MOTIVASI DEFINISI INVERS MOORE PENROSE PADA RING DENGAN ELEMEN SATUAN YANG DILENGKAPI INVOLUSI

TitiUdjiani SRRM
Departemen Matematika FSM Universitas Diponegoro Semarang
Jl.Prof. H.Soedarto,SH, Tembalang, Semarang
udjianititi@yahoo.com

Abstract. Development on the research of the inverse matrix until the Moore Penrose inverse matrix motivate researchers to conduct the research on the Moore Penrose inverse and the inverse of element in the ring with a unit element. The used method is expanding the definition of inverse in matrix to the ring with a unit element. Also generalizing the transpose operation of matrix to be a function of involution on the ring.

Keywords: invers, Moore, Penrose

1. PENDAHULUAN

Dalam penelitian aljabar, proses memperumum suatu definisi merupakan kegiatan yang biasanya dilakukan untuk memperoleh definisi baru. Sedangkan untuk memperoleh cakupan pembahasan yang lebih banyak biasanya dilakukan proses memperluas penerapan suatu definisi.

Pada penelitian ini ditunjukkan bahwa definisi invers Moore Penrose pada ring dengan elemen satuan diperoleh melalui kegiatan memperluas definisi invers dari matriks berordo atas bilangan riil ke elemen anggota ring dengan elemen satuan. Perumuman definisi invers menjadi definisi invers Moore Penrose pada matriks berukuran x atas bilangan riil selanjutnya diikuti pada ring dengan elemen satuan dengan terlebih dahulu mendefinisikan fungsi involusi pada ring sebagai perumuman dari operasi transpose pada himpunan matriks.

2. PEMBAHASAN

Menurut Kwak dan Hong [1], jika ( ) adalah himpunan matriks berukuran x atas bilangan riil dan ( ), maka ( ) disebut invers dari jika = = dengan adalah matriks identitas berukuran x atas bilangan riil.

Rao [2] menjelaskan bahwa jika ( ), maka terdapat ( ) yang memenuhi = dengan tidak selalu merupakan matriks identitas , demikian juga tidak selalu merupakan matriks identitas . Matriks selanjutnya disebut sebagai invers diperumum dari matriks .

Penelitian mengenai invers matriks yang mendasarkan pada definisi invers matriks diperumum banyak diminati oleh para peneliti. Frame [3] dan Bjerhammar [4] membahas invers semu dari matriks ( ) yaitu matriks ( ) yang memenuhi = dan = . Selanjutnya matriks normal diperumum dari matriks ( ), yaitu matriks ( ) yang memenuhi = , = dan ( ) = diteliti oleh Rohde [5]. Berikutnya Goldman dan Zelen [6] memperkenalkan invers lemah diperumum dari matriks ( ) sebagai matriks ( ) yang memenuhi = , = dan ( ) = . Moore [7], Penrose [8], Greville[9], Ben Israel dan Charnes [10] membahas invers Moore Penrose dari matriks ( ) yaitu matriks ( ) yang memenuhi = , = , ( ) = dan ( ) = . Invers Moore Penrose dari matriks diberi symbol . Lebih jauh Moore dan Penrose menjelaskan bahwa setiap matriks ( ) mempunyai invers Moore

Penrose dan invers Moore dan Penrose dari tunggal.

Berdasarkan bahwa himpunan matriks berukuran x atas bilangan riil ( )adalahsuatu ring dengan elemen satuan, maka definisi invers matriks pada ( )dapat diperluas pada ring dengan elemen satuan. Suatu elemen disebut invers dari jika = = , dengan adalah elemen identitas pada .

Setelah definisi invers matriks diperluas pada ring, penelitian-penelitian yang mengembangkan definisi invers pada ring mulai dilakukan oleh para peneliti yaitu dengan mengikuti penelitian mengenai invers diperumum pada matriks yang telah dilakukan oleh Rao . Harte dan Mbektha [11] menjelaskan bahwa jika , dan = , maka disebut invers dalam dari . Pada ring , invers dalamdari0 adalah setiap elemen di , invers dalam dari 1 adalah 1 dan invers dalam dari 3 adalah 3. Sementara $2\ \bar{}2 \neq 2$ untuk setiap $\bar{}$. Contoh tersebut menjelaskan bahwa tidak setiap elemen di mempunyai invers dalam.Selanjutnya Harte dan Mbektha mendefinisikan elemen regular sebagai elemen di yang mempunyai invers dalam.

Penelitian yang bertujuan mengembangkan definisi invers pada ring dengan elemen satuan terus dilakukan oleh para peneliti. Operasi transpose pada himpunan matriks, diperumum menjadi fungsi involusi yang didefinisikan pada ring dengan elemen satuan oleh Mosic dan Djordjevic [12]. Involusi" " pada didefinisikan sebagai fungsi yang memenuhi ( ) = , (+) = + dan ( ) = untuk setiap , .

Involusi" " pada merupakan fungsi bijektif. Jika = , , maka + = + = (+) . Sementara + = (+) . Sehingga(+) = (+) . Selanjutnya menggunakan sifat involusi diperoleh + = ((+)) = ((+)) = + . Sehingga = .

Berikutnya untuk setiap dapat ditemukan yang memenuhi ( ) = . Jika adalah ring komutatif maka fungsi identitas merupakan involusi. Tidaksetiap ring R mempunyai involusi. Ring = $\bar{}\ 0\ \bar{}\ ,\ \bar{}\ ,$ merupakan ring dengan elemen satuan yang tidak mempunyai involusi. Jika $\bar{}\ 0\ \bar{}$ = $\bar{}\ 0$ dan $\bar{}\ 0$ = $\bar{}\ 0\ \bar{}$ untuk setiap $\bar{}\ 0\ \bar{}\ ,\ \bar{}\ 0$, maka ($\bar{}\ 0\ \bar{}\ \bar{}\ 0$) = $\bar{}\ +$ — $0\ \bar{}$ dan $\bar{}\ 0$ $\bar{}\ 0\ \bar{}$ = $\bar{}\ 0\ \bar{}\ \bar{}\ 0$ = $\bar{}\ +$ — $0\ \bar{}$. Diperoleh bahwa ($\bar{}\ 0\ \bar{}\ \bar{}\ 0$) = $\bar{}\ 0$ $\bar{}\ 0\ \bar{}$ jika involusi " " merupakan fungsi identitas. Sementara jika involusi " " merupakan fungsi identitas pada , ditemukan $\begin{matrix}1 & 0\\0 & 0\end{matrix}$, $\begin{matrix}0 & 0\\1 & 0\end{matrix}$ yang memenuhi ($\begin{matrix}1 & 0\\0 & 0\end{matrix}$ $\begin{matrix}0 & 0\\1 & 0\end{matrix}$) = $\begin{matrix}0 & 0\\0 & 0\end{matrix}$ = $\begin{matrix}0 & 0\\0 & 0\end{matrix}$ dan $\begin{matrix}0 & 0\\1 & 0\end{matrix}$ $\begin{matrix}1 & 0\\0 & 0\end{matrix}$ = $\begin{matrix}0 & 0\\1 & 0\end{matrix}$ $\begin{matrix}1 & 0\\0 & 0\end{matrix}$ = $\begin{matrix}0 & 0\\1 & 0\end{matrix}$. Diperoleh bahwa($\begin{matrix}1 & 0\\0 & 0\end{matrix}$ $\begin{matrix}0 & 0\\1 & 0\end{matrix}$) $\neq$ $\begin{matrix}0 & 0\\1 & 0\end{matrix}$ $\begin{matrix}1 & 0\\0 & 0\end{matrix}$.

Mengikuti penelitian invers Moore Penrose pada himpunan matriks yang telah dilakukan oleh Moore dan Penrose dan menggunakan definisi involusi yang telah disampaikan oleh Mosic dan Djordjevic, selanjutnya Koliha. dan Patricio [13] mendefinisikan pengertian invers Moore Penrose pada ring dengan elemen satuan. Oleh karena tidak setiap ring mempunyai involusi, maka Koliha dan Patricio menambahkan syarat kepemilikan involusi pada ring.

Definisi 2.1 *Diketahui ring dengan elemen satuan yang dilengkapi involusi " " dan . Invers Moore Penrose dari adalah elemen yang memenuhi*

1. =
2. =
3. ( ) =
4. ( ) =

Invers Moore Penrose dari diberisymbol .

Contoh 2.2

1. Pada ring dengan involusi identitas, elemen0 tidak mempunyai invers tetapi mempunyai invers Moore Penrose dengan0 = 0. Diperoleh1 = 1, 3 = 3. Elemen 2 tidak mempunyai invers Moore Penrose sebab 2 ‾2 ≠ 2 untuk setiap ‾ .
2. Pada ring ( )denganinvolusi transpose, matriks $\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$ tidak mempunyai invers tetapi mempunyai invers Moore Penrose dengan $\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$.

3. PENUTUP

Tidak setiap elemen di ring dengan elemen satuan mempunyai invers Moore Penrose. Oleh karenanya terdapat peluang untuk membangun eksistensi invers Moore Penrose dari suatu elemen di ring dengan elemen satuan.

4. DAFTAR PUSTAKA

[1]. Kwak J. H. dan S. Hong, (1977), Linear Algebra, Birkauser, Boston.

[2]. Rao C.R., (1962), A Note on a Generalized Inverse of a Matrix with Applications to Problems in Mathematical Statistics, *J. Roy. Statist. Soc. Ser.B.*, 24 : 152-158.

[3]. Frame J.S., (1964), \textit{Matrix Functions and Applications}, *IEEEE Spectrum* , 1, 2009-2020.

[4]. Bjerhammar A., (1951), Rectangular Reciprocal Matrices, with Special Reference to Geodetic Calculations, *Bull. Geodesique*, 25 (2) : 188-220.

[5]. Rohde C.A., (1965), Generalized Inverse of Partitioned Matrices, *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, 13 : 1033-1035.

[6]. Goldman A.J. dan Zelen M., (1964), Weak Generalized Inverses and Minimum Variance LInear Unbiased Estimation, *J. Res. Nat. Bur. Standards Sect.*, 151-172.

[7]. Moore E.H., (1920), On the Reciprocal of the General Algebraic Matrix, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 26, 394-395.

[8]. Penrose R., (1955), A Generalized Inverse for Matrices, *Proceedings of Cambridge Philosofical Society*, 51 : 406-413.

[9]. Greville T.N.T, (1959), The Pseudoinverse of a Rectangular of Singular Matrix and Its Application to The Solution of Systems of Linear Equations, *SIAM Review*, 1, 38-43.

[10]. Ben Israel A. danCharnes A., (1963), Contributions to The Theory of Generalized Inverses, *J. Soc.Indust. Appl. Math.* , 11 : 667-699.

[11]. Harte R. danM.Mbekhta, (1992), On Generalized Inverse in C* Algebras, *Mathematica*, 103(1) : 71-77.

[12]. Mosic D. danD.S.Djordjevic, (2009), Partial Isometries and EP Elements in Rings with Involution, Electronic *Journal of Linear Algebra*, A publication of the International Linear Algebra Society, 18 : 761-772.

[13]. Koliha J.J. dan P. Patricio, (2002), Elements of Rings with Equal Spectral Idempotents, *J. Australian Mathematical Society*, 72: 137-152.