh secara termal yang mendapat medan magnet luar $\mathbf{B_0}$. Medan magnet luar tersebut menentukan perjalan partikel. Andaikan plasma tesusun atas elektron dan proton termal yang berada pada keseinmbangan termodinamik dan $f = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ adalah fungsi distribusi partikel uji maka persamaan gerak partikel adalah (Somov,2003)[6]

$$\frac{df}{dt} + v_\alpha \frac{\partial f}{\partial r_\alpha} + \frac{q}{m}\{\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0\}\frac{\partial f}{\partial v_\alpha} = -\frac{\partial f}{\partial v_\alpha} J_\alpha \tag{16}$$

Bila ditinjau pada keadaan stasioner dan hanya tergantung pada variabel ruang saja atau , dengan z merupakan arah medan , $\mathbf{B_0}$ $f = f(z, v, \theta)$. Pers.(16) berbentuk

$$v\cos\theta\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial v}\left(v^2 Jv\right) - \frac{1}{v\sin\theta}\frac{\partial\left(\sin\theta J\theta\right)}{\partial\theta} \tag{17}$$

dengan menyamakan pers.(17) dengan persamaan Fokker-Planck maka pers.(17) menjadi

$$x\cos\theta\frac{\partial f}{\partial \varsigma} = \frac{\partial F(x) f}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[D(x) f\right] + D_\theta(x)\Delta_\theta f \tag{18}$$

Koefisien pertama pada pers.(18) yaitu $F(x)$ menunjukan kehilangan energi partikel dipercepat ketika melalui plasma. Koefisien yang kedua yaitu $D(x)$ menggambarkan energi diffusi. Koefisien yang ketiga $D_\theta(x)$ berkaitan dengan diffusi partikel cepat pada θ. Mengingat masa elektron jauh lebih kecil daripada massa elektorn . Pada kasus ini koefisien pada pers.Fokker Plank menjadi

$$D(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(1 + \frac{m_e}{m_p}\right),$$

$$F(x) = -\frac{m}{m_e}\frac{1}{\sqrt{x}}\left(1 + \frac{m_e}{m_p}\frac{1}{x}\right),$$

$$D_\theta(x) = \frac{1}{2x\sqrt{x}} \tag{19}$$

Suku pertama pada Koefisien D(x) meupakan sumbangan tumbukan antara elektron termal plasma, sedang suku kedua merupakan sumbangan dengan proton termal.

Dua koefisien yang pertama menunjukan energi difusi karena tumbukan dengan elektron termal lebih cepat m_p/m_e dari pada karena tumbukan dengan proton termal. kecepatan sudut difusi . Sedangkan kecepatan diffusi sudut ditentukan secara berimbang oleh elektron dan proton plasma.

Distribusi kecepatan partikel uji dalam plasma dapat diketahui dengan menggunakan persamaan Fokker-Planck diruang kecepatan. Tinjau sekumpulan partikel uji dengan kecepatan yang sama yang mudah bergerak, distribusi kecepatan partikel uji d mendekati isotrop sebelum terjadi kehilangan tenaga. Jika partikel medan yang mobile, seretan pada partikel memperlambat partikel sebelum terjadi belokan. Waktu antara partikel uji mulai mengubah arah geraknya secara umum berbeda dengan waktu ketika partikel kehilangan tenaga dan atau kehilangan momentum.

Bentuk kedua persamaan Fokker Planck pada pers.(15) merupakan proses diffusi karena hamburan partikel dari arah mula-mula. Penyelesaian persamaan Fokker-Planck pada ruang kecepatan menghasilkan waktu defleksi rata-rata baik pada arah tegak lurus kecepatan mula-mula atau pada arah sejajar kecepatan mula-mula.

Selain waktu defleksi dikenal waktu defleksi lain yang berkaitan dengan perubahan energi antara partikel uji dan partikel medan yaitu waktu pertukaran energi (energy exchange time) , waktu perlambatan (slowing-down time) dan waktu kehilangan tenaga (energi loss time) . Waktu defleksi ini dapat dicari apabila koefisien diffusi pada persamaan Fokker Planck telah diketahui. Koefiesien a dan koefisien b pada tiap kasus dapat berbeda-beda bergantung pada medan listrik dan medan magnet yang bekerja pada plasma,partikel uji dan partikel penyusun plasma [6].

Selain untuk mencari defleksi dan waktu defleksi karena tumbukan antar partikel persamaan Fokker Planck dapat diterapkan untuk mempelajari pembelokan partikel karena gelombang elektromagnetik. [2] atau untuk menyajikan Hamburan sudut lemparan (pitch-anlge scattering). Hamburan sudut lemparan tergantung pada mode gelombang elketromagnetik dan arah perambatan gelombang. Hamburan dapat terjadi Diffusi dapat terjadi pada arah sejajar dengan geris medan atau tegak lurus dengan garis medan.

KESIMPULAN

Persamaan Fokker Planck merupakan persamaan diffusi yang menggambarkan fungsi ditribusi partikel dalam suatu sistem yang berisi banyak partikel yang saling bertumbukan. Persamaan tersebut dapat digunakan dalam astrofisika mengingat ruang antara galaksi berupa plasma, yang tersusun dari partikel-partikel bermuatan. Gerak partikel dan proses diffusi dalam plasma dapat diselesaikan dengan menggunakan persamaan Fokker Plank dalam ruang koordinat maupun dalam ruang kecepatan. Hamburan , interaksi dan proses diffusi tidak hanya terjadi karena interaksi antar partikel tetapi dapat juga interaksi antara partikel dan medan elektromagnet.

DAFTAR PUSTAKA

[1]. Bennz,A.O.,2002, Plasma Astrophysics, Kinetic Processes in Solar and Stellar Coronae, Kluwer Academic Press, New York
[2]. Kirk, J.G.,2002, Particel Acceleation, Plasma Astrophysics,Spinger, New York, hal 225 - 290,
[3]. Medhi,J., 1982,Stochastic processes, Willey Eastern Limited New Delhi
[4]. Melrose,D.B.,2002 , Kinetic Plasma Physics, Plasma Astrophysics,Spinger New York, hal 151-160,
[5]. Schuss,Z., 1980, Theory and Applications of Stochastic Differential Equation, John Willey and sons, New York.
[6]. Somov ,B.2003, Plasma Astrophysics Part I ,Fundamental and Practice, spinger