Berkala Fisika ***ISSN : 1410 - 9662***
Vol. 14, No. 3, Juli 2011, hal 75- 80

MASSA KLASIK SOLITON PERSAMAAN SCHRÖDINGER NONLINEAR

T.B. Prayitno
Jurusan Fisika, Fakultas MIPA, Universitas Negeri Jakarta
Jl. Pemuda Rawamangun No. 10 Jakarta Timur 13220
E-mail : trunk_002@yahoo.com

Abstract

We have calculated classical mass of soliton of nonlinear Schrödinger equation in the case of (1+1) space-time dimension. The equation describes the propagation of electromagnetic wave in combination of dispersive-nonlinear medium. The propagation itself will create a stable electromagnetic pulse. The first thing that must be done is to calculate analytical solution of one soliton of nonlinear Schrödinger equation by transforming wave function and continuing by applying direct integration. The definition of its classical mass is based on classical field theory by beginning the construction of Lagrangian density and continuing Hamiltonian density of that nonlinear equation. The Lagrangian density is obtained by trial function relating by Euler-Lagrange that creates appropriate nonlinear Schrödinger equation.
***Keywords** : Soliton, Nonlinear Schrödinger.*

Abstrak

Pada makalah ini telah dihitung massa klasik soliton persamaan Schrödinger nonlinear berdimensi ruang waktu (1+1). Persamaan tersebut merupakan persamaan yang menggambarkan perambatan gelombang elektromagnetik dalam kombinasi medium dispersif-nonlinear. Perambatan dalam kombinasi medium terebut akan menghasilkan sebuah pulsa gelombang elektromagnetik yang stabil. Hal pertama yang harus dilakukan adalah menghitung solusi analitik satu soliton persamaan Schrödinger nonlinear melalui transformasi fungsi gelombang, lalu dilanjutkan dengan integrasi langsung. Definisi massa klasik ini didasarkan pada teori medan klasik yang diawali melalui perumusan rapat Lagrangian, lalu dilanjutkan dengan merumuskan rapat Hamiltonian dari persamaan nonlinear tersebut. Rapat Lagrangian tersebut didapat melalui fungsi coba yang dikaitkan dengan persamaan Euler-Lagrange yang nantinya menghasilkan persamaan Schrödinger nonlinear tersebut.
***Kata Kunci** : Soliton, Schrödinger Nonlinear.*

Pendahuluan

Soliton merupakan sebuah gelombang nonlinear yang stabil dan mempunyai energi berhingga [1]. Gelombang ini pada umumnya tercipta apabila sebuah gelombang merambat pada medium dispersif dan nonlinear. Menurut teori gelombang klasik, medium dispersif akan membuat amplitudo gelombang yang merambat pada medium tersebut melemah dan akhirnya menghilang. Sebaliknya, sebuah pulsa gelombang yang merambat pada medium nonlinear akan membuat amplitudo gelombang tersebut membesar dan pada suatu saat juga akan menghilang. Apabila kedua medium tersebut disatukan maka kedua sifat yang berlawanan dari kedua medium tersebut akan menciptakan sebuah gelombang stabil. Hal ini menjadi konsep menarik apabila dikaitkan dengan dualisme partikel-gelombang. Menurut teori kuantum, sifat gelombang yang harus dipenuhi agar dapat merepresentasikan partikel adalah memenuhi sifat terlokalisasi sehingga dapat dihitung energinya. Melalui konsep tersebut, soliton menjadi model matematika yang menarik untuk merepresentasikan sifat partikel karena sifat kestabilannya. Sifat tersebut mengantarkan kita kepada definisi massa soliton yang dapat dirumuskan melalui teori medan klasik (Massa soliton ini biasanya sering disebut massa klasik soliton) [1].

Ada perbedaan pendapat dalam mendefiniskan soliton karena adanya suatu alasan fisis. Di salah satu referensi, soliton adalah solusi satu gelombang (solusi satu soliton) dari persamaan gelombang nonlinear yang dapat dihitung energinya dan massa klasiknya [2]. Pada referensi yang lain, soliton merupakan solusi banyak gelombang (solusi multisoliton) dari persamaan gelombang nonlinear sedangkan solusi satu soliton tersebut dinamakan solusi *solitary wave* [3]. Alasan yang dikemukakan oleh referensi tersebut dikarenakan tumbukan antar solusi satu soliton tidak mencerminkan sifat partikel walaupun massa klasiknya dapat dihitung, tetapi sifat partikel dapat diperlihatkan melalui tumbukan antar solusi multisoliton. Namun demikian, kedua pendapat tersebut dapat digunakan. Solusi satu soliton mempunyai syarat keberhinggan pada limit ($x \to \pm\infty$) yang dapat dituliskan secara matematis

$$\lim_{x\to\pm\infty} \psi(x,t) = \text{berhingga}$$

Dalam makalah ini akan dikaji salah satu persamaan gelombang nonlinear, yaitu persamaan Schrödinger nonlinear (NLS) berdimensi ruang waktu (1+1). Persamaan ini adalah persamaan gelombang elektromagnetik yang merambat dalam medium dispersif-nonlinear. Beberapa modifikasi dapat dilihat juga dalam referensi [4]. Tujuan akhir dari makalah ini adalah menghitung massa klasik soliton persamaan NLS. Susunan dari makalah ini adalah sebagai berikut, bentuk umum persamaan NLS dan solusi satu soliton akan dikaji pada bab 2, perumusan dan perhitungan massa klasik soliton akan dibahas pada bab 3. Seluruh kesimpulan hasil akhir akan diuraikan pada bab 4.

Teori Dasar

Pada umumnya solusi soliton dapat dicari melalui berbagai cara. Cara yang paling sering dicoba adalah melakukan integrasi langsung walaupun secara umum hal tersebut tidak mudah dilakukan. Pada bab ini kita mengkaji solusi satu soliton persamaan Schrödinger nonlinear dengan dimensi ruang waktu (1+1) melalui integrasi langsung. Bentuk umum persamaan Schrödinger nonlinear yang menggambarkan perambatan gelombang elektromagnetik dalam kombinasi medium dispersif-nonlinear dapat dituliskan

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \gamma|\psi|^2\psi = 0 \tag{1}$$

dengan α adalah koefisien dispersi kecepatan grup dan γ menyatakan indeks bias nonlinear. Bentuk persamaan (1) bergantung dari referensi yang digunakan, sebagai contoh dapat dilihat pada [3-6].

Solusi stasioner didapat melalui pemisahan variabel dari fungsi gelombang

$$\psi(x,t) = \chi(x)\exp(iT(t)) . \tag{2}$$

Dengan mensubstitusikan solusi coba (2) ke persamaan (1) akan didapat dua persamaan dengan variabel yang terpisah

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\alpha}{2\chi}\frac{d^2\chi}{dx^2} + \gamma\chi^2 . \tag{3}$$

Agar mempunyai solusi, kedua persamaan di ruas kiri dan kanannya haruslah bernilai konstan. Untuk persamaan ruas kiri

$$\frac{dT}{dt} = K \text{ , } (K = \text{konstanta}) \tag{4}$$

Solusi khusus dari (4) adalah

$$T(t) = Kt . \tag{5}$$

Melalui substitusi (4) ke persamaan (3), kita mendapatkan persamaan lainnya yang mempunyai bentuk

$$\frac{d^2\chi}{dx^2} = \frac{2K}{\alpha}\chi - \frac{2\gamma}{\alpha}\chi^3 \quad . \tag{6}$$

Untuk mencari solusi (6), pertama-tama kita mengalikan kedua ruas dengan $d\chi/dx$ sehingga melalui aljabar matematika akan didapat bentuk

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{d\chi}{dx}\right)^2\right]=\frac{d}{dx}\left[\frac{K}{\alpha}\chi^2-\frac{\gamma}{2\alpha}\chi^4\right] \tag{7}$$

Integrasi langsung dapat dilakukan dengan mengubah bentuk (7) menjadi

$$dx=\sqrt{\frac{\alpha}{2K}}\frac{d\chi}{\chi\sqrt{1-\frac{\gamma}{2K}\chi^2}} \tag{8}$$

Solusi pada (8) dapat dicari melalui bantuan software *Mathematica* atau menggunakan integral substitusi. Untuk menerapkan metode integral substitusi, kita melakukan transformasi fungsi

$$\chi=\sqrt{\frac{2K}{\gamma}}\sec h(y). \tag{9}$$

Dengan melakukan substitusi (9) ke (8), maka akan didapat bentuk integral

$$x=-\int\sqrt{\frac{\alpha}{2K}}dy$$

$$=-\sqrt{\frac{\alpha}{2K}}y. \tag{10}$$

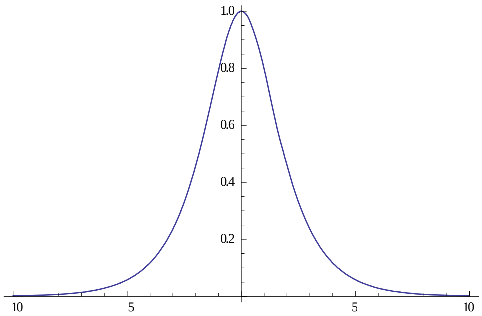
Dengan demikian, solusi untuk fungsi χ dapat ditulis

$$\chi(x)=\sqrt{\frac{2K}{\gamma}}\sec h\left(\sqrt{\frac{\alpha}{2K}}x\right) \tag{11}$$

Solusi satu soliton stasioner persamaan Schrödinger nonlinear didapat dengan mensubstitusikan persamaan (5) dan (11) ke persamaan (2), didapat

$$\psi(x,t)=\sqrt{\frac{2K}{\gamma}}\sec h\left(\sqrt{\frac{\alpha}{2K}}x\right)\exp(iKt) \tag{12}$$

Di bawah ini adalah profil dari solusi gelombang nonlinear tersebut dengan mengambil $\alpha=\gamma=K=1$ pada saat $t=0$



Apabila diperhatikan, solusi pada persamaan (12) mempunyai karakteristik berikut

- $\lim_{x\to\infty}\psi(x,t)=0$
- $\lim_{x\to-\infty}\psi(x,t)=0$

Hasil dan Pembahasan

Pada tahap berikut ini akan dihitung massa klasik soliton persamaan NLS berdasarkan solusi yang telah didapat. Hal pertama adalah menentukan rapat Lagrangian bagi persamaan NLS tersebut. Kita meninjau dahulu fungsi rapat Lagrangian ansatz yang dapat dituliskan $L(\psi,\psi^*,\psi_x,\psi_x^*,\psi_t,\psi_t^*)$, dengan $\psi_t=\partial\psi/\partial t$ dan $\psi_x=\partial\psi/\partial x$. Dengan mensyaratkan variasi rapat Lagrangian, $\delta L=0$, kita mendapatkan dua persamaan Euler-Lagrange yang saling bebas

$$\frac{\partial L}{\partial\psi}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\psi_t}\right)-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial\psi_x}\right)=0, \tag{13}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\psi^*}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\psi_t^*}\right)-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial\psi_x^*}\right)=0 \tag{14}$$

Supaya menghasilkan persamaan NLS (1), kita memilih persamaan (14). Selanjutnya kita meninjau rapat Lagrangian ansatz berikut

$$L=A\psi\psi_t^*+B\psi^*\psi_t+C|\psi_x|^2+D|\psi|^4 \tag{15}$$

dengan *A*, *B*, *C*, dan *D* adalah konstanta yang harus ditentukan agar sesuai dengan persamaan NLS (1). Dengan melakukan substitusi (15) ke persamaan

(14), kita mendapatkan rapat Lagrangian NLS

$$L = \frac{i}{2}(\psi^* \psi_t - \psi \psi_t^*) - \frac{\alpha}{2}|\psi_x|^2 + \frac{\gamma}{2}|\psi|^4 \quad (16)$$

Selain itu, rapat Hamiltonian dalam teori medan klasik dapat dituliskan

$$H = \psi_t^* p_t^* + \psi_t p_t - L \quad (17)$$

dengan momentum konjugat $p_t = \partial L / \partial \psi_t$.

Dengan mensubstitusikan seluruh besaran yang didapat, maka rapat Hamiltonian untuk NLS mempunyai bentuk

$$H = \frac{1}{2}\left(\alpha|\psi_x|^2 - \gamma|\psi|^4\right). \quad (18)$$

Massa klasik soliton NLS didapat melalui rumus [1]

$$m = \int_{-\infty}^{\infty} H \; dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\alpha|\psi_x|^2 - \gamma|\psi|^4\right) dx. \quad (19)$$

Apabila solusi persamaan NLS (12) ke (19), lalu dihitung maka akan didapat massa klasik soliton NLS

$$m = \frac{\sqrt{2}}{3\gamma}\sqrt{\frac{K}{\alpha}}\left(\alpha^2 - 8K^2\right). \quad (20)$$

Mengingat bahwa massa klasik yang menggambarkan partikel haruslah positif $m > 0$, maka menurut persamaan (20) harus terdapat batasan

$$\alpha > \pm 2\sqrt{2}K. \quad (21)$$

Kesimpulan

Pada makalah ini telah diformulasikan solusi satu soliton untuk persamaan persamaan NLS dengan dimensi ruang waktu (1+1). Solusi ini didapat melalui pemisahan variabel, lalu dilanjutkan dengan integrasi langsung. Di samping itu, telah dirumuskan pula rapat Lagrangian dan rapat Hamiltonian untuk persamaan NLS. Perumusan kedua fungsi tersebut mempunyai konvensi tersendiri berdasarkan referensi, seperti pada [7]. Kedua fungsi tersebut didapatkan melalui rapat Lagrangian ansatz yang sesuai dengan persamaan NLS yang sesuai apabila disubstitusikan ke persamaan Euler-Lagrange.

Setelah itu, melalui dua perumusan di atas dapat dihitung massa klasik soliton. Perhitungan massa klasik ini berdasarkan definisi massa pada teori medan klasik yang merupakan integral dari rapat Hamiltonian terhadap seluruh ruang. Selain itu, telah ditunjukkan pula bahwa terdapat batasan yang harus dipenuhi oleh konstanta-konstanta yang terdapat dalam solusi satu soliton NLS supaya massa klasik soliton bernilai positif.

Ucapan Terima Kasih

Saya mengucapkan terima kasih pada semua dosen fisika terutama Satwiko Sidopekso, PhD atas motivasinya. Selain itu, rasa terima kasih diucapkan juga kepada Sinta Latifah, Ika Fitriasih, dan Alhidayatuddiniyah sebagai teman diskusi.

Daftar Pustaka

[1] Wospakrik H. J, “Soliton and Particle,” J. Theor. Comput. Stud. Vol. 4, 0308, 2005.

[2] Rajaraman R., “Solitons and Instantons,” Elsevier Science Publishers B. V, Amsterdam, Netherlands, 1989.

[3] Drazin P. G. and Johnson R. S, ”Solitons : an Introduction,” Cambridge University Press, New York, USA, 2002.

[4] Leble S. and Reichel B., “Coupled Nonlinear Schrödinger Equations in Optics Fiber Theory,” Eur. Phys. J. Special Topics. Vol. 173, 5-55, 2009.

[5] Scott A. C, Chu F. Y. F, and Mclaughlin D. W, “The Soliton : A New Concept in Applied Science,” Proc. IEEE. Vol. 61. No. 10, 1443-1450, 1973.

[6] Agrawal G. P, “Applications of Nonlinear Fiber Optics,” Elsevier Inc., California, USA, 2008.

[7] Biswas A. and Konar S. “Introduction to non-Kerr Law Optical Solitons,” Taylor & Francis Group, New York, USA, 2007.