APLIKASI SEMIGRUP OPERATOR LINEAR PADA PENYESELESAIAN MASALAH CAUCHY ABSTRAK DEGENERATE HOMOGEN

Susilo Hariyanto
Departemen Matematika FSM Universitas Diponegoro Semarang
Jl.Prof. H.Soedarto,SH, Tembalang, Semarang
sus2_hariyanto@yahoo.co.id

Abstract. In this article, we will investigate how to apply the linear operator semigroup to solve the abstract degenerate Cauchy problem. The problem is treated under the assumption that the Hilbert space of the system can be written as a direct sum of the kernel of *M* (*KerM*) and the range of adjoint*M* (*RanM**). By certain assumptions this problem can be reduced into nondegenerate Cauchy problem. By assumptions the operator A is a infinitesimal generator, the canonic problem has a unique solution. And then by using the particular operator, any solution of nondegenerate problem can be mapped to the solution of degenerate Cauchy problem.

Keywords : infinitesimal generator, abstract degenerate Cauchy problem, abstract nondegenerate Cauchy problem, homogeny Cauchy problem, and linear operator semigroup.

1. PENDAHULUAN

Diperhatikan masalah Cauchy abstrak *degenerate*:

$$\frac{d}{dt}Mz(t) = Az(t), \quad z(0) = z_0 \qquad (1.1)$$

Masalah Cauchy abstrak (1.1) dalam kasus dimensi berhingga telah dibahas secara lengkap beserta contoh dan aplikasinya dalam persamaan Dirach oleh Dai, L di [1]. Dalam kasus dimensi berhingga di [1], masalah Cauchy dapat diselesaikan dan dipahami secara lengkap, karena dimungkinkan membawa matriks *M* dan *A* dalam (1.1) secara bersama-sama ke bentuk normal yang mempunyai penyelesaian tunggal untuk setiap nilai awal yang diberikan. Sedangkan dalam kasus dimensi takhingga diantaranya dibicarakan oleh Carrol dan Showalter dalam papernya [2] pada tahun 1976.

Masalah Cauchy pada ruang Banach juga telah dibahas oleh Favini pada beberapa papernya. Tahun 1979, Favini di [3] dengan menggunakan tranformasi Laplace menyelesaikan masalah Cauchy abstrak *degenerate* tipe parabolis di ruang Banach dalam kasus linear. Di paper [4] masalah Cauchy *degenerate* diselesaikan oleh Favini dengan menggunakan asumsi-asumsi tertentu, sehingga sistem ruang Banach dapat dinyatakan dalam jumlah langsung dari subruang-subruang tertentu. Syarat suatu sistem terkendali oleh Favini di [5]. Di [6,7,8], Favini membicarakan tentang berbagai tipe masalah Cauchy abstrak parabolis. Pada [9], Favini membahas sifat-sifat istimewa dari penyelesaian-penyelesaian regular. Hernandez (2005), pada [10] menyelesaikan masalah Cauchy abstrak *degenerate* orde dua.

Di paper [3] masalah Cauchy *degenerate* diselesaikan oleh Favini dengan menggunakan asumsi-asumsi tertentu, sehingga sistem ruang Banach dapat dinyatakan dalam jumlah langsung dari subruang-subruang tertentu. Dengan menggunakan asumsi-asumsi tertentu penyelesaian masalah Cauchy abstrak *degenerate* dalam ruang Hilbert melalui penyelesaian masalah Cauchy abstrak *nondegenerate* telah dibahas oleh Thaller (1996). Dalam pembahasannya [11], Thaller mengasumsikan operator *A* dan operator *M* masing-masing merupakan operator linear tertutup yang terdefinisi dense. Pada [12], Thaller lebih lanjut membahas aproksimasi dari masalah Cauchy abstrak *degenerate*.

Dengan memperhatikan konstruksi dan metode penyelesaian Masalah Cauchy Abstrak (1.1), serta hasil-hasil penelitian lain yang mendukung, maka diusulkan suatu penyelesaian masalah Cauchy abstrak *degenerate* (1.1) sebagai berikut:

$$\frac{d}{dt}Mz(t) = Az(t), \quad z(0) = z_0 \qquad (1.2)$$

dengan A dan M merupakan operator linear tertutup dan terbatas yang terdefinisi secara *dense* pada ruang Hilbert H ke ruang Hilbert W.

2. PEMBAHASAN

2.1 Masalah Cauchy Nondegenerate

Diberikan H dan W masing-masing merupakan ruang Hilbert atas lapangan K himpunan bilangan kompleks. Diberikan operator-operator linear

$$M: D(M) \subset H \to W \quad \text{dan} \quad A: D(A) \subset H \to W.$$

Diperhatikan masalah Cauchy abstrak homogen,

$$\frac{d}{dt}Mz(t) = Az(t), \qquad z(0) = z_0 \qquad (2.1)$$

dengan operator M tidak harus mempunyai invers. Masalah Cauchy abstrak disebut *degenerate* jika M tidak mempunyai invers. Penyelesaian masalah (2.1) didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.1 *Penyelesaian strict dari masalah Cauchy abstrak (2.1) adalah fungsi kontinu $z:[0,\infty) \to H$ sehingga $z(t) \in D(A) \cap D(M)$ untuk semua $t \geq 0$, $Mz(t)$ mempunyai turunan yang kontinu dan memenuhi Persamaan (2.1).*

Berdasarkan definisi penyelesaian MCA *degenerate* homogen pada Definisi 2.1 dapat disimpulkan bahwa setiap $z(t)$ penyelesaian *strict* MCA *degenerate* pasti memenuhi $z(t) \in D_A$ untuk semua $t \geq 0$, dengan

$$D_A = \{ z(t) \in D(A) |\, Az(t) \in \overline{Ran\, M} \}. \quad (2.2)$$

Oleh karena itu $0 \in \overline{Ran\, M}$ maka $Ker\, A \subset D_A$. Selanjutnya dapat dibuktikan bahwa himpunan $D_A \subset D(A) \subset H$ merupakan ruang bagian di ruang Hilbert H.

Teorema 2.2 *Himpunan D_A merupakan ruang bagian di dalam ruang Hilbert* H.

Dengan memperhatikan definisi penyelesaian MCA *degenerate* (2.1), maka dalam menyelesaikan masalah ini dengan metode faktorisasi diberikan asumsi-asumsi berdasarkan [11] sebagai berikut:

Asumsi 2.3 *Operator A, M tertutup dan terbatas yang terdefinisi dense.*

Asumsi 2.4 *Himpunan $PD_A \subset D(A)$ dan $(QAP)|PD_A$ mempunyai invers yang terbatas.*

Oleh karena diasumsikan M operator tertutup, maka *Ker M* merupakan ruang bagian tertutup dari H. Selanjutnya, jika dimisalkan P proyeksi ortogonal pada *Ker M*, maka $P^T = 1 - P$ juga merupakan proyeksi ortogonal pada $(Ker\, M)^{\perp}$, yaitu ruang yang orthogonal terhadap *Ker M* .

Himpunan $(Ker\, M)^{\perp}$ merupakan ruang bagian tertutup. Jadi, dapat dituliskan bahwa

$$PH = Ker\, M, \quad P^T H = \overline{(Ran\, M^*)} \qquad (2.3)$$

Dengan demikian ruang Hlibert H terdekomposisi dalam ruang bagian tertutup *Ker M* dan $(Ker\, M)^{\perp}$. Ruang Hilbert H dapat dinyatakan sebagai

$$H = KerM \oplus KerM^{\perp} = PH \oplus P^T H. \quad (2.4)$$

Operator M dari ruang Hilbert H ke ruang Hilbert W tertutup dan terdefinisi secara dense, maka M^* merupakan operator dari W ke H tertutup dan terdefinisi dense. Hal ini berakibat ruang Hilbert terdekomposisi menjadi ruang bagian $Ker\, M^*$ dan $(Ker\, M^*)^{\perp}$. Jadi, dapat dituliskan bahwa

$$QW = Ker\, M^* \text{ dan } Q^T W = \overline{(Ran\, M)}. \quad (2.5)$$

Untuk selanjutnya misalkan pula Q proyeksi ortogonal pada $Ker\, M^*$, akibatnya $Q^T = 1 - Q$ juga merupakan proyeksi ortogonal pada $(Ker\, M^*)^{\perp}$. Dengan demikian ruang Hilbert W dapat dituliskan

$$W = KerM^* \oplus (KerM^*)^{\perp} = QH \oplus Q^T H.$$
(2.6)

Lemma 2.5 *Dengan Asumsi 2.3 operator* $A|_{D_A}$ *merupakan operator tertutup.*

Bukti:

Jika $\{z_n\}$ merupakan barisan yang termuat di $D_A \subset D(A)$ sehingga $u = \lim z_n$ dan $v = \lim Az_n$ keduanya ada, maka $u \in D(A)$ dan $Au = v$. Akan tetapi untuk setiap Az_n termuat di dalam himpunan tertutup $\overline{Ran\,M}$, sehingga limit v juga termuat di dalam himpunan $\overline{Ran\,M}$. Dengan demikian u anggota D_A. ■

Selanjutnya untuk mereduksi masalah (2.1) ke bentuk *nondegenerate* dilakukan dengan cara membatasi domain operator M ke suatu domain yang lebih sempit, sedemikian hingga operator M pada domain tertentu mempunyai invers. Operator M injektif jika dan hanya jika $Ker\ M = \{0\}$. Oleh karena itu agar dimungkinkan mereduksi operator M yang belum tentu mempunyai invers ke operator yang mempunyai invers terlebih dahulu didefinisikan operator pembatasan dari M pada $(Ker\ M)^{\perp} \cap D(M)$ sebagai berikut:

$M_r = M|_{D(M_r)}$, dengan $D(M_r) =$

$$(Ker\,M)^{\perp} \cap D(M). \qquad (2.7)$$

Operator $M|_{D(M_r)} = M_r$ mempunyai invers seperti tertuang di lemma berikut.

Lemma 2.6 *Operator* $M_r = M|_{D(M_r)}$ *yang didefinisikan di (2.7) mempunyai invers.*

Bukti:

Operator M_r mempunyai invers jika dan hanya jika $Ker\ M_r = \{\underline{0}\}$. Andaikan ada $z(t) \in D(M_r) = (Ker\,M)^{\perp} \cap D(M)$ dengan $z(t) \neq \underline{0}$, sehingga $M_r z(t) = \underline{0}$. Hal ini berakibat

$$\underline{0} = M_r\, z(t) = M\, z(t),$$

sehingga $z(t) \in Ker\ M$. Berdasarkan kenyataan diatas bahwa $z(t) \in Ker\,M$ dan $z(t) \in (Ker\,M)^{\perp}$, maka $z(t) = \underline{0}$. Dengan demikian terjadi kontradiksi dengan $z(t) \neq \underline{0}$. ■

Akibat pembatasan domain operator M ke himpunan $(Ker\ M)^{\perp} \cap D(M)$, operator A menjadi A_0 dengan definisi sebagai berikut

$$A_0\{x(t)\} = A\left\{\left(P^T\right)^{-1}\{x(t)\} \cap D_A\right\} \subset \overline{(Ran\,M)}, \quad \text{untuk setiap } x(t) \in D(A_0), \qquad (2.8)$$

dengan

$$D(A_0) = \left\{ x(t) \in (Ker\,M)^{\perp} \mid \left(P^T\right)^{-1}\{x(t)\} \cap D_A \neq \phi \right\}.$$

Di sini $\left(P^T\right)^{-1}\{x(t)\}$ merupakan bayangan *invers* dari $x(t) \in (Ker\,M)^{\perp}$ terhadap proyeksi P^T yaitu

$$\left(P^T\right)^{-1}\{x(t)\} = \{\, x(t) + y(t) \mid y(t) \in Ker\ M\},\quad x(t) \in (Ker\,M)^{\perp}.$$

Berdasarkan Definisi (2.8), operator A_0 merupakan operator bernilai himpunan (*multi-valued*). Oleh karena itu diperlukan Asumsi 2.4, sehingga operator A_0 bernilai tunggal (*single-valued*).

Menurut syarat keanggotaan himpunan D_A yang tertera di atas, $z(t) \in D_A$ jika dan hanya jika $z(t) \in D(A)$ dan $QAz(t) = 0$. Dengan Asumsi 2.4 , vektor-vektor $Pz(t)$ dan $P^T z(t)$ adalah anggota $D(A)$. Untuk setiap vektor $z(t) \in D_A$ dapat dinyatakan sebagai $z(t) = Pz(t) + P^T z(t)$, sehingga $QAPz(t) + QAP^T z(t) = 0$. Dengan kata lain, $z(t) \in D_A$ jika dan hanya jika $z(t) \in D(A)$ dan $Pz(t) = -(QAP)^{-1} QAP^T z(t)$. Sebagai akibatnya untuk setiap $x(t) \in P^T D_A \subset (Ker\,M)^{\perp}$ menyatakan dengan tunggal $z(t) \in D_A$, sehingga $x(t) = P^T z(t)$ dan $z(t) = (1 - (QAP)^{-1} QA)\, x(t)$. Jadi jika Asumsi 2.4 dipenuhi, maka operator A_0 bernilai tunggal. Hal ini dikarenakan himpunan $\left\{\left(P^T\right)^{-1}\{x(t)\} \cap D_A\right\}$ memuat tepat satu anggota.

Selanjutnya dengan Asumsi 2.4 dapat didefinisikan operator Z_A yaitu

$$Z_A = P^T - (QAP)^{-1} QAP^T,$$

yang terdefinisi pada $D(Z_A) \supset P^T D_A$. Pembatasan operator Z_A ke himpunan $P^T D_A$ dinotasikan dengan $Z_A|_{P^T D_A}$ adalah $1-(QAP)^{-1}QA$ pada $P^T D_A$. Operator ini merupakan *invers* dari proyeksi $P^T|_{D_A}$, sehingga berlaku: $Z_A P^T = 1$ pada D_A dan $P^T Z_A = 1$, pada $P^T D_A$. Jadi operator A_0 di persamaan (2.8) dapat dinyatakan sebagai berikut :

$A_0 = A\, Z_A$, pada $D(A_0) = P^T D_A$ (2.9)

dan untuk setiap $z(t) \in D_A$ diperoleh :

$A_0 x(t) = Az(t)$ dengan $x(t) = P^T z(t)$.(2.10)

Operator A_0 dapat dinyatakan sebagai komposisi beberapa operator berikut

$$A_0 = Q^T AP^T - Q^T AP(QAP)^{-1}QAP^T \text{ pada } D(A_0). \quad (2.11)$$

Selanjutnya persamaan (2.11) di atas dapat dinyatakan dalam bentuk berikut

$$A_0 = [Q^T - Q^T AP(QAP)^{-1}Q]\,AP^T = Y_A A,$$

dengan operator

$$Y_A = Q^T - Q^T AP(QAP)^{-1}Q.$$

Oleh karena $Y_A AP = [Q^T - Q^T AP(QAP)^{-1}Q]AP = 0$, maka akan berlaku:

$$Y_A A = Y_A A(P + P^T) = Y_A AP^T \text{ dan}$$

$$A_0 = Y_A A, \text{ pada } D(A_0) = P^T D_A. \quad (2.12)$$

Operator A tertutup dan dan terbatas, maka A mempunyai *invers* terbatas. Hal ini ekuivalen dengan operator A *injektif* dengan *Ran A* = W. Hal ini berakibat $A|_{D_A}$ mempunyai *invers* terbatas yaitu

$$A|_{D_A} : D_A \to Q^T W$$

$$(A|_{D_A})^{-1} : Q^T W \to D_A.$$

Dengan demikian operator $A_0^{-1} = (A\, Z_A)^{-1} = P^T A^{-1} | Q^T W$ terbatas dan terdefinisi pada $Q^T W$.

Menurut (2.7) dan (2.10), untuk setiap $z(t) \in D_A \cap D(M)$ MCA *degenerate* di persamaan (2.1) dapat direduksi menjadi MCA *nondegenerate* sebagai berikut

$$\frac{d}{dt} M_r x(t) = A_0 x(t), \quad x(0) = P^T z_0 \quad (2.14)$$

dengan M_r mempunyai invers. Himpunan $D_A \cap D(M)$ dimungkinkan himpunan kosong, sehingga perlu diberikan asumsi berikut ini,

2.2 Aplikasi Semigrup Operator Linear

Dalam menyesaikan masalah Cauchy *nondegenerate* dengan menggunakan metode faktorisasi disyaratkan bahwa operator pada ruas kanan merupakan generator dari suatu semigrup operator linear. Pengkondisian ini dimaksudkan agar masalah *nondegenerate* pada ruang Hilbert mempunyai penyelesaian tunggal. Berikut ini diberikan definisi semigrup operator linear, lemma, dan teorema [13].

Definisi 2.7 *Misalkan* H *ruang Hilbert dan operator* $S(t): H \to H$, *untuk semua* $t \in R_+$. *Semigrup* $\{S(t)\}$ *adalah himpunan operator-operator* $S(t): H \to H$, *untuk semua* $t \in R_+$ *yang memenuhi sifat*

i. $S(t+s) = S(t)S(s)$, *untuk semua* $t, s \in R_+$.

ii. $S(0) = I$.

Selanjutnya $\{S(t)\}$ *disebut semigrup kontinu kuat dan disingkat Co-semigrup, jika* $\lim_{t \to 0^+} S(t)x = x, \ \forall x \in H$,

Pada lemma berikut ini disajikan tentang sifat dapat diturunkannya fungsi $t \to S(t)x, \ x \in H$.

Lemma 2.8 *Diberikan* $\{S(t)\}$ *Co-semigrup pada ruang Hilbert H dan* $x, y \in H$. *Pernyataan-pernyataan di bawah ini ekuivalen*

i. $\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(S(t)x - x) = y.$

ii. *Fungsi dapat diturunkan untuk* $t > 0$ *dan* $\frac{d}{dt} S(t)x = S(t)y$, *untuk semua* $t > 0$.

Lemma di atas menyatakan bahwa turunan dari kanan fungsi $t \to S(t)x$, di

$t = 0$ ekuivalen dengan $t \to S(t)x$, mempunyai turunan kontinu pada $t > 0$. Selanjutnya akan didefinisikan *infinitesimal generator* dari suatu semigrup operator linear $\{S(t)\}$. Diberikan operator $A : \mathrm{D}(A) \subset \mathrm{H} \to \mathrm{H}$, dengan

$$\mathrm{D}(A) = \left\{ x \in \mathrm{H} \,\middle|\, \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(S(h)x - x\right) \ ada \right\}.$$

Definisi 2.9 *Infinitesimal generator* $A : \mathrm{D}(A) \subset \mathrm{H} \to \mathrm{H}$ *dari semigrup* $\{S(t)\}$ *didefinisikan sebagai:*

$$Ax = \lim_{t \to +0} \frac{S(t)x - x}{t}$$

dengan $x \in \mathrm{D}(A)$ *jika dan hanya jika limit di atas ada.*

Tidak setiap operator linear A pada ruang Hilbert merupakan generator *Co-semigrup*. Teorema Hille-Yosida berikut ini memberikan karakteristik suatu operator linear A merupakan generator *Co-semigrup*, yaitu operator linear A harus merupakan operator linear tertutup, mempunyai domain dense, spektrum A termuat di dalam setengah bidang kiri dan operator resolven dari A yaitu $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ memenuhi estimasi

$$\|R(\lambda, A)\| \le \frac{J}{\mathrm{Re}(\lambda) - \omega}, \quad \text{untuk } \mathrm{Re}(\lambda) > \omega$$

dan suatu $J \ge 1$.

Teorema 2.10 (Teorema Hille-Yosida) [14] *Diberikan operator* $A : \mathrm{D}(A) \subset \mathrm{H} \to \mathrm{H}$, $J \ge 1$ *dan konstanta* $\omega \in R$. *Pernyataan-pernyataan berikut ini ekuivalen*

a. Operator A infinitesimal generator suatu semigrup kontinu kuat.

b. *Operator A tertutup, terdefinisi dense, dan* $\|(A - \lambda I)^{-1}\| \le \dfrac{J}{\mathrm{Re}(\lambda) - \omega}$,

untuk setiap $\lambda \in S$ *dengan* $S = \{\lambda \in C \mid \mathrm{Re}\,\lambda > \omega\} \subset \rho(A)$.

Teorema 2.11 *Jika {S(t)} Co-semigrup pada* H *dengan infinitesimal generator A, maka* $x \in \mathrm{D}(A)$ *berakibat*

a. $S(t)x \in \mathrm{D}(A), \quad \forall t \ge 0.$

b. $S(t)x$ *dapat diturunkan dan turunannya kontinu untuk* $t \ge 0$, *dengan*

$$\frac{d}{dt} S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax, \quad \forall t \ge 0.$$

Operator M terbatas, akibatnya M_r terbatas dan terdefinisi pada $P^T\mathrm{H}$. Karena M_r mempunyai invers, maka operator $(M_r)^{-1}$ ada dan terbatas. Selanjutnya didefinisikan operato

$$A_1 = (M_r)^{-1} A_0 \qquad (2.13)$$

pada domain alamiah:

$\mathrm{D}(A_1) = \{x \in P^T \mathrm{D}_A \mid A_0 x \in Ran\ M\} = A_0^{-1} Ran\ M$.

Berdasarkan (2.13), MCA *nondegenerate* dapat dibawa ke bentuk kanonik

$$\frac{d}{dt} x(t) = (M_r)^{-1} A_0 x(t), \qquad x(0) = P^T z_0. \qquad (2.14)$$
$$= A_1 x(t).$$

Bentuk ini merupakan hasil komposisi MCA *nondegenerate* (2.14) dengan $(M_r)^{-1}$ dari sebelah kiri. Operator $A_1 = (M_r)^{-1} A_0$ di atas adalah tertutup karena merupakan produk dari operator $(M_r)^{-1}$ terbatas dan operator A_0 tertutup. Operator A_1 terdefinisi dense di ruang Hilbert $\mathrm{H}_0 = \overline{(P^T \mathrm{D}_A)}$.

Menurut Teorema 2.11, untuk setiap $x \in \mathrm{D}(A)$ fungsi $u(t) = S(t)x$ merupakan penyelesaian dari masalah Cauchy abstrak $\dfrac{d}{dt} u = Au$, $u(0) = x$. Oleh karena itu diperlukan asumsi berikut ini agar masalah kanonik mempunyai penyelesaian tunggal.

Asumsi 2.12 *Operator* A_1 *membangun semigrup kontinu kuat / Co-Semigrup di* H_0.

Berdasarkan Asumsi 2.12 dan Teorema 2.11, penyelesaian persamaan (2.14) adalah $x(t) = S(t)x_0$ dengan $x_0 = P^T z_0$. Akhirnya dituliskan teorema dibawah ini yang merupakan kesimpulan dari uraian diatas tentang penyelesaian MCA *degenerate* dalam kasus linear dengan metode faktorisasi [11].

Teorema 2.13 *MCAD homogen (2.1) yang memenuhi Asumsi 2.3, 2.4, dan 2.12 mempunyai penyelesaian* ***strict*** *tunggal* $z(t) = Z_A e^{A_1 t} P^T z_0$*, untuk setiap nilai awal* $z_0(t) \in A^{-1} Ran M$.

Bukti:

Jika $z_0(t) \in D_A$ dengan $Az_0(t) \in Ran M$, maka $P^T z_0(t) \in D(A_1)$. Dengan Asumsi 2.50, masalah Cauchy abstrak *nondegenerate* homogen (2.14) mempunyai penyelesaian tunggal $x(t) = e^{A_1 t} P^T z_0$ yang mempunyai turunan

$$\frac{d}{dt} x(t) = A_1 x(t), \qquad x(0) = P^T z_0$$

kontinu dan $x(t) \in D(A_1)$ untuk semua $t \geq 0$. Dengan demikian

$$z(t) = Z_A x(t) = Z_A P^T z(t) \in D_A.$$

Karena M_r terbatas maka $Mz(t) = M_r x(t)$ mempunyai turunan yang kontinu, sehingga

$$\frac{d}{dt} Mz(t) = \frac{d}{dt} M_r x(t) = M_r A_1 x(t) = A_0 x(t)$$

kontinu.

Ingat bahwa $A_0 x(t) = Az(t)$, hal ini berakibat $z(t)$ kontinu dengan memperhatikan keterbatasan operator A^{-1}. Jadi $z(t) = Z_A e^{A_1 t} P^T z_0$ penyelesaian *strict* dan tunggal dari MCA *degenerate*.■

Contoh 2.14 Diberikan ruang Hilbert $(L^2(R))^2$ dan operator

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & \partial/\partial x \\ \partial/\partial x & a \end{pmatrix}.$$

Berdasarkan (2.2), maka himpunan

$$D_A = \left\{ \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in (W^{1,2}(R))^2 \,\middle|\, g(x) = -\frac{1}{a} f'(x) \right\}.$$

Didefinisikan operator proyeksi orthogonal:

$$P = Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{dan}$$

$$P^T = Q^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Selanjutnya dengan operator-operator proyeksi orthogonal ini diperoleh operator:

$$M_r = MP^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{dan}$$

$$A_0 = Y_A A = AP^T = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2}{a \partial x^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dalam kasus ini, operator $A_0 = -\frac{1}{a} \partial^2 / \partial x^2$ pada $W^{2,2}(R)$ dan $M_r = 1$ pada $L^2(R)$. Dengan demikian penyelesaian masalah Cauchy degenerate dalam kasus ini adalah $z(t) = Z_A x(t)$, dengan

$$x(t) = e^{A_1 t} P^T z(0), \quad Z_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\partial}{a \partial x} & 0 \end{pmatrix}.$$

3. PENUTUP

Dalam pembahasan diatas, untuk menyelesaikan masalah Cauchy *degenenerate* dilakukan dengan mereduksi ke masalah *nondegenerate*, Operator *M* tereduksi pada masalah nondegenerate ini mempunyai invers, sehingga masalah ini dapat dibawa ke bentuk kanonik. Dengan penerapan teori semigrup operator linear, yakni dengan menggunakan teorema 3.7 yang mensyaratkan operator A_1 operator merupakan *infinitesimal* generator dari semigrup linear kontinu, maka bentuk kanonik tersebut dapat diselesaikan. Selanjutnya dengan operator tertentu setiap penyelesaian bentuk *nondegenerate* dapat dikawankan dengan penyelesaian bentuk degenerate. Dengan demikian teori semigrup operator linear dapat diaplikasikan dalam menentukan penyelesaian masalah Cauchy abstrak homogen.

4. DAFTAR PUSTAKA

[1] Dai, L., (1989), Singular Control Systems, *Lecture Notes in Control and Inform, Sci.*, Vol.118, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.

[2] Carroll, R.W & Showalter,R.E, (1976), Singular and Degenerate Cauchy Problems, *Math. Sci. Engrg.*, Vol. 127, Academic Press, New York-San Fransisco-London.

[3] Favini, A, (1979), Laplace Tranform Method for a Class of Degenerate Evolution Problems, *Rend. Mat. Appl*. (2) 12

[4] Favini, A., (1981), Abstract Potential Operator and Spectral Method for a Class of Degenerate Evolution Problems, *J. Differential Equations*, 39.

[5] Favini, A, (1980), Controllability Condition of Linear degenerate Evolution Systems, *Appl. Math. Optim.*

[6] Favini, A., Plazzi, P., (1988), On Some Abstract Degenerate Problems of Parabolic Type-1 the Linear Case, *Nonlinear Analysis*, 12

[7] Favini, A., Plazzi, P.,(1989), On Some Abstract Degenerate Problems of Parabolic Type-2 the Nonlinear Case, *Nonlinear Analysis*, 13.

[8] Favini, A., Plazzi, P., (1990) On Some Abstract Degenerate Problems of Parabolic Type-3 Applications to Linear and Nonlinear Problems, *Osaka J. Math*. 27.

[9] Favini, A., Yagi, A.,1992, Space and Time Regularity for Degenerate Evolution Equations, *J. Math. Soc. Japan*,44.

[10] Hernandez M, (2005), Existence Result For Second-Order Abstract Cauchy Problem With NonLocal Conditions, *Electronic Journal of Differential Equations*, Vol 2005.

[11] Thaller, B. & Thaller, S., (1996), Factorization of Degenerate Cauchy Problems : The Linear Case, *J. Operator Theory*, 121-146.

[12] Thaller, B. & Thaller, S., (1996), Approximation of Degenerate Cauchy Problems, SFB F0003 *Optimierung und Kontrolle* 76, University of Graz.

[13] Zeidler, E., 1990, *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications II/A*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg- New York

[14] Kappel, F. & Schappacher, W., 2000, *Strongly Continuous Semigroups, An Introduction*.