KEKONVERGENAN BARISAN FUNGSI TERINTEGRAL HENSTOCK-DUNFORD PADA [*a*,*b*]

Solikhin[1], Solichin Zaki[2], Heru Tjahjana[3]
[1,2,3]Jurusan Matematika FSM Universitas Diponegoro Semarang
Jl.Prof. H.Soedarto,SH, Tembalang, Semarang
[1]*solikhin@live.undip.ac.id*

Abstract. Artikel ini membahas tentang kekonvergenan barisan fungsi yang terintegral Henstock-Dunford pada [*a*,*b*]. Dalam hal ini dikaji syarat cukup agar limit barisan nilai integral suatu fungsi terintegral Henstock-Dunford sama dengan limit barisan fungsinya. Diperoleh bahwa untuk menjamin fungsi f terintegral Henstock-Dunford dan limit barisannya sama dengan nilai fungsinya maka barisan fungsi yang terintegral Henstock-Dunford harus konvergen seragam atau barisan fungsi yang terintegral Henstock-Dunford harus konvergen lemah dan monoton lemah serta limitnya ada, atau barisan fungsinya konvergen lemah dan terbatas.

Kata kunci : Integral Henstock-Dunford, Kekonvergenan Barisan, Teorema Kekonvergenan

1. PENDAHULUAN

Integral Henstock-Dunford adalah integral Dunford yang diperluas ke dalam integral Henstock. Integral Dunford didefinisikan sebagai fungsi terukur lemah f dari interval tertutup I ke ruang Banach X ($f : I \to X$) sehingga untuk setiap $x^* \in X^*$ (X^* adalah ruang dual X) fungsi bernilai real $x^* f : I \to R$ terintegral Lebesgue [1]. Jaminan untuk integral ini adalah Lemma Dunford [1]. Kemudian intergral Dunford diperluas ke dalam integral Henstock, yaitu fungsi bernilai real $x^* f$-nya diperumum dari integral Lebesgue menjadi integral Henstock. Integral ini dikenal sebagai integral Henstock-Dunford [2].

Kajian integral Henstock-Dunford pada ruang dimensi satu R telah digeneralisasi ke dalam ruang Euclide R^n [3]. Kajian integral Henstock-Dunford pada R sejauh ini sebatas sifat-sifat sederhana, Teorema Perluasan Harnack dan Teorema kekonvergenan [2]. Kajian lebih lanjut dibahas perluasan Harnack dan sifat Cauchy dalam ruang Euclide R^n [4], dan beberapa sifat-sifat small Riemann sumsnya yaitu locally, globally, functionally, dan essentially small Riemann sumsnya [5, 6, 7]. Kemudian dikaji juga tentang sifat fungsi primitifnya terkait dengan sifat fungsi kontinu mutlak, fungsi kontinu mutlak kuat, dan generalisasinya, serta kaitannya sifat fungsi bervariasi terbatas, bervariasi terbatas kuat, dan generalisasinya [8].

Berdasarkan kajian tentang integral Henstcok-Dunford pada $[a,b]$, penulis akan mengkaji syarat cukup agar limit barisan nilai integral suatu fungsi terintegral Henstock-Dunford sama dengan limit barisan fungsinya.

2. INTEGRAL HENSTOCK-DUNFORD PADA [*a*,*b*]

Pada artikel ini, X menotasikan ruang Banach dan X^* ruang dualnya. $B(X^*) = \{x^* \in X^* : \|x^*\| \le 1\}$ unit ball dalam X^* dan $[a,b]$ adalah interval tertutup di dalam himpunan bilangan riil R.

Definisi 2.1. [2] *Fungsi* $f : [a,b] \to X$ *dikatakan terintegral Henstock-Dunford pada* $[a,b]$ *jika untuk setiap* $x^* \in X^*$ *fungsi bernilai real* $x^* f : [a,b] \to R$

terintegral Henstock pada $[a,b]$ dan untuk setiap interval tertutup $A \subset [a,b]$ terdapat vektor $x^{**}_{(f,A)} \in X^{**}$ sehingga

$$x^{**}_{(f,A)}\left(x^*\right) = (H)\int_A x^* f \,.$$

Vektor $x^{**}_{(f,A)} \in X^{**}$ adalah nilai integral Henstock-Dunford pada A atas fungsi f dan ditulis

$$x^{**}_{(f,A)} = (HD)\int_A f \,.$$

Fungsi f yang terintegral Henstock-Dunford pada $[a,b]$ ditulis $f \in HD[a,b]$.

Ketunggalan nilai dari integral Henstock-Dunford diberikan dalam teorema berikut.

Teorema 2.2. [2] *Jika $f \in HD[a,b]$ maka vektor $x^{**}_{(f,A)} \in X^{**}$ pada Definisi 2.1. adalah tunggal.*

Selanjutnya jika fungsi f terintegral Henstock-Dunford pada interval tertutup $[a,b]$ maka f juga terintegral Henstock-Dunford pada setiap interval tertutup $A \subset [a,b]$.

Teorema 2.3. [9] *Jika $f \in HD[a,b]$ maka $f \in HD(A)$ untuk setiap interval tertutup $A \subset [a,b]$.*

Untuk $A = [c,d] \subset [a,b]$ maka simbol $\alpha(A)$ dalam tulisan ini diartikan sebagai panjang interval tertutup A, yaitu $\alpha(A) = |d-c|$.

Contoh 2.4. Didefinisikan fungsi $f:[a,b] \to X$ oleh

$$f(x) = c \;,$$

untuk setiap $x \in [a,b]$ dan suatu konstanta $c \in X$, maka f terintegral Henstock-Dunford pada $[a,b]$ dan nilai integralnya $c\alpha(A)$ untuk setiap interval tertutup $A \subset [a,b]$.

Bukti:

Diberikan sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ dan $x^* \in X^*$ maka dapat ditemukan fungsi positif δ pada $[a,b]$ sehingga jika $A \subset [a,b]$ interval tertutup dan $\mathcal{D} = \{(D,x)\}$ sebarang partisi Perron δ–fine pada A berlaku

$$\begin{aligned}
\left|\mathcal{D}\sum_{x\in A} x^* f(x)\alpha(D) - x^{**}_{(f,A)}\left(x^*\right)\right|
&= \left|\mathcal{D}\sum_{x\in A} x^* c\alpha(D) - x^* c\alpha(A)\right| \\
&= \left|x^* c\left(\mathcal{D}\sum_{x\in A}\alpha(D) - \alpha(A)\right)\right| \\
&= 0 < \varepsilon \,.
\end{aligned}$$

Jadi $x^* f$ terintegral Henstock pada $[a,b]$ dan untuk setiap interval tertutup $A \subset [a,b]$ di atas terdapat vektor $x^{**}_{(f,A)} \in X^{**}$ sehingga

$$\begin{aligned}
x^{**}_{(f,A)}(x^*) &= (H)\int_A x^* f \\
&= (H)\int_A x^*(c) \\
&= x^* c\alpha(A)\,.
\end{aligned}$$

Jadi $f \in HD[a,b]$ dan nilai integralnya adalah $c\alpha(A)$ untuk setiap interval tertutup $A \subset [a,b]$. □

Teorema 2.5. (Kriteria Cauchy) *Fungsi $f \in HD[a,b]$ jika dan hanya jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif δ pada $[a,b]$ sehingga jika $A \subset [a,b]$ interval tertutup dan $\mathcal{D} = \{(D,x)\}$ dan $\mathcal{P} = \{(P,y)\}$ masing-masing partisi Perron δ-fine pada A berlaku*

$$\left|\mathcal{D}\sum_{x\in A} x^* f(x)\alpha(D) - \mathcal{P}\sum_{y\in A} x^* f(y)\alpha(P)\right| < \varepsilon$$

untuk setiap $x^* \in X^*$.

Bukti:

(Syarat Perlu) Diketahui $f \in HD[a,b]$. Jadi untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi $x^* f$ terintegral Henstock pada $[a,b]$ dan untuk setiap interval tertutup $A \subset [a,b]$ terdapat vektor $x^{**}_{(f,A)} \in X^{**}$ sehingga

$$x^{**}_{(f,A)}(x^*) = (H)\int_A x^* f \,.$$

Diberikan bilangan $\varepsilon > 0$ sebarang dan $x^* \in X^*$ maka terdapat fungsi positif δ pada $[a,b]$ sehingga untuk interval tertutup $A \subset [a,b]$ dan $\mathcal{D} = \{(D,x)\}$ dan $\mathcal{P} = \{(P,y)\}$ masing-masing partisi Perron δ-fine pada A berlaku

$$\left\| x^{**}_{(f,A)}(x^*) - \mathcal{D}\sum_{x\in A} x^* f(x)\alpha(D) \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dan

$$\left\| x^{**}_{(f,A)}(x^*) - \mathcal{P}\sum_{y\in A} x^* f(y)\alpha(P) \right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dengan demikian diperoleh

$$\begin{aligned} &\left\| \mathcal{D}\sum_{x\in A} x^* f(x)\alpha(D) - \mathcal{P}\sum_{y\in A} x^* f(y)\alpha(P) \right\| \\ &\le \left\| \mathcal{D}\sum_{x\in A} x^* f(x)\alpha(D) - x^{**}_{(f,A)}(x^*) \right\| \\ &\quad + \left\| x^{**}_{(f,A)}(x^*) - \mathcal{P}\sum_{y\in A} x^* f(y)\alpha(P) \right\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,. \end{aligned}$$

(Syarat cukup) Diberikan bilangan $\varepsilon > 0$ sebarang dan $x^* \in X^*$ maka terdapat fungsi positif δ pada $[a,b]$ sehingga untuk interval tertutup $A \subset [a,b]$ dan $\mathcal{D} = \{(D,x)\}$ dan $\mathcal{P} = \{(P,y)\}$ masing-masing partisi Perron δ-fine pada A berlaku

$$\left\| \mathcal{D}\sum_{x\in A} x^* f(x)\alpha(D) - \mathcal{P}\sum_{y\in A} x^* f(y)\alpha(P) \right\| < \varepsilon\,.$$

Diambil $\varepsilon = 1$ terdapat fungsi positif δ_1 pada $[a,b]$ dengan sifat di atas.

Diambil $\varepsilon = \frac{1}{2}$ terdapat fungsi positif δ_2 pada $[a,b]$ dengan $\delta_2 \le \delta_1$ dan memenuhi sifat di atas.

Diambil $\varepsilon = \frac{1}{n}$ terdapat fungsi positif δ_n pada $[a,b]$ dengan $\delta_n \le \delta_{n-1} \le \ldots \le \delta_2 \le \delta_1$ dan memenuhi sifat di atas.

Untuk $\forall\, n \in N$ dan $x^* \in X^*$ didefinisikan

$$S_n = \mathcal{D}_n \sum x^* f(x)\alpha(D),$$

dengan jumlahan Riemann diambil atas partisi Perron $\delta_n -$fine $\mathcal{D}_n = \{(D,x)\}$ pada A.

Diambil sebarang $m, n \in N$ dengan $m \ge n$, maka untuk setiap partisi Perron $\delta_m -$fine pada A merupakan partisi Perron $\delta_n -$fine pada A.

Akibatnya untuk setiap partisi Perron $\delta_m -$ fine $\mathcal{D}_m = \{(D,x)\}$ pada A dan sebarang partisi Perron $\delta_n -$fine $\mathcal{D}_n = \{(D,x)\}$ pada A berlaku

$$\|S_m - S_n\| = \left\| \mathcal{D}_m \sum_{x\in A} x^* f(x)\alpha(D) - \mathcal{D}_n \sum_{x\in A} x^* f(x)\alpha(D) \right\| < \frac{1}{n}.$$

Berdasarkan sifat Archimedean, diberikan sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ maka terdapat bilangan asli n_0 sehingga $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Selanjutnya jika $m, n \ge n_0$ maka diperoleh

$$\|S_m - S_n\| < \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Hal ini berarti $\{S_n\}$ barisan Cauchy di R. Karena R lengkap berarti untuk setiap barisan Cauchy di dalamnya adalah konvergen, yaitu untuk setiap $x^* \in X^*$ dan $A \subset [a,b]$ di atas terdapat bilangan $x^{**}_{(f,A)}(x^*) = S \in R$ sehingga $\lim_{n\to\infty} S_n = S$.

Dengan demikian untuk sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ di atas terdapat bilangan asli n_0^* dan jika $n \geq n_0^*$ berlaku

$$\left\| S_n - S \right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Diambil

$$\delta(x) = \min\left\{ \delta_{n_0}(x), \delta_{n_0^*}(x) \,\middle|\, x \in [a,b] \right\}.$$

Diperoleh δ fungsi positif pada $[a,b]$.

Selanjutnya untuk setiap $\mathcal{P} = \{(P,x)\}$ partisi Perron $\delta-$fine pada A berlaku

$$\begin{aligned} &\left\| \mathcal{P}\sum_{x\in A} x^* f(x)\alpha(P) - S \right\| \\ &\leq \left\| \mathcal{P}\sum_{x\in A} x^* f(x)\alpha(P) - S_{n_0^*} \right\| + \left\| S_{n_0^*} - S \right\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon . \end{aligned}$$

Hal ini berarti untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi $x^* f$ terintegral Henstock pada $[a,b]$ dan terdapat vektor $x^{**}_{(f,A)} \in X^{**}$ sehingga

$$x^{**}_{(f,A)}\left(x^*\right) = S = (H)\int_A x^* f .$$

Dengan kata lain, $f \in HD[a,b]$. □

Definisi 2.6. [9] *Diberikan* $f \in HD[a,b]$ *dan* $\mathcal{I}(E)$ *koleksi semua interval tertutup di dalam* $[a,b]$. *Fungsi* $F : \mathcal{I}(E) \to X$ *didefinisikan oleh*

$$F(A) = x^{**}_{(f,A)} = (HD)\int_A f$$

dan $F(\emptyset) = 0$, *untuk setiap* $A \in \mathcal{I}(E)$ *disebut fungsi primitif-HD fungsi* f .

Contoh 2.7. *Didefinisikan fungsi* $f : [a,b] \to X$ *oleh*

$$f(x) = c ,$$

untuk setiap $x \in [a,b]$ *dan suatu konstanta* $c \in X$, *maka untuk setiap interval tertutup* $A \subset [a,b]$ *fungsi primitif-HD fungsi f adalah* $F(A) = c\alpha(A)$.

3. KEKONVERGENAN BARISAN FUNGSI TERINTEGRAL HENSTOCK-DUNFORD PADA [*a,b*]

Pada bagian ini akan dibahas syarat cukup agar limit barisan nilai integral suatu fungsi terintegral Henstock-Dunford sama dengan limit barisan fungsi tersebut. Oleh karena itu, diperlukan beberapa pengertian terkait kekonvergenan barisan.

Definisi 3.1 *Diberikan* X *ruang Banach, interval tertutup* $[a,b] \subset R$, *dan fungsi* $f_n : [a,b] \to X$ *untuk setiap* $n \in N$. *Barisan fungsi* $\{f_n\}$ *dikatakan konvergen ke fungsi* f *di* $x \in [a,b]$ *jika barisan* $\{f_n(x)\}$ *konvergen ke* $f(x)$, *yaitu ada* $f(x) \in X$ *dan untuk setiap bilangan* $\varepsilon > 0$ *terdapat bilangan asli* $n_0 = n_0(\varepsilon, x)$ *sehingga jika* $n \geq n_0$ *berlaku*

$$\left\| f_n(x) - f(x) \right\|_X < \varepsilon .$$

Jadi $\{f_n\}$ konvergen di $x \in [a,b]$ ekuivalen $\{f_n(x)\}$ konvergen.

Jika barisan fungsi $\{f_n\}$ konvergen di setiap $x \in [a,b]$ maka barisan $\{f_n\}$ dikatakan konvergen pada $[a,b]$.

Definisi 3.2 *Diberikan fungsi* $f_n : [a,b] \to X$ *untuk setiap* $n \in N$.

(i) Barisan fungsi $\{f_n\}$ *dikatakan konvergen lemah ke fungsi* f *di titik* $x \in [a,b]$ *jika barisan vektor* $\{f_n(x)\}$ *konvergen lemah ke* $f(x) \in X$, *yaitu untuk setiap bilangan* $\varepsilon > 0$ *dan* $x^* \in X^*$ *terdapat bilangan asli* $n_0 = n_0(\varepsilon, x^*, x)$ *sehingga jika* $n \geq n_0$ *berlaku*

$$\left| x^* f_n(x) - x^* f(x) \right| < \varepsilon .$$

(ii) Barisan fungsi $\{f_n\}$ *dikatakan konvergen lemah ke fungsi f pada* $[a,b]$ *jika untuk setiap* $x \in [a,b]$ *dan setiap bilangan* $\varepsilon > 0$, $x^* \in X^*$ *terdapat bilangan asli* $n_0 = n_0(\varepsilon, x, x^*)$ *sehingga jika* $n \geq n_0$ *berlaku*

$$\left| x^* f_n(x) - x^* f(x) \right| < \varepsilon .$$

(iii) Barisan fungsi $\{f_n\}$ *dikatakan konvergen lemah seragam ke fungsi f pada* $[a,b]$ *jika untuk setiap bilangan* $\varepsilon > 0$ *terdapat bilangan asli* $n_0 = n_0(\varepsilon)$ *sehingga jika* $n \geq n_0$ *berlaku*

$$\left| x^* f_n(x) - x^* f(x) \right| < \varepsilon$$

untuk setiap $x \in [a,b]$ *dan* $x^* \in X^*$.

Definisi 3.3 *Barisan fungsi* $\{f_n\}$ *dikatakan naik monoton lemah pada* $[a,b]$ *jika untuk setiap* $x^* \in X^*$ *barisan* $\{x^* f_n\}$ *naik monoton, yaitu jika berlaku* $x^* f_n(x) \leq x^* f_{n+1}(x)$ *untuk setiap* $x \in [a,b]$, $x^* \in X^*$, *dan* $n \in N$. *Sedangkan barisan fungsi* $\{f_n\}$ *dikatakan turun monoton lemah pada* $[a,b]$ *jika untuk setiap* $x^* \in X^*$ *barisan* $\{x^* f_n\}$ *turun monoton, yaitu jika berlaku* $x^* f_n(x) \geq x^* f_{n+1}(x)$ *untuk setiap* $x \in [a,b]$, $x^* \in X^*$, *dan* $n \in N$.

Barisan naik monoton lemah atau turun monoton lemah disebut barisan monoton lemah.

Jika fungsi f_n terintegral Henstock-Dunford pada $[a,b]$ untuk setiap bilangan asli n dan barisan fungsi $\{f_n\}$ konvergen lemah ke fungsi f pada interval tertutup $A \subset [a,b]$, akan ditunjukkan beberapa kondisi yang menyebabkan f terintegral Henstock-Dunford pada $[a,b]$ dan

$$x^{**}_{(f,A)} = \lim_{n\to\infty} x^{**}_{(f_n,A)} .$$

Kondisi yang pertama adalah jika barisan fungsi $\{f_n\}$ konvergen lemah seragam ke fungsi f, maka f terintegral Henstock-Dunford.

Teorema 3.4 (Teorema Kekonvergenan Seragam) *Diberikan fungsi* $f, f_n : [a,b] \to X$ *dan* $f_n \in HD[a,b]$ *untuk setiap bilangan asli n. Jika barisan fungsi* $\{f_n\}$ *konvergen lemah seragam ke fungsi f pada interval tertutup* $A \subset [a,b]$ *maka* $f \in HD[a,b]$ *dan*

$$x^{**}_{(f,A)} = \lim_{n\to\infty} x^{**}_{(f_n,A)} .$$

Bukti : Diberikan $A \subset [a,b]$ sebarang interval tertutup.

Diketahui bahwa barisan fungsi $\{f_n\}$ konvergen lemah seragam ke fungsi f pada interval tertutup $A \subset [a,b]$ berarti untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan Asli $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sehingga jika $n \geq n_0$ berlaku

$$\left| x^* f_n(x) - x^* f(x) \right| < \frac{\varepsilon}{4\alpha(A)+1} \quad (3.1)$$

untuk setiap $x \in [a,b]$ dan $x^* \in X^*$.

Fungsi $f_n \in HD[a,b]$ untuk setiap bilangan asli n berarti untuk $\varepsilon > 0$ tersebut di atas, setiap $x^* \in X^*$, dan setiap interval tertutup $A \subset [a,b]$ fungsi $x^* f_n$ terintegral Henstock pada A. Jadi terdapat fungsi positif δ_n pada $[a,b]$ sehingga untuk $A \subset [a,b]$ di atas, $\mathcal{D} = \{(D,x)\}$ dan $\mathcal{P} = \{(D,x)\}$ masing-masing sebarang partisi Perron δ_n-fine pada A berlaku

$$\left| \mathcal{D}\sum_{x\in A} x^* f_n(x)\alpha(D) - x^{**}_{(f_n,A)}\left(x^*\right) \right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

dan

$$\left| \mathcal{D}\sum_{x\in A} x^* f_n(x)\alpha(D) - \mathcal{P}\sum_{x\in A} x^* f_n(x)\alpha(D) \right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

(3.2)

Berdasarkan (3.1) dan (3.2) , Jika $\mathcal{D} = \{(D,x)\}$ dan $\mathcal{P} = \{(D,x)\}$ sebarang pertisi Perron δ_n-fine pada A diperoleh

$$\left| \mathcal{D}\sum_{x\in A} x^* f(x)\alpha(D) - \mathcal{P}\sum_{x\in A} x^* f(x)\alpha(D) \right|$$

$$\leq \left| \mathcal{D}\sum_{x\in A} x^* f(x)\alpha(D) - \mathcal{D}\sum_{x\in A} x^* f_n(x)\alpha(D) \right|$$

$$+\left|\mathbf{D}\sum_{x\in A} x^* f_n(x)\alpha(D) - \mathbf{P}\sum_{x\in A} x^* f_n(x)\alpha(D)\right|$$

$$+\left|\mathbf{P}\sum_{x\in A} x^* f_n(x)\alpha(D) - \mathbf{P}\sum_{x\in A} x^* f(x)\alpha(D)\right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{4\alpha(A)+1}\mathbf{D}\sum_{x\in A}\alpha(D) + \frac{\varepsilon}{4}$$

$$+\frac{\varepsilon}{4\alpha(A)+1}\mathbf{P}\sum_{x\in A}\alpha(D)$$

$$<\varepsilon .$$

Jadi fungsi $x^* f$ terintegral Henstock pada A dan untuk setiap interval tertutup $A \subset [a,b]$ di atas terdapat vektor $x^{**}_{(f,A)} \in X^{**}$ sehingga

$$x^{**}_{(f,A)}\left(x^*\right) = (H)\int_A x^* f \, .$$

Dengan kata lain $f \in HD[a,b]$.

Selanjutnya karena $f \in HD[a,b]$ maka untuk setiap $x^* \in X^*$ dan sebarang interval tertutup $A \subset [a,b]$ di atas, fungsi $x^* f$ terintegral Henstock pada A. Berarti untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ tersebut di atas terdapat fungsi positif δ' pada A sehingga jika $\mathbf{Q} = \{(D,x)\}$ partisi Perron δ'-fine pada A berlaku

$$\left|\mathbf{Q}\sum_{x\in A} x^* f(x)\alpha(D) - x^{**}_{(f,A)}\left(x^*\right)\right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Dipilih $\delta^*(x) = \text{Min}\{\delta_n(x), \delta'(x)\}$ untuk setiap $x \in [a,b]$.

Diperoleh fungsi positif δ^* pada $[a,b]$. Jadi untuk interval tertutup $A \subset [a,b]$ dan jika $\mathbf{D}^* = \{(D,x)\}$ partisi Perron δ^*-fine pada $[a,b]$ didapat

$$\left|x^{**}_{(f_n,A)}\left(x^*\right) - x^{**}_{(f,A)}\left(x^*\right)\right|$$

$$\le \left|x^{**}_{(f_n,A)}\left(x^*\right) - \mathbf{D}^*\sum_{x\in A} x^* f_n(x)\alpha(D)\right|$$

$$+\left|\mathbf{D}^*\sum_{x\in A} x^* f_n(x)\alpha(D) - \mathbf{D}^*\sum_{x\in A} x^* f(x)\alpha(D)\right|$$

$$+\left|\mathbf{D}^*\sum_{x\in A} x^* f(x)\alpha(D) - x^{**}_{(f,A)}\left(x^*\right)\right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4\alpha(A)+1}\mathbf{D}^*\sum_{x\in A}\alpha(D) + \frac{\varepsilon}{4}$$

$$<\varepsilon .$$

Dengan kata lain

$$x^{**}_{(f,A)}\left(x^*\right) = \lim_{n\to\infty} x^{**}_{(f_n,A)}\left(x^*\right),$$

untuk setiap $x^* \in X^*$.

Jadi,

$$x^{**}_{(f,A)} = \lim_{n\to\infty} x^{**}_{(f_n,A)} . \qquad \square$$

Kondisi selanjutnya yang menjamin bahwa fungsi f terintegral Henstock-Dunford selain barisan fungsi $\{f_n\}$ konvergen lemah ke fungsi f adalah barisan fungsi $\{f_n\}$ harus monoton lemah dan $\lim_{n\to\infty} x^{**}_{(f_n,A)}\left(x^*\right)$ untuk setiap $x^* \in X^*$ ada dan berhingga, seperti dalam teorema berikut.

Teorema 3.5 (Teorema Kekonvergenan Monoton) *Diberikan fungsi* $f, f_n : [a,b] \to X$ *dan* $f_n \in HD[a,b]$ *untuk setiap bilangan asli n. Jika*

(i) barisan fungsi $\{f_n\}$ *monoton lemah pada* A,

(ii) barisan $\{f_n\}$ *konvergen lemah ke fungsi* f *pada* A, *dan*

(iii) $\lim_{n\to\infty} x^{**}_{(f_n,A)}\left(x^*\right)$ *untuk setiap* $x^* \in X^*$ *ada dan berhingga,*

maka $f \in HD[a,b]$ *dan*

$$x^{**}_{(f,A)} = \lim_{n\to\infty} x^{**}_{(f_n,A)}$$

untuk setiap interval tertutup $A \subset [a,b]$.

Bukti : Dibuktikan untuk barisan fungsi $\{f_n\}$ yang naik monoton lemah pada A. Diberikan sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ dan sebarang interval tertutup $A \subset [a,b]$.

Barisan fungsi $\{f_n\}$ konvergen lemah ke fungsi f pada $A \subset [a,b]$, berarti untuk bilangan $\varepsilon > 0$ di atas dan untuk setiap $x^* \in X^*$ dan $x \in [a,b]$, terdapat bilangan asli $m_0 = m_0\left(\varepsilon, x^*, x\right)$ sehingga jika $n \geq m_0$ berlaku

$$\left\| x^* f_n(x) - x^* f(x) \right\| < \frac{\varepsilon}{4\alpha(A)+4}.$$

Fungsi $f_n \in HD[a,b]$ untuk setiap bilangan asli *n* berarti untuk setiap $x^* \in X^*$ dan interval tertutup $A \subset [a,b]$ fungsi $x^* f_n$ terintegral Henstock pada A, yaitu untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ tersebut di atas terdapat fungsi positif δ_n pada $[a,b]$ sehingga jika $\mathsf{D} = \left\{(D,x)\right\}$ sebarang partisi Perron $\delta_n -$fine pada A berlaku

$$\left\| \mathsf{D}\sum_{x \in A} x^* f_n(x)\alpha(D) - x^{**}_{(f_n,A)}\left(x^*\right) \right\|$$
$$= \left\| \mathsf{D}\sum_{x \in A} x^* f_n(x)\alpha(D) - (H)\int_A x^* f_n \right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Karena barisan fungsi $\{f_n\}$ naik monoton lemah pada A maka untuk setiap $x^* \in X^*$ barisan $\left\{x^* f_n\right\}$ naik monoton pada A, yaitu $x^* f_n((x) \leq x^* f_{n+1}(x)$ untuk setiap $x \in A \subset [a,b]$. Karena $f_n \in HD[a,b]$, maka untuk setiap $x^* \in X^*$ dan interval tertutup $A \subset [a,b]$ fungsi $x^* f_n$ terintegral Henstock pada A sehingga

$$x^{**}_{(f_n,A)}\left(x^*\right) = (H)\int_A x^* f_n .$$

Akibatnya

$$x^{**}_{(f_n,A)}\left(x^*\right) = (H)\int_A x^* f_n$$
$$\leq (H)\int_A x^* f_{n+1} = x^{**}_{(f_{n+1},A)}\left(x^*\right).$$

Hal ini berarti barisan $\left\{(H)\int_A x^* f_n\right\}$ naik monoton pada A.

Karena barisan $\left\{(H)\int_A x^* f_n\right\}$ naik monoton dan untuk setiap $x^* \in X^*$ dan interval tertutup $A \subset [a,b]$ dan $\lim_{n\to\infty} x^{**}_{(f_n,A)}\left(x^*\right)$ untuk setiap $x^* \in X^*$ ada dan berhingga maka $\{(H)\int_A x^* f_n\}$ konvergen, katakan ke L sehingga

$$\lim_{n\to\infty} x^{**}_{(f_n,A)}\left(x^*\right) = \lim_{n\to\infty}(H)\int_A x^* f_n = L .$$

Jadi untuk sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ di atas terdapat bilangan asli $n_0 = n_0(\varepsilon, x^*)$ sehingga jika $n \geq n_0$ berlaku

$$\left\| (H)\int_A x^* f_n - L \right\| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Dipilih

$$m^*\left(\varepsilon, x^*, x\right) = \text{maks}\left\{n_0\left(\varepsilon, x^*\right), m_0\left(\varepsilon, x^*, x\right)\right\}$$

Dibentuk fungsi positif δ pada $[a,b]$ dengan rumus

$$\delta(x) = \delta_{m^*(\varepsilon, x^*, x)}(x)$$

untuk setiap $x \in [a,b]$ dan $x^* \in X^*$.

Dengan demikian untuk interval tertutup $A \subset [a,b]$ dan jika $\mathsf{D} = \left\{(D_1,x_1),(D_2,x_2),\ldots,(D_n,x_n)\right\}$ partisi Perron $\delta -$fine pada A berlaku

$$\left\| \mathsf{D}\sum_{x \in A} x^* f(x)\alpha(D) - L \right\|$$
$$\leq \left\| \mathsf{D}\sum_{x \in A} x^* f(x)\alpha(D) - \mathsf{D}\sum_{x \in A} x^* f_{m^*}(x)\alpha(D) \right\|$$
$$+ \left\| \mathsf{D}\sum_{x \in A} x^* f_{m^*}(x)\alpha(D) - (H)\int_A x^* f_{m^*} \right\|$$
$$+ \left\| (H)\int_A x^* f_{m^*} - L \right\|$$
$$\leq \mathsf{D}\sum_{x \in A} \left\| x^* f(x) - x^* f_{m^*}(x) \right\| \alpha(D) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4}$$
$$< \frac{\varepsilon}{4\alpha(A)+4}\mathsf{D}\sum_{x \in A}\alpha(D) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4}$$
$$< \varepsilon .$$

Hal ini berarti $x^* f$ terintegral Henstock pada A dan terdapat $x^{**}_{(f,A)} \in X^{**}$ sehingga

$$x^{**}_{(f,A)}\left(x^*\right) = (H)\int_A x^* f .$$

Jadi $f \in HD[a,b]$ dan

$$x^{**}_{(f,A)}\left(x^*\right) = L \text{ atau}$$
$$x^{**}_{(f,A)}\left(x^*\right) = \lim_{n\to\infty} x^{**}_{(f_n,A)}\left(x^*\right)$$

untuk setiap $x^* \in X^*$.

Karena berlaku untuk setiap $x^* \in X^*$, maka

$$x^{**}_{(f,A)} = \lim_{n\to\infty} x^{**}_{(f_n,A)}. \quad \square$$

Jika barisan fungsi $\{f_n\}$ konvergen lemah ke fungsi f pada A dan $x^* f_n(x) \geq 0$ hampir di mana-mana pada A untuk setiap n dan untuk setiap $x^* \in X^*$ maka f terintegral Henstock-Dunford.

Teorema 3.6 (Lemma Fatou) *Diberikan fungsi* $f, f_n : [a,b] \to X$ *dan* $f_n \in HD[a,b]$ *untuk setiap bilangan asli n. Jika untuk setiap interval tertutup* $A \subset [a,b]$ *barisan* $\{f_n\}$ *konvergen lemah ke fungsi* f *pada* A *dan* $x^* f_n(x) \geq 0$ *hampir di mana-mana pada* A *untuk setiap* n *dan untuk setiap* $x^* \in X^*$ *maka* $f \in HD[a,b]$ *dan*

$$x^{**}_{(f,A)}\left(x^*\right) \leq \liminf_{n\to\infty} x^{**}_{(f_n,A)}\left(x^*\right).$$

Bukti : Diambil sebarang interval tertutup $A \subset [a,b]$.

Untuk setiap $n \in N$ dan $x^* \in X^*$ didefinisikan fungsi $g_n : A \subset [a,b] \to X$ oleh

$$x^* g_n(x) = \inf_{k\geq n} \left\{x^* f_k(x)\right\}$$

untuk setiap $x \in A \subset [a,b]$.

Diperoleh bahwa barisan $\left\{x^* g_n\right\}$ naik monoton pada A untuk setiap $x^* \in X^*$, artinya bahwa barisan $\{g_n\}$ naik monoton lemah pada A.

Untuk setiap $n \in N$ diperoleh

$$x^* g_n(x) \leq x^* f_n(x)$$

untuk setiap $x \in A$.

Karena $x^* f_n(x) \geq 0$ hampir di mana-mana (*h.d*) pada A maka $x^* g_n(x) \geq 0$ *h.d* pada A.

Lebih lanjut untuk setiap interval tertutup $A \subset [a,b]$ dan $x^* \in X^*$ diperoleh

$$\lim_{n\to\infty} (H)\int_A x^* g_n \leq \lim_{n\to\infty} (H)\int_A x^* f_n$$
$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x^{**}_{(g_n,A)}\left(x^*\right) \leq \lim_{n\to\infty} x^{**}_{(f_n,A)}\left(x^*\right).$$

Karena barisan $\left\{x^* g_n\right\}$ naik monoton dan barisan $\left\{x^* f_n\right\}$ konvergen ke fungsi $x^* f$ untuk setiap $x^* \in X^*$ maka barisan $\left\{x^* g_n\right\}$ konvergen ke $x^* f$ untuk setiap $x^* \in X^*$.

Jadi barisan fungsi $\{x^* g_n\}$ konvergen ke fungsi $x^* f$ untuk setiap $x^* \in X^*$. Berarti barisan $\{g_n\}$ konvergen lemah ke fungsi f. Karena $\lim_{n\to\infty} (H)\int_A x^* g_n$ ada maka menurut Teorema Kekonvergenan Monoton diperoleh $f \in HD[a,b]$ dan untuk setiap interval tertutup $A \subset [a,b]$ diperoleh

$$x^{**}_{(f,A)}\left(x^*\right) = \lim_{n\to\infty} x^{**}_{(g_n,A)}\left(x^*\right) \leq \liminf_{n\to\infty} x^{**}_{(f_n,A)}\left(x^*\right).$$

Jadi

$$x^{**}_{(f,A)}\left(x^*\right) \leq \liminf_{n\to\infty} x^{**}_{(f_n,A)}\left(x^*\right)$$

untuk setiap $x^* \in X^*$.

Dengan demikian,

$$x^{**}_{(f,A)} \leq \liminf_{n\to\infty} x^{**}_{(f_n,A)}. \quad \square$$

Lemma Fatou memberikan akibat sebagai berikut.

Teorema 3.7 (Teorema Kekonvergenan Terdominasi Lebesgue) *Diberikan fungsi* $f, g, f_n : [a,b] \to X$, *dan fungsi* g *dan* f_n *masing-masing terintegral Henstock-Dunford pada* $[a,b]$ *untuk setiap bilangan asli n. Jika untuk setiap interval tertutup* $A \subset [a,b]$

(i) *barisan fungsi* $\{f_n\}$ *konvergen lemah ke fungsi* f *pada* A,

(ii) $\left|x^* f_n(x)\right| \leq x^* g(x)$ *untuk setiap* $n \in N$, $x^* \in X^*$, *dan* $x \in A$

maka $f \in HD[a,b]$ *dan*

$$x^{**}_{(f,A)} = \lim_{n\to\infty} x^{**}_{(f_n,A)} .$$

Bukti : Diberikan sebarang interval tertutup $A \subset [a,b]$.

Barisan fungsi $\{f_n\}$ konvergen lemah ke fungsi f pada A berarti barisan fungsi $\{f_n\}$ konvergen lemah ke fungsi f di setiap $x \in A$, yaitu untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$, $x \in A$, dan $x^* \in X^*$ terdapat bilangan asli $n_0 = n_0(\varepsilon, x^*, x)$ sedemikian hingga jika $n \geq n_0$ berlaku

$$\left| x^* f_n(x) - x^* f(x) \right| < \varepsilon$$

atau

$$x^* f_n(x) - \varepsilon < x^* f(x) < x^* f_n(x) + \varepsilon .$$

Menurut yang diketahui bahwa

$$\left| x^* f_n(x) \right| \leq x^* g(x)$$

Maka diperoleh

$$-x^* g(x) \leq x^* f_n(x) \leq x^* g(x) \qquad (3.3)$$

Berdasarkan ketaksamaan (3.3) bagian kanan diperoleh

$$x^* g(x) - x^* f_n(x) = x^*(g - f_n)(x) \geq 0 .$$

Karena barisan fungsi $\{x^* f_n\}$ konvergen ke fungsi $x^* f$ pada A untuk setiap $x^* \in X^*$ maka barisan fungsi $\{x^*(g - f_n)\}$ konvergen ke fungsi $x^*(g - f)$ pada A artinya barisan fungsi $\{g - f_n\}$ konvergen lemah ke fungsi $(g - f)$ pada A. Karena $x^*(g - f_n)(x) \geq 0$ untuk setiap n dan $x^* \in X^*$, maka menurut Lemma Fatou diperoleh $g - f \in HD[a,b]$ dan

$$x^{**}_{(g-f,A)}(x^*) \leq \lim_{n\to\infty} \inf x^{**}_{(g-f_n,A)}(x^*) .$$

Karena $-x^* g(x) \leq x^* f(x) \leq x^* g(x)$ untuk setiap $x \in A \subset [a,b]$ dan $x^* \in X^*$ dan karena $g \in HD[a,b]$ maka $f \in HD[a,b]$ dan

$$0 \leq x^{**}_{(g,A)}(x^*) - x^{**}_{(f,A)}(x^*) = x^{**}_{(g-f,A)}(x^*)$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \inf 0 \leq x^{**}_{(g-f_n,A)}(x^*)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \inf \left\{ x^{**}_{(g,A)}(x^*) + x^{**}_{(-f_n,A)}(x^*) \right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \inf \left\{ (H)\int_A x^* g + (H)\int_A x^*(-f_n) \right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \inf (H)\int_A x^* g \ +$$

$$\lim_{n\to\infty} \inf (H)\int_A x^*(-f_n)$$

$$= (H)\int_A x^* g \ - \lim_{n\to\infty} \sup (H)\int_A x^* f_n$$

$$= x^{**}_{(g,A)}(x^*) - \lim_{n\to\infty} \sup x^{**}_{(f_n,A)}(x^*)$$

$$x^{**}_{(g,A)}(x^*) - x^{**}_{(f,A)}(x^*)$$

$$\leq x^{**}_{(g,A)}(x^*) - \lim_{n\to\infty} \sup x^{**}_{(f_n,A)}(x^*)$$

Jadi,

$$x^{**}_{(f,A)}(x^*) \geq \lim_{n\to\infty} \sup x^{**}_{(f_n,A)}(x^*) . \qquad (3.4)$$

Selanjutnya berdasarkan ketaksamaan (3.3) bagian kiri diperoleh

$$x^* g(x) + x^* f_n(x) = x^*(g + f_n)(x) \geq 0 .$$

Karena barisan fungsi $\{x^* f_n\}$ konvergen ke fungsi $x^* f$ pada A untuk setiap $x^* \in X^*$ maka barisan fungsi $\{x^*(g + f_n)\}$ konvergen ke fungsi $x^*(g + f)$ pada A. Karena $x^*(g + f_n)(x) \geq 0$ untuk setiap n dan $x^* \in X^*$, maka menurut Lemma Fatou diperoleh $g + f \in HD[a,b]$ dan

$$x^{**}_{(g+f,A)}(x^*) \leq \lim_{n\to\infty} \inf x^{**}_{(g+f_n,A)}(x^*) .$$

Lebih lanjut

$$0 \leq x^{**}_{(g,A)}(x^*) + x^{**}_{(f,A)}(x^*) = x^{**}_{(g+f,A)}(x^*)$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \inf x^{**}_{(g+f_n,A)}(x^*)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \inf \left\{ x^{**}_{(g,A)}(x^*) + x^{**}_{(f_n,A)}(x^*) \right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \inf \left\{ (H)\int_A x^* g + (H)\int_A x^* f_n \right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \inf (H)\int_A x^* g \ + \lim_{n\to\infty} \inf (H)\int_A x^* f_n$$

$$= (H)\int_A x^* g \; + \liminf_{n\to\infty} (H)\int_A x^* f_n$$
$$= x^{**}_{(g,A)}\left(x^*\right) + \lim_{n\to\infty} \inf \; x^{**}_{(f_n,A)}\left(x^*\right)$$
$$x^{**}_{(g,A)}\left(x^*\right) + x^{**}_{(f,A)}\left(x^*\right)$$
$$\le x^{**}_{(g,A)}\left(x^*\right) + \lim_{n\to\infty} \inf \; x^{**}_{(f_n,A)}\left(x^*\right)$$

Jadi,

$$x^{**}_{(f,A)}\left(x^*\right) \le \lim_{n\to\infty} \inf \; x^{**}_{(f_n,A)}\left(x^*\right).$$

Dengan demikian dari (3.4) dan (3.5) diperoleh

$$\lim_{n\to\infty} \sup \; x^{**}_{(f_n,A)}\left(x^*\right) \le x^{**}_{(f,A)}\left(x^*\right)$$
$$\le \lim_{n\to\infty} \inf \; x^{**}_{(f_n,A)}\left(x^*\right)$$

$\Leftrightarrow$

$$x^{**}_{(f,A)}\left(x^*\right) = \lim_{n\to\infty} \; x^{**}_{(f_n,A)}\left(x^*\right)$$

untuk setiap $x^* \in X^*$.

Jadi,

$$x^{**}_{(f,A)} = \lim_{n\to\infty} \; x^{**}_{(f_n,A)}. \qquad \square$$

Kondisi selanjutnya yang menjamin bahwa fungsi f terintegral Henstock-Dunford selain barisan fungsi $\{f_n\}$ konvergen lemah ke fungsi f adalah barisan fungsi $\{x^* f_n\}$ terbatas. Hal ini ditungkan dalam teorema di bawah ini.

Teorema 3.10 (Teorema Kekonvergenan Terbatas) *Diberikan fungsi* $f, f_n : [a,b] \to X$, *dan* $f_n \in HD[a,b]$ *untuk setiap bilangan asli n. Jika untuk setiap interval tertutup* $A \subset [a,b]$ *barisan fungsi* $\{f_n\}$ *konvergen lemah ke fungsi* f *pada* A *dan ada bilangan riil* $M > 0$ *sehingga* $\left|x^* f_n(x)\right| \le M$ *untuk setiap* $n \in N,\, x^* \in X^*$, *dan* $x \in A$ *maka* $f \in HD[a,b]$ *dan*

$$x^{**}_{(f,A)} = \lim_{n\to\infty} \; x^{**}_{(f_n,A)}.$$

Bukti : Diberikan sebarang interval tertutup $A \subset [a,b]$.

Diambil $x^* g(x) = M > 0,\; M \in R$ untuk setiap $x \in A$. Karena barisan fungsi $\{f_n\}$ konvergen lemah ke fungsi f pada A dan $\left|x^* f_n(x)\right| \le x^* g(x) = M$ untuk setiap $n \in N,\, x^* \in X^*$, dan $x \in A$ maka berdasarkan Teorema Kekonvergenan Terdominasi Lebesgue diperoleh $f \in HD[a,b]$ dan (4.5)

$$x^{**}_{(f,A)} = \lim_{n\to\infty} \; x^{**}_{(f_n,A)}.$$

Jadi $f \in HD[a,b]$ dan

$$x^{**}_{(f,A)} = \lim_{n\to\infty} \; x^{**}_{(f_n,A)}. \qquad □12$$

4. PENUTUP

Berdasarkan hasil pembahasan yang diuraikan dalam bentuk teorema-teorema maka dapat diambil kesimpulan bahwa untuk menjamin fungsi f terintegral Henstock-Dunford dan limit barisannya sama dengan nilai fungsinya maka barisan fungsi yang terintegral Henstock-Dunford harus konvergen seragam atau barisan fungsi yang terintegral Henstock-Dunford harus konvergen lemah dan monoton lemah serta limitnya ada, atau barisan fungsinya konvergen lemah dan terbatas.

5. DAFTAR PUSTAKA

[1] Schwabik, S., Guoju, Ye. (2004), *Topics in Banach Space Integration*, Manuscrip in Preparation.

[2] Guoju, Ye., Tianqing, An. (2001), On Henstock-Dunford and Henstock-Pettis Integrals, *IJMMS*, 25(7): 467-478.

[3] Saifullah. (2003), *Integral Henstock-Dunford pada Ruang Euclide* ¡^{n}, Tesis, Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta.

[4] Solikhin, (2013), Perluasan Harnack dan Sifat Cauchy Integral henstock-Dunford pada Ruang Euclide R^n, *Jurnal Matematika*, 16(1): 8-12.

[5] Solikhin, Sumanto, Khabibah. (2013), *Locally dan Globally Small Riemann Sums Fungsi Terintegral Henstock-Dunford pada [a,b]*, Prosiding

Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika, 9 November 2013, A.8 halaman 55-64, ISBN 978–979-16353-9-4.

[6] Solikhin, Sumanto, Khabibah. (2012), Functionally Small Riemann Sums Fungsi Terintegral Henstock-Dunford pada [a,b], *Jurnal Sains dan Matematika*, 20(3): 58-63.

[7] Solikhin, Sumanto, Siti Khabibah. (2014), Essesntially Small Riemann Sums Fungsi Terintegral Henstock-Dunford pada [a,b], *Jurnal Matematika*, 17(1): 55-61.

[8] Solikhin, Sumanto, Abdul Aziz. (2014), *Fungsi Primitif Integral Henstock-Dunford pada [a,b]*, Laporan Penelitian, Jurusan Matematika FSM Undip, Semarang.