

Sudut Minimum antar Sub Ruang Vektor : Aplikasi pada Dinamika Biologis Perairan Jawa Selatan Sumbawa

Dwi Haryo Ismunarti *

Jurusan Ilmu Kelautan –FPIK Universitas Diponegoro, Semarang, Indonesia

Abstrak

Sudut minimum antar sub ruang vektor (RV) adalah analisis data deskriptif untuk membandingkan beberapa gugus individu yang diukur pada peubah yang sama. Matriks L dan M dengan unsur kolom masing-masing adalah l_i dan m_i , yaitu loading dari komponen utama ke i dari gugus A dan B . Sudut q adalah sudut antara vektor dari dua sub RV berdimensi k yang dibangkitkan oleh k komponen utama gugus A dengan vektor terdekatnya di sub RV yang dibangkitkan komponen utama gugus B . Dengan demikian maka kemiripan antar gugus data peubah ganda ditunjukkan oleh V yaitu jumlah kuadrat cosinus sudut antar loading dari komponen utama A dan B .

Kata kunci : ruang vektor(RV), komponen utama(KU), akar ciri dan vektor ciri

Abstract

The minimum angle between sub spaces is a descriptive tool for the comparison the several different groups of individuals have the same p variables measurement on them. Let L and M as the matrix with elements vector l_i and m_i are the loading of the i^{th} principal component for group A and B , respectively. Let q is the angle between an arbitrary vector in the k -dimensional sub space generated by k principal component of group A and the one most nearly vector in the sub space generated by k principal component of group B . The sum of squares of cosines of angles between each of the k eigenvectors defining the principal component of A and each one of B can be used a measurement of similarity between two groups A and B .

Key words : vector space, principal component, eigen value and eigen vector

Pendahuluan

Kualitas perairan sering dipakai sebagai acuan terhadap pendekatan gambaran tingkat kesuburan perairan. Kajian terhadap beberapa lokasi perairan yang berbeda penting dilakukan untuk memperoleh gambaran dinamika kesuburan antar perairan yang berpengaruh terhadap dinamika biota laut. Dinamika biologis ini digunakan untuk memprediksi dan mempelajari pergerakan biota laut secara vertikal dan horisontal (Alkatiri dan Hartoyo, 1997).

Misalkan ada beberapa grup contoh pengamatan dari lokasi yang berbeda sedangkan jenis dan banyaknya peubah yang diamati sama. Setiap grup pengamatan membentuk matriks data peubah ganda $n_i \times p$, dimana n_i banyaknya stasiun di masing-masing grup dan p adalah banyaknya peubah yang diamati. Sedangkan x_{ij} adalah pengamatan peubah lingkungan ke- j yang diukur pada stasiun ke- i . Hal yang menarik untuk dipelajari adalah membandingkan atau mencari kriteria kemiripan antar grup.

Pada umumnya analisis data peubah ganda merupakan perampatan dari analisis data peubah tunggal dengan didasarkan pada asumsi sebaran normal ganda. Seringkali data dari penelitian ekologi justru tidak memenuhi asumsi sebaran normal ganda (Digby dan Kempton, 1994). Analisis statistika untuk peubah ganda kemudian berkembang dari teori yang didasarkan pada teori sebaran menjadi analisis eksplorasi data peubah ganda.

Penelitian ini mempelajari alternatif pendekatan statistika untuk membandingkan kemiripan antar gugus data peubah ganda dengan tidak melakukan pengujian hipotesis yaitu menggunakan metode sudut minimum antar sub ruang vektor.

Sudut minimum antar sub ruang vektor adalah sudut antara dua vektor terdekat di dua sub ruang untuk aplikasi statistika diperkenalkan oleh Hotelling pada tahun 1935, kemudian Cohen dan Ben-Israel tahun 1969 digunakan pada analisa korelasi kanonik (Miao dan Ben-Israel, 1992).

Materi dan Metoda

Sudut Antara Dua Sub Ruang Vektor (RV)

Jika vektor-vektor kolom matriks L' dan M' merupakan landasan ortonormal bagi ruang vektor $Q_L \in \mathbb{R}^{n \times l}$ dan $Q_M \in \mathbb{R}^{n \times m}$ dengan $\dim(Q_L) = l \leq \dim(Q_M) = m$ maka sudut minimum antara ruang vektor Q_L dan Q_M adalah $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \dots \leq \theta_l \leq \pi/2$ didefinisikan :

$$\cos \theta_i = \frac{x_i' y_i}{\|x_i\| \|y_i\|} = \max_{\substack{x \in Q_L, y \in Q_M, x \perp x_k, y \perp y_k \\ k=1, \dots, i-1}} \left\{ \frac{x' y}{\|x\| \|y\|} \right\}$$

dimana $(x_i, y_i) \in L \times M, i = 1, 2, \dots, l$ / (Miao dan Ben-Israel, 1996)

Jika nilai singular dari ML' adalah $\gamma_1 > \gamma_2 > \dots > \gamma_l \geq 0$ dan $\dim(L \cap M) = k$ maka cosines sudut pasangan vektor ke-i adalah $\cos \theta_i = \gamma_i, i = 1, 2, \dots, l$ / dan $\gamma_l = \dots = \gamma_k = 1 > \gamma_{k+1}$.

Pembandingan Untuk Dua Grup

Pengukuran sebanyak p peubah yang sama dari n1 individu gugus A diperoleh matriks pengamatan $n_1 X^{(A)} = (x_{a1}, x_{a2}, \dots, x_{ap})$ sedangkan dari n2 individu gugus B diperoleh matriks $n_2 X^{(B)} = (x_{b1}, x_{b2}, \dots, x_{bp})$ kemudian dilakukan transformasi ortogonal terhadap matriks pengamatan dengan menggunakan analisis komponen utama (AKU).

Jika k komponen utama (KU) pertama dianggap cukup dalam menjelaskan keragaman data maka diperoleh matriks $L'_k = [l_1, l_2, \dots, l_k]$ dan $M'_k = [m_1, m_2, \dots, m_k]$ dengan unsur kolom loading dari k KU pertama. Vektor-vektor l_j dan $m_j \in \mathbb{R}^p, j = 1, 2, \dots, k$ adalah vektor ciri dari matriks simetri dan merupakan vektor yang ortonormal dan bebas linier (Anton, 1995).

Jika vektor kolom dari L' merupakan landasan bagi sub RV Q_L maka setiap vektor $b \in Q_L$ adalah $b = L'a$ dimana $a \in \mathbb{R}^k$. Jika vektor kolom dari M' adalah landasan bagi sub RV Q_M maka vektor $M'Mb \in Q_M$ adalah proyeksi ortogonal $b \in Q_L$ di sub RV Q_M . Sudut antara kedua vektor adalah $\theta (0 < \theta < \pi/2)$ dimana

$$\cos \theta = \frac{b' M' M b}{\|b\| \|M' M b\|} = \frac{a' L' M' M L a}{\|L a\| \|M' M L a\|}$$

Misalkan matriks $S = LM'ML'$ dengan mengambil $\|a\| = 1$ maka $\cos^2 \theta = a' LM'ML'a = a'Sa \geq 0$ dan S merupakan matriks simetri semidefinit positif. Nilai maksimum bentuk kuadrat dari $a'Sa$ untuk $\|a\| = 1$ sama dengan $\lambda^{(s)}$, yaitu akar ciri terbesar matriks S

yang merupakan maksimum $\cos^2 \theta$ sedangkan a adalah vektor ciri yang bersesuaian (Basilevsky,

1983) sehingga $\theta = \cos^{-1} \left\{ \left(\lambda^{(s)} \right)^{1/2} \right\}$, adalah sudut terkecil antar vektor dari sub RV Q_L dan sub RV Q_M (Krzanowski, 1979).

Jika $r (r = 1, 2, \dots, k)$ adalah dimensi perbandingan maka $\lambda^{(s)}$ ($i = 1, 2, \dots, r$) adalah akar ciri terbesar ke-i matriks S dan a_i adalah vektor ciri yang bersesuaian. Selanjutnya jika $b_i = L'a_i \in Q_L$ maka b_1, b_2, \dots, b_r adalah vektor-vektor yang saling ortogonal di sub RV Q_L , sedangkan $M'Mb_1, M'Mb_2, \dots, M'Mb_r$ proyeksi ortogonal masing-masing di sub RV Q_M maka sudut antara pasangan vektor ke-i b_i dan $M'Mb_i$ adalah $\theta_i = \cos^{-1} \left\{ \left(\lambda^{(s)} \right)^{1/2} \right\} (i = 1, 2, \dots, r)$ akar ciri terbesar ke-i ($\lambda^{(s)}$) adalah kontribusi ukuran kemiripan pasangan vektor b_i dan $M'Mb_i$.

Kriteria kedekatan atau kemiripan antara dua sub ruang dengan r dimensi perbandingan adalah $V = \sum_{i=1}^r \cos^2 \theta_i = \sum_{i=1}^r \lambda^{(s)} = \text{tr}(S)$ Karena $0 < \lambda^{(s)} < 1$ maka $0 < \sum_{i=1}^r \lambda^{(s)} \leq r$. V_{relatif} adalah nilai relatif V terhadap maksimum ($V = r$) yaitu $V_{\text{relatif}} = \frac{V}{r} \times 100\%$.

Jika A dan B dicirikan oleh masing-masing k_1 dan k_2 KU ($k_1 \neq k_2$) maka ${}_{k_1}T_{k_2} = L'M$ adalah matriks dengan pangkat $T = k = \min(k_1, k_2)$ dan akan ada $|k_1 - k_2|$ akar ciri yang bernilai nol dari matriks ${}_{k_2}T'_{k_1}$ dan ${}_{k_1}T'_{k_2}$. Perbandingan A dan B selanjutnya didasarkan pada k akar ciri yang tidak sama dengan nol.

Bisektor c_i yaitu vektor yang berada di antara pasangan vektor b_i dan $M'Mb_i$ dan membagi sudut diantaranya c_i didefinisikan : $c_i = \left\{ \frac{1}{(1 + 3\lambda^{(s)})^{1/2}} \right\} (1 + M'M) b_i$. Himpunan bisektor $[c_1, c_2, \dots, c_r]$ akan membentuk sub RV yang terdekat terhadap kedua sub RV Q_L dan sub RV Q_M .

Perbandingan Untuk Lebih dari Dua Grup

Misalkan ada $g > 2$ grup contoh dengan masing-masing $n_t (t = 1, 2, \dots, g)$ individu yang diamati pada p peubah yang sama. AKU diambil masing-masing k KU untuk grup ke-t dan diperoleh matriks $L_t = [l_{ij}^{(t)}] (i = 1, 2, \dots, k; j = 1, 2, \dots, p; t = 1, 2, \dots, g)$. Vektor-vektor kolom matriks L_t akan merentang sub RV berdimensi k dari grup ke-t yaitu Q_{T_t} . Kriteria perbandingan diperoleh dengan membentuk sub RV Q_p berdimensi $r = 1, 2, \dots, k$ yang dekat terhadap semua sub RV Q_i yang dibandingkan.

Misal $d \in \mathbb{R}^p$ adalah sembarang vektor dari sub RV Q_p proyeksi ortogonal d ke sub RV Q_r yang direntang oleh KU dari grup ke-t adalah $L'_i L_i d$. Jika θ_i adalah sudut antara vektor d dengan $L'_i L_i d$ maka $\cos^2 \theta = d' L'_i L_i d$ sedangkan kriteria kedekatan vektor d terhadap semua sub RV adalah : $V = \sum \cos^2$
 $\theta_i = \sum_{i=1}^g d' L'_i L_i d = d' \sum_{i=1}^g L'_i L_i d$. Jika $H = \sum_{i=1}^g L'_i L_i$ maka $V = d' H d$.

Memaksimumkan jumlah kuadrat cosines (V) sama dengan maksimum bentuk kuadrat $d' H d$. Jika $\|d\| = 1$ maka maksimum $d' H d$ adalah sama dengan akar ciri terbesar dari matriks H yaitu $\lambda^{(H)}$, dan vektor d_i adalah vektor ciri yang bersesuaian dengan $\lambda^{(H)}$. Sudut antara vektor d_i Q_p dengan $L'_i L_i d_i$ Q_r yaitu vektor proyeksi d_i di sub ruang vektor Q_r adalah $\theta^{(i)} = \cos' \left\{ (d_i' L'_i L_i d_i)^{1/2} \right\}$
 Himpunan vektor-vektor ciri dari matriks H membentuk sub RV Q_p yang paling dekat dengan semua g sub RV.

Sudut antara vektor ciri d_i ($j = 1, 2, \dots, r$) yang bersesuaian dengan akar ciri terbesar ke- j dari matriks H ($\lambda^{(H)}$) dengan vektor proyeksinya di sub ruang ke-t Q_r $\theta^{(j)} = \cos' \left\{ (d_i' L'_i L_i d_i)^{1/2} \right\}$

Jika masing-masing grup diambil k_i KU maka pangkat matriks H $k = \min (k_1, k_2, \dots, k_g)$. Penyelesaian persamaan ciri matriks H akan diperoleh k akar ciri yang tidak sama dengan nol dengan demikian hanya k dimensi yang digunakan untuk membandingkan antar sub ruang.

Penerapan Analisis

Dalam kajian ini analisis sudut minimum antar sub RV digunakan untuk mempelajari dinamika biologis di Perairan Selatan Jawa sampai Sumbawa. Data yang digunakan merupakan hasil survey pada periode penelitian Maret - April 1990 (BPP Teknologi, 1990).

Dalam hal ini terdapat 29 stasiun pengamatan yang terbagi dalam empat lokasi survei yaitu :

1. Perairan selatan Selat Sunda
2. Perairan selatan Jawa Tengah
3. Perairan selatan Bali
4. Perairan selatan Sumbawa

Peubah yang diamati meliputi peubah fisika: suhu, salinitas dan densitas; kimia: O_2 , PO_4 , NO_3 dan SiO_3 dan biologi perairan: kandungan klorofil^a. Peubah fisika dan kimia perairan dipisahkan ke dalam dua lapisan yaitu lapisan permukaan dan lapisan termoklin.

Transformasi orthogonal dilakukan dengan AKU dengan menyelesaikan persamaan ciri matriks korelasi $R/ = \lambda/$ dari masing-masing perairan sehingga diperoleh KU yang merupakan kombinasi linear peubah teramati

$y_i = \sum a_{ij} x_j = a_i X$. Diperoleh empat akar ciri yang lebih besar dari satu untuk perairan I dan III sedangkan untuk perairan II dan IV hanya ada tiga akar ciri yang lebih dari satu. Chadfield & Collins (1980) menganggap kurang penting dan mengabaikan KU yang bersesuaian dengan akar ciri kurang dari satu. Untuk selanjutnya hanya diambil 3 KU pertama dan dianggap cukup representatif untuk menjelaskan keragaman data.

${}_{15}L'_3 = [\begin{matrix} / \\ / \\ / \end{matrix}]$ ($j = 1, 2, 3$) merupakan matriks dengan vektor kolom adalah vektor ciri yang bersesuaian dengan tiga akar ciri terbesar dari salah satu perairan dan sebagai landasan bagi sub RV berdimensi tiga yaitu Q_L . Sedangkan dari perairan lain diperoleh matriks ${}_{5}M'_3 = [m_j]$ dengan vektor m_j adalah landasan bagi sub RV Q_M yang akan digunakan untuk membandingkan kemiripan konfigurasi antara dua perairan.

Penyelesaian persamaan ciri matriks $S = LM'ML'$ akan menghasilkan akar ciri $\lambda^{(S)}$ dan vektor ciri a_i yang merupakan vektor satuan, ($i = 1, 2, \dots, r$) dimana r adalah dimensi perbandingan. Cosines sudut sebagai ukuran kemiripan konfigurasi untuk masing-masing dimensi perbandingan dua gugus data terdapat pada Tabel 1.

Pada dimensi perbandingan $r = 1$ menunjukkan bahwa sudut antara dua sub ruang relatif kecil yaitu berkisar $7^\circ - 14^\circ$ dan nilai kriteria kemiripan V dan $V_{relatif}$ yang besar yaitu $0.94 - 0.98$. Hal ini menunjukkan adanya kemiripan konfigurasi antar perairan dikarenakan sumber utama keragaman data dari KU pertama memiliki struktur dan dominasi peubah asal yang hampir sama.

Pada dimensi perbandingan $r=2$ terjadi penurunan nilai $V_{relatif}$ yaitu $0.48 - 0.67$. Menunjukkan kontribusi KU ke dua terhadap nilai $V_{relatif}$ kecil, ini juga ditunjukkan dari sudut minimum

Tabel 1. Kriteria Perbandingan antara Dua Sub Ruang Vektor

	Dimensi r	Sudut (°) antara vektor b_i dan $M^*M b_i$			$V = \sum_{i=1}^r \lambda_i$	$\frac{V_{relatif}}{r} \times 100\%$
Perairan I dan III	1	14.154			0.94021	94.02
	2	70.006	10.459		1.08397	54.20
	3	85.075	41.976	6.036	1.54899	51.63
Perairan I dan IV	1	12.450			0.95352	95.35
	2	77.933	8.7408		1.02062	51.03
	3	76.306	35.980	8.176	1.69069	56.35
Perairan II dan III	1	7.8230			0.98147	98.15
	2	52.984	6.7578		1.34861	67.43
	3	84.418	48.983	6.464	1.42751	47.58
Perairan II dan IV	1	10.472			0.96696	96.70
	2	81.648	7.0155		1.00618	50.31
	3	61.245	52.495	4.283	1.59655	53.22
Perairan III dan IV	1	11.698			0.95889	95.90
	2	78.572	10.737		1.00456	58.23
	3	81.751	69.908	7.487	1.12164	37.39

kedua yang relatif besar bahkan hampir tegak lurus yaitu berkisar $52^\circ - 90^\circ$. Hal ini dikarenakan sumber keragaman yang berbeda struktur dan dominasi peubahnya dari KU ke dua di masing-masing perairan.

KU ke tiga memiliki sumber keragaman yang berbeda struktur dan dominasi peubahnya, hal ini ditunjukkan dari sudut ke tiga yang besar dan hampir tegak lurus berkisar antara $61^\circ - 86^\circ$.

Hal yang menarik adalah pada dimensi perbandingan $r = 1$ dan 2 dimana perairan II Selatan Jawa dan III Selatan Bali memiliki kriteria kemiripan V dan $V_{relatif}$ terbesar. Kedua perairan tersebut terletak di Samudra Hindia sedangkan perairan I Selat Sunda dan IV Selatan Sumbawa adalah merupakan jalur keluarnya aliran massa air dari perairan Indonesia ke Samudra Hindia (Naulita, 1998).

Tabel 2. Bisektor untuk Perairan II (Selatan Jawa) & III (Selatan Bali)

Vektor	1	1	2	1	2	3
Klorofil	-0.14666	-0.15522	0.12971	-0.16288	-0.11419	0.08705
t_permukaan	0.29956	0.28545	0.33541	0.28463	-0.28668	0.21352
sl_permukaan	-0.13795	-0.14399	0.07496	-0.14694	-0.25618	-0.59282
T_permukaan	-0.30749	-0.29696	-0.25983	-0.29703	0.16705	-0.34896
O2_permukaan	0.29733	0.28378	0.27289	0.28299	-0.23813	0.15708
PO4_permukaan	-0.24065	-0.22029	-0.25888	-0.21951	0.36666	0.32479
NO3_permukaan	-0.25123	-0.23086	-0.42440	-0.22766	0.38161	-0.21166
SiO3_permukaan	-0.14710	-0.12819	-0.37211	-0.14061	0.42931	0.16099
t_termoklin	0.30797	0.32536	-0.29008	0.32471	0.27841	-0.08408
sl_termoklin	-0.26954	-0.27779	0.21956	-0.27790	-0.18308	0.15818
T_termoklin	-0.30542	-0.32305	0.30224	-0.32256	-0.28712	0.09780
O2_termoklin	0.27311	0.28977	-0.27825	0.28988	0.24941	-0.14127
PO4_termoklin	-0.26641	-0.26896	0.11000	-0.26621	0.02042	0.45298
NO3_termoklin	-0.25703	-0.27185	0.11279	-0.26656	-0.13491	-0.06522
SiO3_termoklin	-0.26776	-0.26292	0.10739	-0.26477	-0.12601	-0.04118

Tabel 2 komponen bisektor yang relatif kecil untuk dimensi perbandingan $r=1$ menunjukkan pembeda utama perairan Selatan Jawa dari perairan Selatan Bali disebabkan oleh keberadaan klorofil^a, salinitas permukaan dan ketersediaan silikat (SiO_3) di permukaan. Klorofil^a di Selatan Bali relatif lebih

tinggi ($0.212 \text{ mg/m}^3 > 0.207 \text{ mg/m}^3$) karena didukung oleh ketersediaan SiO_3 di permukaan yang lebih tinggi ($4.23 \mu\text{M} > 3.13 \mu\text{M}$) dan salinitas lebih rendah.

Sumber utama ke dua perbedaan terlihat dari vektor ke 2 bisektor dari dimensi perbandingan

r = 2 yaitu ketersediaan unsur hara NO₃, PO₄ dan SiO₃ di lapisan termoklin. Ketersediaan unsur-unsur hara dari lapisan termoklin di perairan Selatan Bali juga relatif lebih tinggi NO₃ (8.92 μM > 7.51 μM), PO₄ (0.99 μM > 0.75 μM) dan SiO₃ (14.34 μM > 13.94 μM).

Perbandingan dengan menggunakan empat gugus data secara simultan adalah dengan membentuk sub ruang vektor yang paling dekat terhadap ke-empat gugus data yaitu sub ruang vektor ciri dari mariks

$$H = \sum_{i=1}^4 L'_i L_i$$

Tabel 3. Sudut antara Sub RV Terdekat Q_b dengan Masing-masing Sub Ruang dan Jumlah Kuadrat Cosinus (V)

Perairan	Dimensi Perbandingan					
	1	2	3	1	2	3
Perairan I Selat Sunda	8.54	5.48	21.90	5.48	21.90	47.20
Perairan II Selatan Jawa	5.13	3.79	25.11	3.79	25.11	54.63
Perairan III Selat Bali	7.05	4.58	40.01	4.58	40.01	66.54
Perairan IV Selatan Sumbawa	7.12	4.61	45.00	4.61	45.00	30.20
$V = \sum_{i=1}^4 \cos^2 \theta_i = \sum_{i=1}^4 \lambda_i$	3.94	3.97	2.77	3.97	2.77	1.70

Sudut terkecil pada dimensi r=2 pada perairan I yaitu Selat Sunda artinya vektor ke dua bisektor r=2 lebih merepresentasikan perairan di Selat Sunda. Perbedaan perairan Selat Sunda dari lainnya dapat dijelaskan dari koefisien bisektor pada Tabel 4.

Tabel 3 menunjukkan hasil analisis yang mendukung analisis sebelumnya yaitu dengan dimensi perbandingan r=1 sudut minimum relatif kecil berkisar antara 5° - 8° artinya konfigurasi keempat perairan relatif sama. Hal ini dikarenakan sumber utama keragaman data dari KU pertama memiliki struktur dan dominasi peubah asal yang hampir sama. Dimensi perbandingan r = 2 dan r=3 menunjukkan sudut ke dua dan ke tiga yang relatif besar 21° - 45° dan 30° - 70° hal ini menunjukkan struktur dan dominasi yang berbeda dari KU ke dua dan ke tiga.

Keberadaan klorofil* di perairan Selat Sunda relatif tinggi dibandingkan tiga perairan lainnya meskipun ketersediaan unsur hara di permukaan relatif sama sedangkan ketersediaannya di lapisan termoklin relatif lebih rendah.

Tabel 4. Sub Ruang Vektor Q_b

Vektor	1	1	2	1	2	3
Klorofil	-0.14974	-0.16842	0.16623	-0.16842	0.16623	-0.08054
t_permukaan	0.30585	0.29253	-0.30469	0.29253	-0.30469	-0.01261
sl_permukaan	-0.14190	-0.15733	-0.26827	-0.15733	-0.26827	-0.21921
T_permukaan	-0.31327	-0.30358	0.19068	-0.30358	0.19068	-0.04110
O2_permukaan	0.29226	0.28402	-0.21831	0.28402	-0.21831	-0.02298
PO4_permukaan	-0.24707	-0.22229	0.27679	-0.22229	0.27679	0.35357
NO3_permukaan	-0.19689	-0.22013	0.46330	-0.22013	0.46330	-0.59214
SiO3_permukaan	-0.19878	-0.20043	0.27577	-0.20043	0.27577	0.39235
t_termoklin	0.30828	0.31334	0.28910	0.31334	0.28910	0.02638
sl_termoklin	-0.24173	-0.26768	-0.25977	-0.26768	-0.25977	-0.22790
T_termoklin	-0.30410	-0.31307	-0.31160	-0.31307	-0.31160	-0.05994
O2_termoklin	0.28159	0.28617	0.27440	0.28617	0.27440	-0.01468
PO4_termoklin	-0.27141	-0.25814	-0.14171	-0.25814	-0.14171	0.32569
NO3_termoklin	-0.25012	-0.25713	-0.06636	-0.25713	-0.06636	-0.22846
SiO3_termoklin	-0.28207	-0.26055	-0.09114	-0.26066	-0.09114	-0.31433

Kesimpulan

Sudut minimum antar sub ruang vektor merupakan metode alternatif untuk membandingkan antar gugus data peubah ganda dengan tidak melakukan pengujian hipotesis. Kriteria kemiripan antar gugus data digali dari kemiripan antar peubah yang direduksi dengan menggunakan analisis komponen utama.

Analisis dengan menggunakan peubah ganda menunjukkan sumber utama keragam-an keempat perairan yang diidentifikasi dari KU pertama hampir sama. Dua perairan yang relatif sama adalah perairan Selatan Jawa dan Selatan Bali. Perairan Selat Sunda memiliki karakteristik yang berbeda dibandingkan tiga perairan lainnya. Perbedaan teridentifikasi dari KU ke dua yaitu keberadaan klorofil^a yang relatif lebih tinggi meskipun ketersediaan unsur hara terutama di lapisan termoklin relatif lebih sedikit.

Ucapan Terima Kasih

Alhamdulillahirabilalamin. Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terimakasih kepada para pembimbing yaitu Yth. Dr.Ir.H. Amril Aman, MSc, Dr.Ir.Budi Susetyo,MSc dan Ir.H.Aji Hamim Wigena,MSc. Terimakasih juga penulis ucapkan kepada Ir.Ali Alkatiri (BPPTeknologi) dan Ir.Yuli Naulita,MSc (Ilmu Kelautan IPB) atas materi dan diskusinya selama penelitian.

Daftar Pustaka

Alkatiri, A. dan D. Hartoyo. 1997. Studi Sebaran Klorofil-a dalam Hubungannya dengan Faktor-faktor Fisika Kimia Oseanografi di Perairan Selatan Jawa dan Lombok pada Musim Tenggara. *Oceanica*. 3 : 95 - 100.

Anton, H. 1995. *Aljabar Linear Elementer*. Ed. ke-5. Terjemahan Pentur Silababan dan I Nyoman Susila. Penerbit Erlangga, Jakarta.

BPP Teknologi. 1990. *Laporan Survei Potensi Perikanan dan Oseanografi 5 Maret - 2 April 1990*. BPP Teknologi Proyek Pengelolaan KR Baruna Jaya I, II, III. Jakarta (tidak dipublikasikan)

Basilevski, A. 1983. *Applied Matrix Algebra in the Statistical Sciences*. Ed ke-1. Elsevier Science Publishing, New York

Chatfield, C. and A.J. Collins. 1980. *Introduction to Multivariate Analysis*. Chapman and Hall. London.

Digby, P.G.N. and R.A. Kempton. 1994. *Multivariate Analysis of Ecological Communities*. Ed ke-1. Chapman & Hal, New York.

Ismunarti, D.H. 1999. *Penerapan Metode Sudut Minimum Antar Sub Ruang Vektor untuk Membandingkan Produktifitas Dasar Perairan*. Tesis pada Program Pasca Sarjana IPB, Bogor (tidak dipublikasikan).

Krzanowski, W. J. 1979. Between Groups of Principal Components. *Journal of American Statistical Association*, 74, 365 : 703 -707

Miao, J and A. Ben-Israel. 1992. On Principal Angles between Subspaces in \mathbb{R}^n . *Linear Algebra and Its Applications*, 171 : 81-98.

Naulita, Y. 1998. *Karakteristik Massa Air pada Perairan Lintasan Arlindo*. Tesis. Program Pascasarjana IPB, Bogor (tidak dipublikasikan).