Berkala Fisika *ISSN : 1410 - 9662*
Vol. 14, No. 3, Juli 2011, hal 93 - 100

INVERSI LINIER LEASTSQUARE DENGAN MATLAB (Studi Kasus Model Gravitasi Bola Berlapis)

***M. Irham Nurwidyanto*[1] *dan Ari Setiawan*[2]**
1 Jurusan Fisika Universitas Diponegoro Semarang
2 Jurusan Fisika Universitas Gadjah Mada Yogyakarta

Abstract

The linear least square Inversion have been made with matlab8 for a case study of layered ball with the aim to study the response of the gravitational field of a layered ball.

The gravitational field of layered ball formulation described later the value is calculated by programming in matlab. As the validation data is computed on the surface of the earth's gravitational field with a case of six layers with different density and radius. The value are suitable to the real slate. After the results are appropriate, the results of programming was made is used to calculate the gravitation field of another layered ball object, the data is then used as synthetic data (considered as a data field) which is an inversion of input data on the program are made.

The results obtained in this modeling can be concluded that there are ambiguity from the inversion results, which means that the parameters which be obtained from the invertion method are very different to the riil parameter if not given early predictive value as the limit of the expected value. By providing a limit value (the value of the initial estimate) the expected results of the inverse can provide results that correspond (nearly) true value.

***Key words**: Inversion, Linier leastquare, layered ball*

Abstrak

Telah dibuat simulasi inversi linier leastsquare dengan matlab8 untuk studi kasus bola berlapis dengan tujuan untuk mengetahui respon medan gravitasi dari benda berbentuk bola berlapis.

Medan gravitasi dari bola berlapis dijabarkan perumusannya kemudian harganya dihitung dengan pemograman dalam matlab. Sebagai data validasi dihitung medan gravitasi bumi di permukaan dengan kasus enam lapis dengan massa jenis dan jari-jari berbeda yang sesuai dengan keadaan sebenarnya. Setelah hasilnya sesuai, hasil pemograman yang dibuat digunakan untuk menghitung benda berupa bola berlapis lain, data ini kemudian dipakai sebagai data sintetik (dianggap sebagai data lapangan) yang merupakan data masukan pada program inversi yang dibuat.

Hasil yang diperoleh pada pemodelan ini dapat disimpulkan bahwa ada keambiguitasan hasil inversi, artinya dengan parameter yang kita cobakan bisa diperoleh hasil yang jauh berbeda bila tidak diberikan nilai prediksi awal sebagai batasan nilai yang diharapkan. Dengan memberikan batasan nilai (nilai pendugaan awal) yang diharapkan hasil inverse bisa memberikan hasil yang sesuai (mendekati) nilai sebenarnya.

***Kata kunci** : Inversi, Linier leastquare, bola berlapis*

Pendahuluan

Tujuan utama dalam kegiatan eksplorasi geofisika adalah membuat model bawah permukan bumi dengan mengandalkan data lapangan yang diukur. Dalam kegiatan eksplorasi seringkali dijumpai berbagai kendala antara lain adanya noise saat pengukuran, kendala tidak lengkapnya data dan lain-lain. Tapi dengan keterbatasan yang ada *geophysicist* akan berupaya memperoleh informasi (model) yang valid berdasarkan keterbatasan data yang ada. Metode pemodelan yang biasa digunakan dalam geofisika dapat dikelompokkan menjadi dan pemodelan maju *(forward modeling)* yakni dengan diperkirakannya parameter model kita dapat menghitung respon yang dihasilkan dari model tersebut dan pemodelan inversi *(Invers modeling)* yakni dengan mengukur data di lapangan akan diperkirakan parameter model yang dicari dengan penyelesaian matematika][1].

Proses inversi adalah suatu proses pengolahan data lapangan yang melibatkan penyele saian matematika dan statistik untuk mendapatkan informasi parameter fisis kondisi bawah permukaan bumi. Dalam proses inversi biasanya kita melakukan analisis terhadap data lapangan dengan cara melakukan pencocokan kurva *(curve fitting)* antara data lapangan dan model matematika. Tujuan dalam metode inversi ini adalah untuk memperkirakan parameter fisis kondisi bawah permukaan yang tidak diketahui sebelumnya. Pada makalah ini akan dibahas inversi linier *leastsquare* untuk kasus bola berlapis dengan enam perlapisan yang masing-masing mempunyai rho dan jari-jari berbeda.

Teori Dasar

Dalam masalah inversi, selalu berhubungan dengan parameter model (M) dan jumlah data (N) yang mana jumlah dari masing-masing akan memnentukan klasifikasi masalah inversi dan cara penyelesaiannya. Bila jumlah model parameter lebih sedikit dibandingkan dengan data lapangan (M<N) maka disebut ***overdetermined*** dan cara penyelesaiannya menggunakan pencocokan *(best fit)* terhadap data lapangan. Jika jumlah parameter model yang ingin dicari lebih banyak dari data yang ada (M>N) maka disebut ***Underdetermined***. Pada kasus ini terdapat sekian banyak model yang dapat sesuai dengan kondisi datanya atau disebut ***non-uniqness***. Untuk kasus ini penyelesaian yang paling baik adalah model yang parameternya berbentuk fungsi kontinyu terhadap posisi. Kasus yang terakhir adalah jika jumlah parameter model sama atau hampir sama dengan jumlah datanya (M=N) disebut ***evendetermined***. Pada kasus ini model yang paling sederhana dapat diperoleh dengan meteode inversi langsung][2].

Metode inversi *least squares* dapat didekati dengan operasi matrik. Secara umum problem geofisika selalu diupayakan agar dapat disederhanakan menjadi bentuk d=Gm, dengan d adalah data yang dimiliki dan M adalah parameter model yang dicari dan G adalah matrik kernel. Jika data dianggap ideal maka tidak memiliki *error*, maka nilai m dapat dicari dengan menyelesaikan persamaan

$$m=G^{-1}d \qquad (1)$$

Akan tatapi kenyataanya semua data pengukuran pasti memiliki error yang besarnya relatif. Karenanya, data observasi tak akan pernah cocok *(fit)* secara sempurna dengan model, permasalahan ini dapat kita tuliskan dalam persamaan :

$$d=Gm + e_i, \qquad (2)$$

Satu-satunya cara untuk memperoleh solusi yang unik adalah dengan meminimalkan jumlah kuadrat residual e_i. Cara ini akan meminimalkan perbedaan antara data lapangan dan model prediksi melaui pemodelan *forward*. Dalam formulasi matematika dapat dinyatakan dengan persamaan sebagai berikut :

$$q = e^T e = (d - Gm)^T (d - Gm) \qquad (3)$$

Agar minimal maka q diturunkan terhadap m, sehingga diperoleh :

$$\frac{\partial q}{\partial m_j} = \frac{\partial [d^T d - d^T Gm - m^T G^T d + m^T G^T Gm]}{\partial m_j} = 0 \qquad (4)$$

Sehingga diperoleh persamaan

$$2G^T Gm = 2G^T d \qquad (5)$$

Persamaan tersebut disebut persamaan normal, dengan persamaan normal, estimasi parameter yang dinyatakan dalam m dapat ditentukan dengan persamaan berikut :

$$m = [G^T G]^{-1} G^T d \qquad (6)$$

Persamaan itu disebut *unconstrained least squares* terhadap masalah inversi d

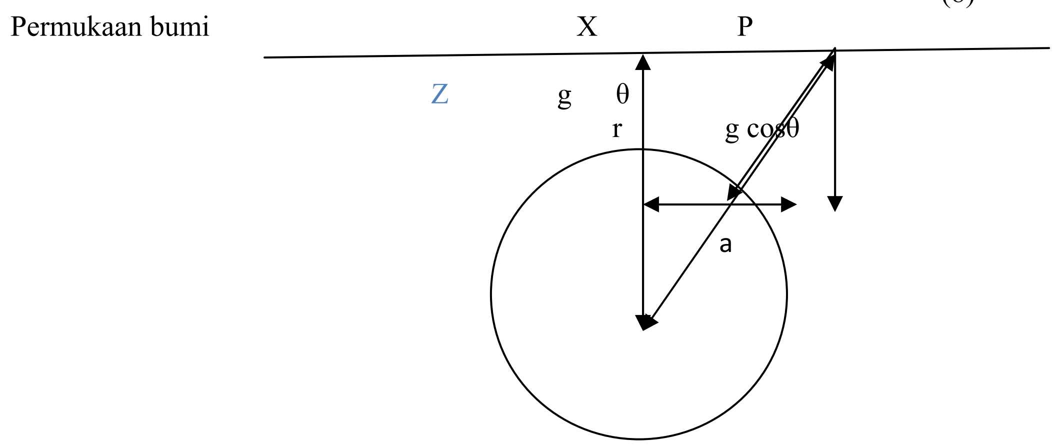
=Gm. Sedangkan bagian $[G^T G]^{-1} G^T$ dinamakan *generalized inverse* yang mengolah data d untuk memperoleh parameter model m. Persamaan ini akan dicobakan pada kasus respon gaya berat akibat bola berlapis. Proses penyelesaian penyelesaian persamaan tersebut akan menggunakan program MatLab 8 RS1.

Sebuah bola pejal dengan jari-jari a dan kontras densitas ρ terkubur di bawah permukaan bumi pada kedalaman z dalam 2 dimensi seperti diilustrasikan pada gambar-1, maka efek grafitasi komponen vertical yang dihasilkan pada suatu titik P dipermukaan bumi dapat dirumuskan oleh persamaan berikut][3,4]:

$$g = G\frac{4}{3}\pi a^3 z\left\{\frac{z}{(x^2+z^2)^{3/2}}\right\} \tag{7}$$

Bila kita punya bola berlapis dengan jari-jari a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 dan a_6 dan massa jenis pada masing-masing lapisan tersebut ρ_1, ρ_2,ρ_3, ρ_4, ρ_5, ρ_6, berada di bawah permukaan bumi pada kedalaman Z maka medan gravitasi komponen vertical yang dihasilkan di permukaan bumi pada suatu titik P dapat dinyatakan dalam persamaan (8) berikut :

$$g = G\frac{4}{3}\pi\left\{\frac{(a_1^3-a_2^3)\rho_1+(a_2^3-a_3^3)\rho_2+(a_3^3-a_4^3)\rho_3+(a_4^3-a_5^3)\rho_4+(a_5^3-a_6^3)\rho_5+(a_6^3)\rho_6}{(r^2+z^2)^{1.5}}\right\}z \tag{8}$$



Gambar-1, Ilustrasi model bola pejal dengan jari-jari a pada kedalaman Z di bawah permukaaan bumi.

Dengan g adalah percepatan grafitasi dalam m/s^2, *G* merupakan konstanta gravitasi universal 6,67*x*10^{-11} Nm^2/kg^2, a_1 merupakan jari-jari perlapisan paling luar dalam m, a_2 jari-jari perlapisan ke-2 dalam m, a_3 merupakan jari-jari ke-3 dalam m, a_4 merupakan jari-jari ke-4 dalam m, a_5 merupakan jari-jari ke-5 dalam m, a_6 merupakan jari-jari ke-6 dalam m. Sedangkan ρ_1 merupakan densitas perlapisan paling luar (ke-1) dalam kg/m^3, ρ_2 merupakan densitas perlapisan ke-2 kg/m^3, ρ_3 merupakan densitas perlapisan ke-3 kg/m^3, ρ_4 merupakan densitas perlapisan ke-4 kg/m^3, ρ_5 merupakan densitas perlapisan ke-5 kg/m^3, ρ_6 merupakan densitas perlapisan ke-6 kg/m^3.

Metode

Pada penelitian ini dibuat model benda bola berlapis dengan 6 perlapisan, dengan jari-jari a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 dengan massa jenis pada masing-masing lapisan ρ_1, ρ_2,ρ_3, ρ_4, ρ_5, ρ_6. Dari kasus ini diandaikan pusat massa benda berada di kedalaman Z dibawah permukaan bumi, maka medan gravitasi yang disebabkan oleh benda tersebut di permukaan bumi dapat dirumuskan seperti rumus(8) di atas.

Dari persaman (8) dibuat program untuk menghitung besarnya medan gravitasi g sebagai fungsi koordinat (X,Y) atau g(x,y) dengan matlab RS8. Untuk validasi program yang dibuat diujicobakan untuk menghitung respon medan gravitasi yang diakibatkan oleh bumi sebagai data kalibrasi dengan parameter massa jenis dan jari-jari seperti pada tabel-1 berikut :][5].

Tabel-1, Tabel jari-jari dan massa jenis perlapisan bumi][5]

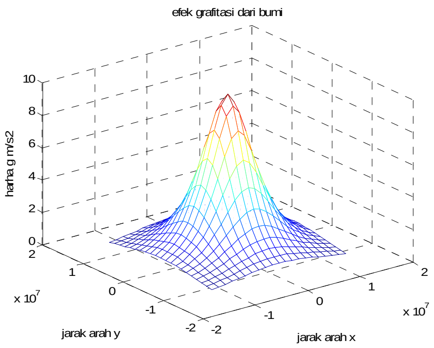
Nomo r	Jari-jari (m)	Massa-jenis (kg/m^3)	keterangan
1	a_1 = 6371000 m ,	ρ_1 = 2700 kg/m^3	Kerak bumi
2	a_1 = 6371000 m ,	ρ_2 = 3300 kg/m^3,	Matel atas
3	a_3 = 6000000 m ,	ρ_3 =4000 kg/m^3,	Zona transisi
4	a_4 =5651000 m ,	ρ_4 = 5500 kg/m^3,	Mantel dalam
5	a_5 =3485000 m ,	ρ_5 = 9000 kg/m^3,	Inti luar
6	a_6 = 1215000 m .	ρ_6 = 12000 kg/m^3,	Inti dalam

Apa bila parameter tersebut di terapkan sebagai data pada pemograman yang dibuat maka akan diperoleh nilai grafitasi bumi dipermukaan sekitar 10 m/s^2 apabila pemogramannya benar.
Bila Program perhitungan efek grafitasi yang dibuat dalam matlab8 sudah yakin benar, kemudian digunakan untuk menghitung benda lain (bola berlapis) dengan parameter jari-jari (a) dan massa jenis (rho) tiap lapisan serta kedalaman pusat bola (z). Hasil perhitungan efek grafitasi dengan model ini digunakan sebagai data sintetik pada penyelesaian pada metode inversi. Data sintetik ini sebagai masukan seolah-olah sebagai data lapangan pada program inversi yang dibuat. Hasil perhitungan pemodelan inverse kemudian di bandingkan dengan parameter data sintetik.

Hasil dan Diskusi

a. Pengujian program forward bola berlapis

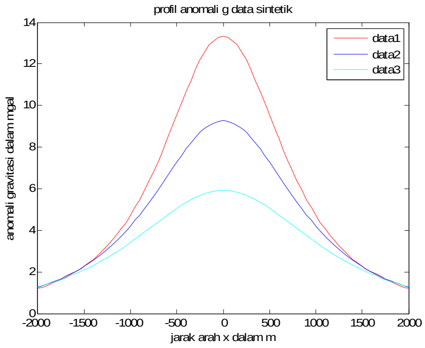
Untuk menguji program forward penghitungan efek grafitasi dari bumi, apa bila pemodelan forward tersebut betul tentunya menghasilkan harga g dipermukaan bumi sekitar 10 m/s^2. Bila data parameter bumi sebenarnya tersebut digunakan sebagai masukan pada pemodelan forward yang dibuat diperoleh harga grafitasi dipermukaan bumi (pada koordinat x = 0, y = 0) adalah 9,8167 m/s^2, berarti hasil yang diperoleh sesuai dengan percepatan grafitasi bumi yang sebenarnya. Secara lengkap data perhitungan harga gravitasi bumi pada bidang horizontal tepat dipermukaan bumi ditunjukkan pada gambar-2 berikut.



Gambar-2, Gambar efek gravitasi dari bumi pada bidang horizontal yang menyinggung permukaan bumi hasil dari pemograman.

b. Data sintetik

Data sintetik diperoleh dari perhitungan forward dari model bola berlapis dengan enam perlapisan dengan parameter seperti table-2. Program perhitungan diberi nama data sintetik, adapun data anomaly dan hasil perhitungan yang didapat bila diplotkan terhadap jarak mendatar seperti ditunjukkan pada gambar-3 berikut. Data dari bola berlapis dengan variasi kedalaman z_1=1000 m ditunjukkan dengan warna merah, kedalaman z_2 = 1200 m ditunjukkan dengan warna biru dan kedalaman z_2 = 1500 m ditunjukkan dengan warna biru muda (cyan).



Gambar-3, Profile data sintetik anomaly g terhadap jarak pada kedalaman z_1=1000 m (warna merah), kedalaman z_2 = 1200 m (warna biru) dan kedalaman z_3 = 1500 m (warna cyan).

Tabel-2, Tabel parameter bola berlapis pada kedalaman z_1 = 1000 m, z_2 = 1200 m, dan z_3 = 1500 m.

nomer	Jari-jari perlapisan bola (m)	Densitas perlapisan bola (g/cc)
1	600	2.0
2	500	2.2
3	400	2.4
4	300	2.6
5	200	2.8
6	100	3.0

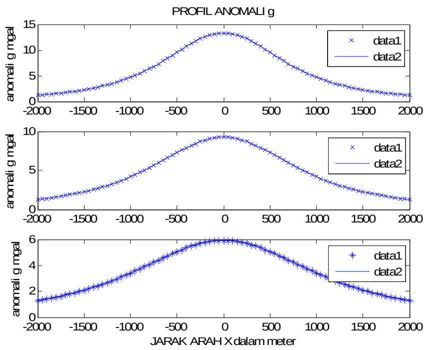
c. Inversi bebas

Program inverse bebas ditulis dalam bahasa matlab8 diberi nama **inversi bebas**. Hasil dari inversi bebas ini dapat diringkas seperti pada tabel-2 berikut:

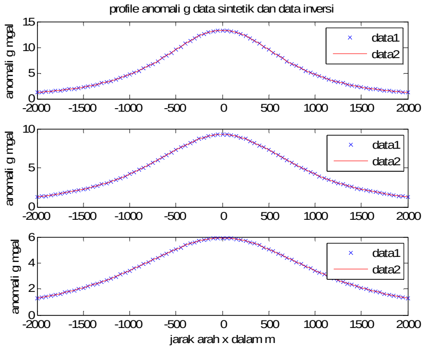
Tabel-3, table hasil inverse bebas dengan matlab dengan perintah lsqr(k,g,tol,maxit) dan inversi bebas dengan perintah lsqr(k,g).

Hasil inversi bebas dengan perintah lsqr(k,g,tol,maxit)					
no	parameter	Rho data g/cc	Rho inversi g/cc Pada z1	Rho inversi g/cc Pada z2	Rho inversi g/cc Pada z3
Iterasi ke /residual			1000000/6.3e-017	703982/7.8e-017	515920/5e-017
1	Rho1	2.0	10.4751	20.7205	5.8486
2	Rho2	2.2	-44.0618	-23.6998	-18.5908
3	Rho3	2.4	-21.3943	6.989	-40.4135
4	Rho4	2.6	78.4264	10.9374	123.019
5	Rho5	2.8	488.9864	-130.3817	20.0616
6	Rho6	3.0	-1909.8789	483.3951	96.3199
Hasil inversi bebas dengan perintah lsqr(k,g)					
no	parameter	Rho data g/cc	Rho inversi g/cc Pada z1	Rho inversi g/cc Pada z2	Rho inversi g/cc Pada z3
Iterasi ke/residual			1/2.9e-016	1/2.9e-016	1/4.1e-016
1	Rho1	2.0	3.1495	3.1495	3.1495
2	Rho2	2.2	2.1112	2.1112	2.1112
3	Rho3	2.4	1.2806	1.2806	1.2806
4	Rho4	2.6	0.6576	0.6576	0.6576
5	Rho5	2.8	0.24227	0.24227	0.24227
6	Rho6	3.0	0.03461	0.03461	0.03461

Dari hasil yang ditunjukkan pada tabel-3, pada gambar-4 dan gambar-5, inversi bebas tanpa pendugaan awal diperoleh penyelesaian yang jauh dari nilai sebenarnya, artinya bila pemodelan inversi tanpa nilai pendugaan awal hasil yang didapat belum mencerminkan keadaan sebenarnya. Jadi kalau kita bikin model berdasarkan metode inversi harus dikontrol dengan informasi geologi sebagai nilai konstrain atau nilai pendugaan awal agar diperoleh model yang sesuai (mendekati) dengan sebenarnya.



Gambar-4, Profil anomaly g dari bola berlapis hasil inversi bebas (* dan x) dengan perintah lsqr(k,g,tol,maxit) dan data lapangan (garis warna biru) untuk kedalaman pusat massa z_1 = 1000 m (paling atas) kedalaman z_2 = 1200 m (tengah) dan kedalaman z_3 = 1500 m (bawah).



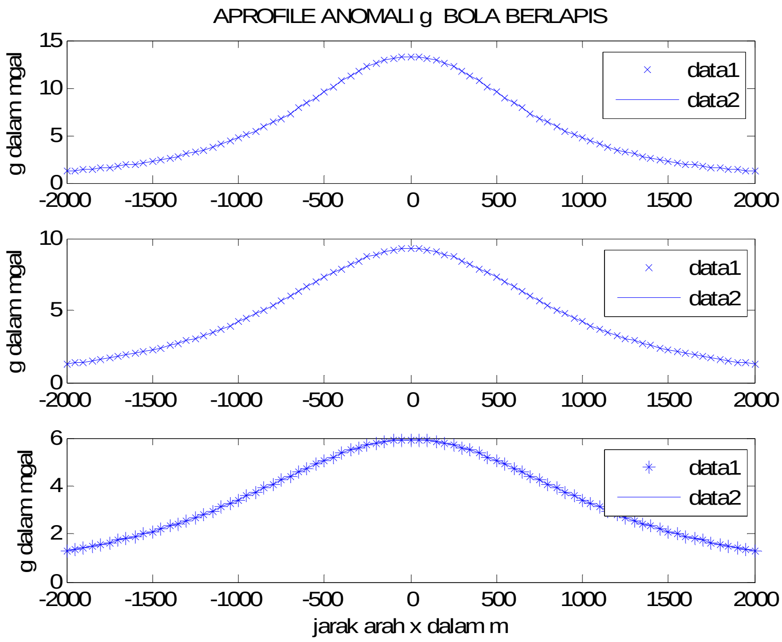
Gambar-5, Profile anomaly g data inversi bebas (tanda x warna biru) dengan perintah lsqr(k,g) dan data lapangan (garis warna merah) terhadap jarak untuk kedalaman z_1 = 1000 m (paling atas) kedalaman z_2 = 1200 m (tengah) dan kedalaman dan Z_3 = 1500 m (bawah).

d. Inversi terkontrain

Perhitungan inverse terkonstarin ditulis dalam bahasa matlab8 dengan nama **inversi terkonstrain**. Hasil dari inversi terkonstrain dapat diringkas seperi pada tabel-3, dan dapat digambarkan seperti pada gambar-6 berikut:

Tabel-4, Tabel hasil inverse terkonstrain dengan diberi parameter pendugaan awal

No.	parameter	Lb (batas pendugaan rho minimum) g/cc	Ub (batas pendugaa n rho maximum) g/cc	Rho riil g/cc	Rho hasil inversi pada z1 g/cc	Rho hasil inversi pada z2 g/cc	Rho hasil inversi pada z3 g/cc
1	Rho1	1.2	2.4	2.0	2.0007	2.0007	2.0007
2	Rho2	1.4	2.6	2.2	2.1986	2.1986	2.1986
3	Rho3	1.6	2.8	2.4	2.399	2.3991	2.3991
4	Rho4	1.8	3.0	2.6	2.6012	2.6012	2.6012
5	Rho5	2.0	3.2	2.8	2.8038	2.8038	2.8038
6	Rho6	2.2	3.4	3.0	3.0054	3.0055	3.0055



Gambar-6, Profile anomaly g data inversi terkonstrain (tanda x warna biru) dan data lapangan (garis warna biru) terhadap jarak untuk kedalamanpusat massa z_1 = 1000 m (paling atas) kedalaman z_2 = 1200 m (tengah) dan kedalaman Z_3 = 1500 m (bawah)

Dari hasil yang ditunjukkan pada tabel-4 dan gambar-6, pada pemodelan dengan metode inversi dengan konstrain atau dengan nilai pendugaan awal diperoleh parameter yang sesuai (hampir sama) dengan nilai sebenarnya. Salah satu cara agar penyelesaian yang dihasilkan pada metode inversi unik dan dapat dipercaya kebenarannya maka diperlukan nilai parameter pendugaan awal batas minimum (nilai paling bawah) dan batas pendugaan maksimum (nilai maximum) yang nilai tersebut dapat diterima secara geologi. Dengan demikian parameter yang dihasilkan dari metode inverse akan mendekati (dekat) atau sesuai dengan nilai sebenarnya.

Kesimpulan

Setelah melakukan pemodelan perhitungan invesi dapat disimpulkan hal-hal sebagai berikut :

1. Pemodelan inversi bila tanpa pendugaan awal akan diperoleh beragam peneyelesaian (umbiguitas penyelesaian) walaupun dengan toleransi kesalahan yang sangat kecil belum mencerminkan keadaan yang sebenarnya.
2. Untuk menghasilkan penyelesaian yang unik dan dapat dipercaya pada metode inversi diperlukan nilai pendugaan awal (batas nilai parameter minimum dan maksimum) yang diperoleh dari data lain (misalnya informasi geologi).

Saran

Untuk menyempurnakan pemodelan inversi ini bisa dilkembangkan program inversi untuk parameter lain, missal mencari faktor geometrinya, misalnya jari-jari bola (a) dan kedalaman pusat bola (z).

Daftar Pustaka

[1] Blakely, R.J., 1995, ***Potential Theory in Gravity and Magnetic Applications***, Cambridge Univ Press, New York.

[2] Meju, A Max., 1994, Geophysical ***Data Analysis:Understanding Inverse Problem Problem Teory and Practice***, Socety of Exploration Geophysicsist (SEG).

[3] Nettleton,L.L., 1976, ***Gravity and Magnetics in Oil Prospecting***, McGraw-Hill, New York.

[4] Telford, W.M., Geldart, R.E., Sheriff, D.A., and Keys, 1990, ***Applied Geophysics***, Cambridge University Press.

[5]Bott, M.H.P., 1984, ***The interior of the Earth; it structure, constitution and evolution***, second edition, Elsevier, New York.