INVENTORY SYSTEM (Q,R) WITH CRASHING LEAD TIME CONDITION

Hadi Sumadibrata, Ismail Bin Mohd
Department of Industrian Engginering, Islamic University of Bandung Indonesia
Department of Mathematics, Universiti Malaysia Terengganu, 21030 Kuala Terengganu, Malaysia.
brata_sum@yahoo.com, ismailmd@umt.edu.my

Abstrak

Performansi perusahaan dapat ditingkatkan dengan mengontrol sistem inventorinya secara tepat. Tulisan ini menjelaskan salah satu model inventori probabilistik kontinyu untuk memecahkan masalah inventori yaitu model Q. Kondisi back order dan creasing lead time diperbolehkan di model ini. Back order merupakan suatu kondisi dimana terjadi kekurangan barang karena permintaan yang tidak diekspektasi pada periode lead time. Tujuan model ini adalah meminimasi biaya inventori dengan menemukan jumlah order optimal, reorder point dan level safety stock. Dan permintaan diasumsikan mengikuti distribusi normal dan model ini dihitung menggunakan Delphi. Simulasi model ini menunjukkan bahwa biaya inventori dipengaruhi oleh beberapa variable seperti reorder point, safety stock, level jasa,dan creasing lead time.
Kata Kunci: Model inventory (Q,r), Crashing Lead time, kebijakan back order.

Abstract

Performance of the companies can be improved by controlling their inventory system properly. This paper explains one of continues probabilistic inventory model to solving inventory problem, that is called Q model. Condition of back order and creasing lead time are allowed in this model. Back order is the condition when lacking of goods happened because of unexpected demand at lead time period. The objective of this model is to minimizing inventory cost by founding the optimal of quantity order, reorder point and level of safety stock. And also, demand is assumed following normal distribution and this model will compute by using Delphi. Simulation of this model shows that inventory cost is affected by several variables, such as, reorder point, safety stock, service level and creasing lead time.
Key Word*: (Q,r) inventory model, Crashing Lead time, Back order policy*

PENDAHULUAN

Inventory merupakan salah satu komponen yang mempunyai peranan penting dalam suatu perusahaan, karena komponen ini akan berdampak langsung terhadap kondisi pendapatan perusahaan. Hal ini menyebabkan inventory menjadi salah satu topik yang banyak diperbincangkan dan dilakukan pengembangan. Forgart, Blackstone, Hoffmann (1991) berpendapat bahwa "*Inventory includes all those goods and material that are used in the production and distribution processes raw material, component parts, subassemblies, and finished products as are the various supplies required in the production and distribution process*" sedangkan Smith, B.Spencer (1989) mengatakan bahwa "*Inventory control is the activities and techniques of maintaining the stock of items at desired levels, whether they be raw material, work in process, or finished products*".

Ketika permintaan bersifat probabilistic, akan susah dalam memprediksi permintaan produk. Jika *quantity demand* membesar maka kemungkinan terjadinya stock out dapat terjadi, namun jika demand lebih kecil dari pada perkiranaan maka pengisian inventory akan datang terlambat dari pada yang direncanakan dan akan tersimpan dalam persediaan. Salah satu model inventory yang dapat digunakan untuk mengatasi demand yang bersifat probabilistic adalah

(Q,r) inventory model. Pengembangan model ini dilakuakn sejak Herron (1967), Burgin TA (1972), Namias dan Wang (1979), Federgruen dan Zheng's (1992), Moinzadeh dan Namias (1988), Silver et al (1998), Kalmit dan Chen (1999).

Dalam managemen persediaan, *lead time demand* menjadi hal yang cukup penting pada saat demand bersifat probabilistic. Distribusi dari statistik digunakan untuk memperlihatkan karakteristik demand pada saat *lead time*. Saat ini telah banyak metode yang ditampilkan untuk penyelesaiannya, seperti Das (1972) dan Kal Namit dan Jim Chen (1996) menemukan bahwa demand pada saat lead time merupakan berdistribusi gamma, kemudian Kal Namit dan Jim Chen (1996)membuat algoritma untuk demand pada saat lead time yang berdistribusi gamma. Namun bila demand memiliki rata-rata quantity yang besar, maka Kal Namit dan Jim Chen (1996)menyarankan menggunakan distribusi normal sebagai asumsi.

Dalam kondisi dimana demand pertama dijadwalkan berdasarkan perjanjian sebelumnya dan demand selanjutnya dijadwalkan sebelum permintaan yang tidak terduga, maka demand dalam satu periode akan berflukatasi dan sulit diprediksi atau dapat dikatakan sebagai stockastic demand. Effek dari kondisi tersebut adalah terjadinya *stockout*. Biasanya perusahaan memberikan toleransi untuk *safety stock* sekitar 2-10% dalam membeli material, yang berdampak pada meningkatnya biaya inventory.

Pada saat biaya stock out dikategorikan sebagai biaya yang spesifik untuk setiap kesempatan *stock out*, maka Silver dan Peterson (1985) mempertimbangkan jenis biaya *stockout* untuk menampilkan fungsi biaya total dan memberikan aturan keputusan untuk item yang memiliki pergerakan cepat. Tujuan dari tulisan ini adalah menentukan nilai optimum dari reorder point (*r)*, jumlah pemesanan (*Q*) dan safety stock (ss) menggunakan (Q,r) inventory model. Selain itu diasumsikan deman pada saat lead time memiliki distribusi normal dan terjadi *crashing* terhadap lead time.

TINJAUAN PUSTAKA

Asumsi

(1) *Quantity order* (Q) setiap kali pemesanan adalah tetap.
(2) Pengisian kembali material atau waktu pemesanan dilakukan ketika posis *inventory* berada pada titik pemesanan kembali (*reorder point*)
(3) Kondisi kekurangan diperbolehkan dengan melaksanakan kebijakan *back order*.
(4) Pengisian kembali dilakukan kapanpun level *inventory* jatuh ke titik *reorder* (*r*). *Reorder point* (*r*) = ekspektasi demand pada saat lead time + *safety stock* (*ss*), dimana *ss* = *safety level* (*k*) x standar deviasi dari demand pada saat lead time. Sehingga dapat dituliskan r = $D_L + k.S\sqrt{L}$.
(5) Biaya *crashing* terjadi karena terjadi *crashing* durasi normal dan minimum pada proses pengiriman dari pemasok ke perusahaan
(6) Waktu ancang-ancang kedatangan (*L*) m item bahan baku tidak tergantung satu sama lain (*mutually independent*). *Lead time* masing-masing bahan baku terdiri dari tiga komponen, dimana komponen *lead time* (waktu proses pemasok) mempunyai durasi minimum a_i, durasi normal b_i, dan biaya *crashing* per unit waktu $c_i \rightarrow j = 1,2,...n$, merupakan banyaknya komponen *lead time*.

Model notation

A : Biaya Pemesanan ($)
Q : *Quantity* pemesanan (unit)
H : Biaya simpan ($)
r : *reorder point*
σ :Standar deviasi demand (unit/week)
Z_a : Nilai Z atau k pada distribusi normal standar untuk tingkat a
ss : *safety stock*
D : Demand per tahun
D_L : Ekspektasi demand saat lead time
$\sigma\sqrt{L}$: Standar deviasi demand saat *lead time* (unit/week)
$f(x)$: *Probability density function* (pdf)
N : Ekspektasi kekurangan produk

π : Biaya kekurangan produk ($/unit)

a_j : Durasi minimum komponen lead time waktu proses pemasok item i

b_j : Durasi normal komponen lead time waktu proses pemasok item i

c_j : Ongkos creasing per unit waktu komponen lead time waktu proses item i

Inventory Model

Tujuan utama dari model penelitian ini adalah minimasi ekspektasi biaya per tahun, yang terdiri dari biaya pemesanan, biaya penyimpanan, biaya kekurangan, dan biaya crashing. Untuk mengatasi terjadinya *stockout*, maka menggunakan kebijakan *back order* dimana demand pada saat *lead time* diasumsikan mengikuti distribusi normal. Optimal variable untuk mencapai tujuan dari model ini adalah *quanyity order* (*Q*), *reorder point* (*r*), dan *service level* (*k*). Penentuan *service level* bertujuan untuk mendapatkan nilai *safety stock* yang optimal sehingga dapat mempengaruhi model dalam meminimasi total biaya. Nilai variable keputusan yang optimum didapat dari hasil turunan pertama terhadap masing-masing variable.

Dalam paper ini kekurangan produk (*stock out*) diperbolehkan, dan demand produk diasumsikan mengikuti distribusi normal dengan standar deviasi pada saat *lead time* adalah $\sigma\sqrt{L}$ dan *reorder point* dituliskan sebagai $r = D_L + k.S\sqrt{L}$, dimana k adalah *safety factor*. *Density function* ($\phi(k)$) untuk distribusi normal dituliskan sebagai $\frac{1}{\sqrt{2\Pi}} e^{-1/2x^2}$.

Ekspektasi dari kekurangan produk (*stokout*) dihitung berdasarkan *stockout* per siklus dan *stock out* per unit, sehingga dapat ditulis dengan $O_k = N.L.\pi$. Kekurangan persediaan terjadi ketika jumlah permintaan selama *lead time* (*X*) lebih besar dari tingkat persediaan pada saat pemesanan dilakukan (*r*), pada batas *X* = *r* sampai $x=\infty$ [6][4]. Sehingga ekspektasi kekurangan per siklus dinyatakan dengan

$$N = E(X-r) = \int_r^\infty (X-r).\,f(x)\,dx \qquad (1)$$

Dengan cara mensubtitusikan $r = D_L + k.\sigma\sqrt{L}$ kedalam suatu persamaan (1) maka didapat

$$E(X-r) = \int_r^\infty (X-(D_L + k\sigma\sqrt{L}))\,f(x)dx$$

$$= \sigma\sqrt{L}\int_{D_L+k\sigma\sqrt{L}}^\infty \left(\frac{(X-D_L)}{\sigma\sqrt{L}} - k\right) f(x)dx \qquad (2)$$

Kita asumsikan sebuah peubah acak *X* berdistribusi normal

$X \sim N(DL, \sigma^2 L)$ Dan

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{L}\sqrt{2\Pi}} e^{-1/2\left(\frac{(X-D_L)}{\sigma\sqrt{L}}\right)^2}$$

Maka persamaan (3) dapat kita tuliskan sebagai berikut:

$$E(X-r) = \sigma^2 L\int_k^\infty (z-k)\,f(z)dz \qquad (3)$$

Dimana:

$$f(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{L}\ \sqrt{2\Pi}} e^{-1/2z^2} \qquad (4)$$

$$\int_{-\infty}^k f(z)dz = \Phi(k) \qquad (5)$$

Subtitusi persamaan (9) dan (10) ke persamaan (8), sehingga kita dapat:

$$E(X-r) = \sigma^2 L\int_k^\infty (z-k)\,f(z)dz$$

$$= \sigma\sqrt{L}\int_k^\infty z\ f(z)\,dz\ - k\big(1-\Phi(k)\big) \qquad (6)$$

Bila kita tuliskan

$$[\phi(k) - k(1-\Phi(k))] = G_u\,(k) \qquad (7)$$

Selesaikan persamaan (11) dapat kita tulis :

$$E(X-r) = \sigma\sqrt{L}\int_r^\infty (X-r)\,f(x)dx = \sigma\sqrt{L}[\phi(k) - k(1-\Phi(k))] = \sigma\sqrt{L}\,G_u\,(k) \qquad (8)$$

ϕ adalah *standard normal density* and Φ adalah *cumulative normal density*. Ekspektasi ongkos kekurangan tahuanan

(O_k) untuk i material dapat dituliskan sebagai berikut:

$$O_k = \pi_i \cdot \frac{D_i}{Q_i} . N_i = \frac{\pi_i D_i}{Q_i} \sigma_i \sqrt{L}\, G_u(k_i) \quad (9)$$

Ongkos *crashing* adalah biaya per unit waktu yang dikeluarkan untuk mempercepat lead time kedatangan pesanan secara signifikan [5]. Diasumsikan bahwa *lead time L* memiliki sejumlah n komponen yang independent. Komponen memiliki durasi minimum a_i ,durasi normal b_i, dan biaya *crashing* per unit waktu adalah c_i. Jika kita tuliskan $L_0 = \sum_{h=1}^{n} b_h$ dan L_j adalah *lead time* masing-masing item bahan baku yang dicrash dari durasi minimum waktu proses komponen 1, 2,…, n. kemudian L_i dapat dituliskan sebagi berikut

$$L_j = \sum_{h=1}^{n} b_h - \sum_{h=1}^{i} (b_h - a_h), \qquad j, h = 1,2,...,n; \quad (10)$$

Sehingga ekspektasi biaya crashing lead time per siklus untuk $L \in [L_i, L_{i-1}]$ adalah:

$$R(L) = \left(c_j (L_{j-1} - L) + \sum_{h=1}^{j-1} c_h (b_h - a_h) \right) \quad (11)$$

dimana :

n : jumlah komponen lead time kedatangan pesanan bahan baku

j,h : indeks banyaknya komponen lead time = 1,2,..n

Sebelum dilakukan crashing L= L_o= 56 hari. Bila komponen lead time 1 dicrash, maka $L = L_0 - (b_1 - a_1)$ dan ongkos crashing $R(L) = c_1 (L_0 - L_1)$. Bila komponen lead time 1 dan 2 dicrash, maka $L = L_0 - (b_1 - a_1) - (b_2 - a_2)$ dan ongkos crashing adalah $R(L) = c_2 (L_1 - L_2) + c_1 (b_1 - a_1)$. Bila komponen lead time 1,2,dan 3 yang di*crash* maka $L = L_0 - (b_1 - a_1) - (b_2 - a_2) - (b_3 - a_3)$ dan ongkos crashing adalah $R(L) = c_2 (L_1 - L_2) + c_2 (b_2 - a_2) + c_1 (b_1 - a_1)$.

Hasil selengkapnya dapat dilihat pada table 1.

Table 1 Data Lead Time

Lead time Comp i	*Normal Duration a_i (hari)*	*Minimum Duration b_i (hari)*	*Unit Crashing Cost c_j (hari)*	$R(L_i)$
1	20	6	0,4	5,6 $
2	20	6	1,2	22,4 $
3	16	9	5,0	57,4 $
n = 3	$L_n = 56$	21		

Sehingga total biaya inventory per unit dalam satu siklus dapat dituliskan sebagai berikut:

K(Q,r) = Biaya pesan + Biaya Simpan + Biaya Back Order + Biaya Crash Lead time

$$K(Q,r) = A\frac{D}{Q} + H\left[\frac{Q}{2} + (r - D.Li)\right] + \frac{\pi D}{Q} \sigma \sqrt{L}\, G_u(k) + R(Li)\frac{D}{Q} \quad (12)$$

Tahap selanjutnya adalah dengan mencari nilai jumlah pemesanan yang optium dengan melakukan turunan pertama terhadap fungsi total cost terhadap Q, sehingga dapat dituliskan:

$$\frac{dK(Q,r)}{dQ} = -\frac{AD}{Q^2} + \frac{H}{2} - \frac{\pi D \sigma \sqrt{L}\, G_u(k)}{Q^2} - \frac{R(Li) D}{Q^2}$$

$$= -AD + \frac{Q^2 H}{2} - \pi D \sigma \sqrt{L}\, G_u(k) - R(Li) D$$

Sehingga variable keputusan Q dapat dituliskan

$$Q = \sqrt{\frac{2D\{A + \pi \sigma \sqrt{L}\, G_u(k) + R(Li)\}}{H}} \quad (13)$$

Kita dapat mencari probablitas terjadinya *stockout* dengan melakukan turunan pertama fungsi total cost (28) terhadap k,Sehingga nilai variable optimal dari k dapat dituliskan:

$$\frac{dK(Q,r,L)}{dk} = 0 \quad p_{u\geq}(k) = \frac{HQ}{\pi D} \qquad (14)$$

Model inventory ini dapat diselesaikan dengan metode iterasi, dengan mengikuti tahapan-tahapan sebagai berikut:

Step 1

Menentukan nilai lead time sebelum melakukan perhitungan variable optimal.

Perhitungan lead time dapat menggunakan persamaan (10).

Setelah mentukan nilai lead time, maka langkah selanjutnya adalah mengikuti algoritma ini

i. Untuk nilai awal maka menggunakan k=0, sehingga dengan persamaan (7) didapat $G_u(k) = 0{,}3989$

ii. Subtitusi nilai k dan $G_u(k)$ ke persamaan (13) untuk menghitung Q

iii. Hitung $P_Z(k)$ dengan melakukan subtitusi nilai Q ke persamaan (14)

iv. Cari nilai K_{i2} dari distribusi normal dengan mensubtitusikan nilai $P_Z(k)$ dari langkah 3, kemudian lakukan perhitungan $G_u(k_{i2})$ dengan menggunakan persamaan (7).

v. Ulangi step ii-iv sampai syarat $\Delta P_Z(k) < 0{,}0001$, sehingga secara otomatis didapatkan nilai optimum untuk Q_i* dan k_i*.

Step 2.

Lakukan perhitungan **:** $r* = D_L + k*\sigma\sqrt{L}$

Step 3.

Lakukan perhitungan total biaya inventory dengan input variable optimum (Q*,k*,r*) dengan persamaan (12).

HASIL PENELITIAN

Untuk lebih mendekatkan model ini ke dalam kondisi sebenarnya, maka pada sesi ini akan ditampilkan contoh aplikasi model dan pembahasannya.

Contoh Kasus

Sebuah perusahaan yang bergerak dalam industri sepatu akan melakukan order material. Permintaan terhadap produk (D) adalah 600 Unit / years. Standar deviasi permintaan produk (σ) adalah 7 Unit/week. Biaya pemesanan (A) adalah 200 \$/order. Biaya simpan produk (H) adalah 20 \$/Unit/years dan biaya kekurangan produk (π) sebesar 150 \$/unit. Data mengenai *lead time* terdapat pada table 1.Dengan menggunakan algoritma yang telah dibuat, hasil perhitungan ditampilkan pada table 2:

Table 2. Hasil Simulasi Contoh Kasus

L	Q	r	ss	k	N	Cost total
8	117.298	138.450	38.450	1.914	0.195	3114.975
6	125.112	107.820	32.820	1.914	0.181	3158.645
4	137.349	76.2239	26.223	1.873	0.165	3271.462
3	154.283	59.5811	22.081	1.821	0.163	3527.296

Pembahasan Contoh Kasus

Dalam *paper* ini ditampilkan model inventory untuk meminimasi total biaya inventory. Variable keputusan dari model ini adalah jumlah *Quantity order* (*Q*), *Rorder point* (*r*) dan *Safety stock* (*ss*). Penyelesaian dari contoh kasus yang diberikan, dapat dilakukan dengan mengikuti algorithm yang diberikan. Perhitungan *lead time* dilakukan pertama karena nilai tersebut sangat dibutuhkan untuk menghitung biaya simpan, biaya *stockout*, dan biaya *crashing* itu sendiri. Pada tahap satu bertujuan untuk mendapatkan nilai optimum dari *quantity order* (*Q*) dan *service level* (*k*). Dengan memberikan nilai awal *k* =0, dengan menggunakan persamaan(7) maka didapat nilai 0,398 yang kemudian kedua nilai tersebut (*k* dan 0,398) menjadi imput untuk mencari *Q* dengan persamaan (13). Setelah mendapatkan nilai *Q*, subtitusikan nilai tersebut ke persamaan (14) untuk mendaptkan nilai peluang produk stockout atau yang harus di lakukan *backorder* ($P_Z(k)$). Langkah selanjutnya adalah mencari nilai *service level* (k) berdasarkan nilai $P_Z(k)$ yang didapat. Pencarian nilai *service level* (k) dalam penelitian ini menggunakan bantuan Delphi. Setelah mendapatkan nilai k yang baru, maka masukan nilai tersebut ke persamaan (7) dan lakukan hal yang sama hinga memenuhi syarat $\Delta P_Z(k) < 0{,}0001$. Setelah mendapatkan *Q** dan *k** maka lakuakn perhitungan *reorder point*

$r^* = D_L + k^* \sigma \sqrt{L}$ dan total biaya dengan persamaan (12).

Kesimpulan Contoh Kasus

Model diatas disimulasikan dengan menggunakan nilai *lead time* yang berbeda-beda yaitu 8,6,4,dan 3 minggu, hal ini dilakukan untuk memperlihatkan pengaruh *lead time* terhadap variable keputusan lainnya. Nilai *lead time* 8 menandakan bahwa tidak terjadi *crashing* terhadap *leat time*, sedangakan nilai 6,4 dan 3 menandakan terjadi *crashing* terhadap *lead time*. Besarnya nilai *crashing* akan mempengaruhi secara langsung terhadap total biaya *inventory* .Nilai *safety level* (*k*), *reorder point* (*r*), dan *safety stock* (*ss*) terendah terjadi pada saat lead time bernilai 3 dan terbesar pada saat lead time bernilai 8, hal ini menandakan terdapat hubungan antara *k* dengan variable *r* dan *ss*. *Safety stock* akan meningkat seiring dengan peningkatan nilai *rorder point* dan *service level* [9], pernyataan ini sesuai dengan hasil yang ditampilkan pada table 2.

KESIMPULAN DAN SARAN

Dalam artikel ini menampilkan penggunaan model inventory (Q,r) yang bertujuan untuk menentukan nilai optimum dari variable *reorder point*, *service level* dan *quantity order*. Nilai optimum dari variable yang didapat kemudian dijadikan input untuk menentukan total biaya inventory. Selain itu, dalam article ini demand disumsikan mengikuti distribusi normal dan dilakukan kebijakan crash terhadap lad time untuk mempercepat kedatangan produk. Crash terhadap lead time dilakukan dengan nilai yang berbeda, hal memperlihatkan effect dari kebijakan crashing terhadap biaya inventory. Dalam article ini ditampilkan algorithm untuk penyelesaian atau perhitungan model ini. Penggunaan software Delphi, digunakan sebagai alat bantu untuk mempermudah penyelesaian dari model ini.

DAFTAR PUSTAKA

1. Burgin, T.A.and Wild,A.R. *Stok control-experience and usable theory*, Operational Research Quartery, Vol.18No.1,pp.35-32. 1967.
2. Das, C. *Approximation solution to the (Q,r) inventory model for gamma lead-time demand* ,Management Science, Vol.22 No 9,pp.1043-47. 1972.
3. Fogarty, Blackstone, Hoffmann, *Production and Inventory Management*, Cincinnati, South-Western Publishing Co.Ohio. 1991
4. Herron, D.P., *Inventory Management for minimum cost*. Management Science 14,219-235, 1967
5. Kal Namit. And Jim Chen. *Solution to the (Q,r) inventory model for gamma lead-time demand* .Internasional Journal of Physical Distribution & Logistic Management, Vol 29 Np 2,199,pp138-151. 1996.
6. Kun-Shan,WU. Q,r) *Inventory Model With Variable Lead Time When Thr Amount Received is Uncertain*. Information and Management Science, Vol 11, No 3, pp.81-94,2000.
7. Moinzedeh, K., Nahmias, S, *A continuous for an inventory system with two supply mode*s. Science 34, 761-773, 1988.
8. Nahmias, S., Wang, S.S., *A Heuristic lot size reorder point model for decaying inventories*. Management Science 25, 90-97, 1979
9. Nigel Slack.,Stuart Chambers., Robert Johnston.,Alan Betts., *Operations and Process Managemen*t. 2006.
10. Richard j. Teresine, *Principles of Inventory And Materails Management*, Prentice Hall International, Inc,1994
11. Silver,E.A.,D.F.Pyke, and R. Peterson. *Decision Sistem For Inventory Management and Production Planning*, Second edition, Wiley, New York. 1985
12. Smith, B. Spencer, *Computer-Based Production and Inventory Control*, Prentice Hall International, Inc, 1989
13. Yen (1996), Moinzadeh dan Namias (1988), Johansen dan Thorstenson (1998), Silver et al (1998) , Kalmit dan Chen (1999), Wu dan Ouyang (2001).