PATH KUAT TERKUAT DAN JARAK KUAT TERKUAT DALAM GRAF FUZZY

Lusia Dini Ekawati[1], Lucia Ratnasari[2]
[1,2]Jurusan Matematika FMIPA UNDIP
Jl. Prof. H. Soedarto, S. H, Tembalang, Semarang

Abstract. Fuzzy graph is a graph consists pair of vertex and edge that have degree of membership containing closed interval of real number [0,1] on each node and edge. A graph fuzzy $G(\sigma,\mu)$ is connected if the strength of connectedness between nodes *u* and *v* larger than zero for each $u,v \in S$. This paper will be explained about *ss-path* and *ss-distance*. Strongest stong path (*ss-path*) between two nodes in connected fuzzy graph if path is a strongest path as well as strong path. If G is a connected fuzzy graph then for each $u,v \in S$ there exists a strongest strong path for *u* to *v* . While *ss-distane* between two nodes *u* and *v* in connected fuzzy graph as the reciprocal of the strength of connectedness between nodes *u* and *v*. Using metric can be known that every connected fuzzy graph is *ss-selfcentered*.

Kata kunci : graf fuzzy, busur kuat, path kuat terkuat, jarak kuat terkuat.

1. PENDAHULUAN

Suatu graf adalah himpunan tidak kosong yang terdiri dari elemen-elemen yang disebut titik dan suatu daftar pasangan tidak terurut titik-titik tersebut yang disebut sisi [6]. Salah satu bidang pembahasan tentang fuzzy [5] yang terus berkembang pesat sampai sekarang adalah *Graf Fuzzy* yang diperkenalkan pertama kali oleh Rosenfeld pada tahun 1975. Konsep graf fuzzy yang terus berkembang tersebut mendorong para peneliti untuk terus mengembangkan dan menganalisa baik secara teoritis maupun aplikasi. Dalam tulisan ini dibahas path kuat terkuat dan jarak kuat terkuat dalam graf fuzzy.

2. GRAF FUZZY

Sebelum membahas path kuat terkuat dan jarak kuat terkuat terlebih dahulu dberikan definisi-definisi yang berkaitan dengan graf fuzzy.

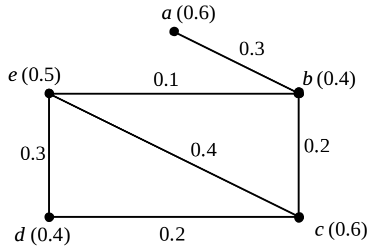
Definisi 2.1 [1] *Misalkan S adalah suatu himpunan titik. Graf fuzzy $G(\sigma,\mu)$ adalah sepasang fungsi dimana:*

i. $\sigma : S \to [0,1]$

ii. $\mu : S \times S \to [0,1]$ *sedemikian hingga* $\mu(uv) \le \sigma(u) \wedge \sigma(v) \quad \forall u,v \in S$

dengan σ merupakan derajat keanggotaan titik dan μ merupakan derajat keanggotaan sisi dari graf fuzzy. Notasi meet $\wedge = \inf\{\sigma(u),\sigma(v)\} \quad \forall u,v \in S$

Contoh 2.2 Diberikan himpunan titik *S* yaitu $S = \{a,b,c,d,e\}$ dan graf fuzzy $G(\sigma,\mu)$ dimana derajat keanggotaan titiknya adalah $\sigma(a) = 0.6$, $\sigma(b) = 0.4$, $\sigma(c) = 0.6$, $\sigma(d) = 0.4$, $\sigma(e) = 0.5$ dan derajat keanggotaan sisinya adalah $\mu(ab) = 0.3$, $\mu(bc) = 0.2$, $\mu(be) = 0.1$, $\mu(cd) = 0.2$, $\mu(ce) = 0.4$, $\mu(de) = 0.3$ maka graf fuzzy $G(\sigma,\mu)$ tersebut :



Gambar 1 Graf fuzzy $G(\sigma,\mu)$

Definisi 2.3 [1] *Suatu graf dasar dari $G(\sigma,\mu)$ adalah suatu graf yang dinotasikan dengan $G^*(\sigma^*,\mu^*)$ dan didefinisikan :*

i. $u \in \sigma^*$ jika $\sigma(u) > 0, \forall u \in S$

ii. $uv \in \mu^*$ jika $\mu(uv) > 0$, $\forall uv \in S \times S$

Definisi 2.4 [1] *Path ρ dalam suatu graf fuzzy $G(\sigma,\mu)$ merupakan urutan sisi-sisi berbeda $u_0u_1, u_1u_2, ..., u_{k-1}u_k$ sedemikian hingga $\mu(u_{i-1}u_i) > 0,\ 1 \le i \le k$. Dalam hal ini 'k' disebut panjang dari path. Pasangan* *berturut-turut* $u_{i-1}u_i$ *disebut busur pada path. Path yang menghubungkan titik u ke v dinotasikan dengan* $P\ (u-v)$.

Definisi 2.5 [1] *Suatu graf fuzzy* $G(\sigma,\mu)$ *disebut graf fuzzy kuat jika* $\mu(uv)=\sigma(u)\wedge\sigma(v), \forall(uv)\in\mu^*$.

Definisi 2.6 [1] *Suatu graf fuzzy* $G(\sigma,\mu)$ *disebut graf fuzzy lengkap jika* $\mu(uv)=\sigma(u)\wedge\sigma(v), \forall u,v\in\sigma^*$.

Definisi 2.7 [1] *Jika* u *dan* v *adalah titik-titik dalam* $G(\sigma,\mu)$ *dengan path* $u=v_0,v_1,v_2,...,v_{k-1},v_k=v$ *dan jika* u *dan* v *terhubung oleh path, maka kekuatan dari path didefinisikan sebagai* $\bigwedge_{i=1}^{k}\mu(v_{i-1}v_i)$ *yaitu kekuatan dari busur paling lemah.*

Contoh 2.8 Diberikan graf fuzzy $G(\sigma,\mu)$ pada Gambar 1, akan dicari kekuatan path dari titik a ke titik c yang didefinisikan sebagai kekuatan dari busur paling lemah, maka diperoleh :
Kekuatan path dari titik a ke titik c
Kekuatan path $abc=\inf\{0.3,0.2\}=0.2$
Kekuatan path $abec=\inf\{0.3,0.1,0.4\}=0.1$
Kekuatan path $abedc=\inf\{0.3,0.1,0.3,0.2\}=0.1$

Definisi 2.9 [1] *Jika* u *dan* v *terhubung oleh path dengan panjang 'k' maka* $\mu^k(uv)$ *didefinisikan*
$$\mu^k(uv)=\sup\{\mu(uv_1)\wedge\mu(v_1v_2)..\wedge\mu(v_{k-1}v)/u,v_1..,v_{k-1}\in S\}.$$

Contoh 2.10 Dengan melanjutkan Contoh 2.8, maka kekuatan path dari titik *a* ke titik *c* dengan panjang *k* :
$$\mu^2(ac)=\sup\{0.2\}=0.2$$
$$\mu^3(ac)=\sup\{0.1\}=0.1$$
$$\mu^4(ac)=\sup\{0.1\}=0.1$$

Definisi 2.11 [1] *Jika* $u,v\in S$, *kekuatan keterhubungan (strength of connectedness) antara* u *dan* v *didefinisikan sebagai*
$\mu^\infty(uv)=\sup\{\mu^k(uv)/k=1,2,3,...\}$.

Contoh 2.12 Dengan melanjutkan Contoh 2.10, maka kekuatan keterhubungan dari titik *a* ke titik *c* diperoleh :
$\mu^\infty(ac)=\sup\{0.2,0.1,0.1\}=0.2$

Definisi 2.13 [1] *Suatu graf fuzzy* $G(\sigma,\mu)$ *dikatakan terhubung jika* $\mu^\infty(uv)>0$, $\forall u,v\in\sigma^*$.

Definisi 2.14 [4] *Sebuah busur uv dari graf fuzzy dikatakan kuat jika* $\mu(uv)\geq\mu^\infty(uv)$ *dan path* $P\ (u-v)$ *disebut path kuat jika P hanya memuat busur-busur kuat.*

Contoh 2.15 Diberikan suatu graf fuzzy $G(\sigma,\mu)$ pada Gambar 1, busur-busur yang merupakan busur kuat adalah busur *ab, bc, ce,* dan *de*. Sedangkan path kuat dari *a* ke *c* adalah path abc karena busur *ab* dan busur *bc* adalah busur kuat.

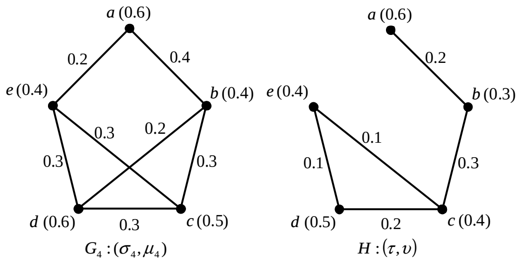
Definisi 2.16 [4] *Path* $P\ (u-v)$ *disebut path terkuat jika kekuatannya sama dengan* $\mu^\infty(uv)$.

Contoh 2.17 Path terkuat dari *a* ke *c* dalam graf fuzzy $G(\sigma,\mu)$ adalah path yang melalui busur ab, bc karena kekuatannya sama dengan $\mu^\infty(uv)$ yaitu 0.2.

Definisi 2.18 [3] *Graf fuzzy* $H(\tau,\upsilon)$ *disebut subgraf fuzzy dari* $G(\sigma,\mu)$ *jika*

i. $\tau(u)\leq\sigma(u),\forall u\in S$
ii. $\upsilon(uv)\leq\mu(uv),\forall uv\in S$.

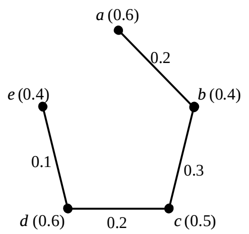
Contoh 2.19 Diberikan graf fuzzy $G_1(\sigma_1,\mu_1)$ dan $H(\tau,\upsilon)$ adalah subgraf $G_1(\sigma_1,\mu_1)$ sebagai berikut :



Gambar 2 Graf fuzzy $G_1(\sigma_1, \mu_1)$ dan Subgraf fuzzy $H(\tau, \upsilon)$

Definisi 2.20 [3] *Subgraf fuzzy $H(\tau, \upsilon)$ dari $G(\sigma, \mu)$ disebut spanning subgraf fuzzy dari $G(\sigma, \mu)$ jika $\tau(u) = \sigma(u)$, $\forall\ u \in S$. Dalam hal ini kedua graf fuzzy memiliki derajat keanggotaan titik yang sama, perbedaannya hanya terletak pada derajat keanggotaan sisinya.*

Contoh 2.21 Diberikan graf fuzzy $G_1(\sigma_1, \mu_1)$ pada Gambar 2, maka spanning subgraf fuzzy $H(\tau, \upsilon)$ dari $G_1(\sigma_1, \mu_1)$ adalah sebagai berikut :



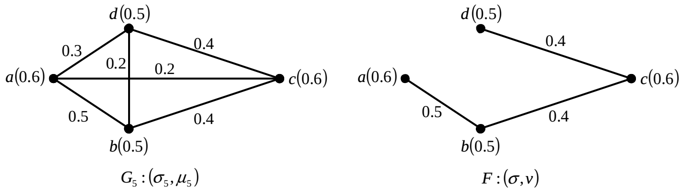
Gambar 3 Spanning subgraf fuzzy $H(\tau, \upsilon)$ dari $G_1(\sigma_1, \mu_1)$

Definisi 2.22 [3] *Misalkan $G(\sigma, \mu)$ suatu graf fuzzy, misal x,y adalah dua titik berbeda dan $G^{'}$ adalah subgraf fuzzy dari G yang diperoleh dengan menghapus sisi xy. Dengan kata lain $G^{'}(\sigma, \mu^{'})$ dimana $\mu^{'}(xy) = 0$ dan $\mu^{'}(ij) = \mu(ij)$ untuk semua ij adalah sisi yang lain. Jika $\mu^{'\infty}(uv) < \mu^{\infty}(uv)$ untuk suatu $u, v \in \sigma$ maka xy adalah jembatan di G.*

Contoh 2.23 Diberikan graf fuzzy $G(\sigma, \mu)$ pada Gambar 2.1, busur dalam graf fuzzy $G(\sigma, \mu)$ yang merupakan jembatan adalah busur *bc*, busur *ce*, dan busur *de* karena terdapat busur yang memenuhi $\mu^{'\infty}(uv) < \mu^{\infty}(uv)$. Sedangkan yang bukan merupakan jembatan adalah busur *ab*, busur *be* dan busur *cd* karena semua busur tidak memenuhi $\mu^{'\infty}(uv) < \mu^{\infty}(uv)$.

Definisi 2.24 [4] *Graf fuzzy terhubung $G(\sigma, \mu)$ disebut tree fuzzy jika memiliki spanning subgraf fuzzy $F(\sigma, v)$, yang merupakan tree, dimana untuk semua busur uv yang tidak dalam F terdapat path dari u ke v di F yang kekuatannya lebih dari $\mu(uv)$ dengan kata lain $\mu(uv) < v^{\infty}(uv)$.*

Contoh 2.25 Diberikan graf fuzzy terhubung $G_2(\sigma_2, \mu_2)$



Gambar 4 Graf fuzzy $G_2(\sigma_2, \mu_2)$ dan spanning subgraf fuzzy $F(\sigma, v)$

karena busur *uv* yang tidak dalam $F(\sigma, v)$ terdapat path dari *u* ke *v* di $F(\sigma, v)$ yang kekuatannya lebih dari $\mu(uv)$ maka graf fuzzy terhubung $G_2(\sigma_2, \mu_2)$ adalah tree fuzzy.

Teorema 2.26 [3] *Jika uv adalah jembatan maka $\mu^{\infty}(uv) = \mu(uv)$.*

Bukti :

Misalkan *uv* adalah jembatan dan $\mu^{\infty}(uv) > \mu(uv)$, maka terdapat path *(u-v)* terkuat dengan kekuatan lebih besar dari $\mu(uv)$ dan semua sisi-sisi dari path terkuat tersebut mempunyai kekuatan lebih besar dari $\mu(uv)$. Path tersebut dengan sisi *uv* sehingga berbentuk sikel dimana *uv* adalah sisi terlemah. Dengan demikian kontradiksi dengan *uv* adalah jembatan yang berarti $\mu^{\infty}(uv) = \mu(uv)$.

Definisi 2.27 [4] *Spanning tree maksimum dari graf fuzzy terhubung $G(\sigma, \mu)$ adalah spanning subgraf fuzzy $F : (\sigma, v)$ sehingga F* adalah tree dan untuk $\sum_{u \neq v} \gamma(u, v)$ adalah* *maksimum diantara semua spanning subgraf fuzzy $F(\sigma, v)$.*

Definisi 2.28 [2] *Jarak-μ (μ-distance) dinotasikan dengan $d(uv)$ adalah panjang μ terkecil dari suatu path $(u-v)$, dimana panjang μ dari path $\rho : uv_1, v_1v_2 ... v_{k-1}v$ adalah $l(\rho) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\mu(u_{i-1}u_i)}$.*

Definisi 2.29 [2]
Esentrisitas dari titik v didefinisikan sebagai μ*-distance* maksimum dari setiap titik u ke titik v dan dinotasikan sebagai $e(v) = \max_{u \in \sigma^*}(d(uv))$.

Definisi 2.30 [2] *Titik yang mempunyai esentrisitas minimum dalam graf fuzzy terhubung disebut center (titik pusat).*

Definisi 2.31 [2] *Graf fuzzy terhubung $G(\sigma, \mu)$ disebut seflcentered jika setiap titik adalah titik pusat.*

3. PATH KUAT TERKUAT (SS-PATH) DALAM GRAF FUZZY

Definisi 3.1 [4] *Path P $(u-v)$ dalam graf fuzzy G disebut path kuat terkuat (ss-path) jika P adalah path $(u-v)$ terkuat serta path $(u-v)$ kuat.*

Contoh 3.2 Diberikan graf fuzzy $G_5(\sigma_5, \mu_5)$ pada Gambar 2.3, path kuat terkuat (*ss-path*) dari *b* ke *d* adalah path yang melalui busur *bc, cd.*

Teorema 3.3 [4] *Jika u, v adalah dua titik dalam graf fuzzy terhubung G, maka ada path kuat terkuat (ss-path) dari u ke v.*
Bukti :
G adalah graf fuzzy terhubung maka G mempunyai paling sedikit satu spanning tree maksimum T. Karena T adalah spanning tree maksimum maka sebarang dua titik dalam G terdapat suatu path dengan busur-busur kuat sehingga path tersebut merupakan path kuat. Setiap titik *u, v* dalam spanning tree maksimum *T*, hanya ada path tunggal diantara dua titik. Karena path tunggal maka kekuatan path tersebut sama dengan $\mu^{\infty}(uv)$ sehingga path tersebut adalah path terkuat. Dengan demikian ada path kuat terkuat dari *u* ke *v* dalam graf fuzzy terhubung G.

Teorema 3.4 [4] *Busur uv adalah kuat terkuat jika dan hanya jika busur uv kuat.*
Bukti :
$\Rightarrow$ Busur *uv* adalah busur yang menghubungkan titik *u* dan *v* sehingga busur *uv* merupakan path yang terdiri dari satu sisi Karena busur *uv* kuat terkuat (*ss-arc*) maka path *uv* merupakan path kuat terkuat yang berarti merupakan path kuat. Karena path *uv* path kuat maka $\mu(uv) = \mu^{\infty}(uv)$. Dengan demikian busur *uv* merupakan busur kuat.
$\Leftarrow$ Busur *uv* adalah busur kuat maka $\mu(uv) \geq \mu^{\infty}(uv)$. Busur uv merupakan path yang menghubungkan titik u dan titik v yang terdiri dari satu sisi. Karena path *uv* terdiri dari satu busur *uv* maka $\mu(uv) = \mu^{\infty}(uv)$. Ini berarti bahwa path *uv* merupakan path terkuat. Karena path uv merupakan path kuat dan path terkuat maka path uv kuat terkuat. Dengan demikian busur *uv* merupakan busur *uv* kuat terkuat.

Setiap jembatan fuzzy adalah busur kuat terkuat, tetapi busur kuat terkuat tidak perlu menjadi jembatan fuzzy, seperti dalam graf dasar masing-masing busur kuat dan juga terkuat, namun tidak perlu menjadi jembatan.
Contoh 3.5 Diberikan graf dasar $G^* : (\sigma^*, \mu^*)$ dari graf fuzzy terhubung $G : (\sigma, \mu)$ pada Gambar 3.2. Semua busur-busur dalam graf dasar $G^* : (\sigma^*, \mu^*)$ adalah busur-busur kuat maka busur-busur tersebut merupakan busur kuat terkuat, tetapi busur-busur tersebut bukan merupakan jembatan fuzzy karena semua busur tidak memenuhi $\mu'^{\infty}(uv) < \mu^{\infty}(uv)$.

Akibat 3.6 [4] *Busur dalam graf fuzzy terhubung G adalah kuat terkuat jika dan hanya jika busur tersebut adalah busur dari sedikitnya satu spanning tree maksimum G.*

Bukti :

⇒ Setiap graf fuzzy terhubung G sedikitnya memiliki satu spanning tree maksimum T. Setiap spanning tree maksimumdalam graf fuzzy terhubung G mengandung busur kuat dari G sehingga busur dalam spanning tree maksimum adalah busur kuat terkuat.

⇐ Dalam tree fuzzy G memiliki spanning tree maksimum unik. Setiap spanning tree maksimum hanya mengandung busur kuat dari G. Sehingga semua busur dalam T adalah busur kuat terkuat. Dengan demikian busur uv adalah busur dari spanning maksimum maka busur uv dalam graf fuzzy terhubung G adalah kuat terkuat.

Akibat 3.7 [4] *Busur kuat terkuat (ss-arc) dari graf fuzzy terhubung G adalah jembatan fuzzy jika dan hanya jika G adalah tree fuzzy.*

Bukti :

⇒ Setiap graf fuzzy terhubung G sedikitnya memiliki satu spanning tree maksimum T. Setiap spanning tree maksimum dalam graf fuzzy terhubung G hanya mengandung busur kuat sehingga semua busur dalam T adalah busur kuat terkuat dan merupakan jembatan fuzzy memiliki spanning tree maksimum unik.

⇐ Dalam tree fuzzy G memiliki spanning tree maksimum unik. Karena semua busur dalam T adalah busur kuat terkuat maka semua busur dalam T adalah jembatan fuzzy dari G.

Akibat 3.8 [4] *Graf fuzzy G adalah tree fuzzy jika dan hanya jika ada path kuat terkuat (ss-path) yang unik dalam G diantara setiap dua titik dari G.*

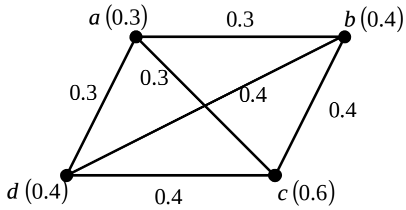
Bukti :

⇒ Dalam tree fuzzy G memiliki spanning tree maksimum yang unik. Sehingga ada path kuat terkuat yang unik dalam G di antara setiap dua titik dari G.

⇐ Dalam G terdapat dua titik yang saling terhubung. Dua titik yang saling terhubung tersebut terdapat path kuat terkuat yang unik dan juga terdapat spanning tree maksimum yang unik. Karena dalam G terdapat path kuat terkuat yang unik maka G adalah tree fuzzy.

Semua busur dalam graf fuzzy lengkap adalah busur kuat terkuat (*ss-arc*). Graf fuzzy lengkap paling banyak memiliki satu jembatan fuzzy. Oleh karena itu semua path $(u-v)$ dalam graf fuzzy lengkap tanpa jembatan fuzzy adalah *ss-path*

Contoh 3.9 Diberikan graf fuzzy lengkap $G_9:(\sigma_9,\mu_9)$ sebagai berikut :



Gambar 5 Graf fuzzy lengkap $G_9:(\sigma_9,\mu_9)$

Karena semua busur pada graf fuzzy lengkap adalah busur kuat maka semua busur dalam graf fuzzy lengkap adalah busur kuat terkuat (*ss-arc*). Graf fuzzy lengkap paling banyak memiliki satu jembatan fuzzy. Oleh karena itu semua path $(u-v)$ dalam graf fuzzy lengkap tanpa jembatan fuzzy adalah path kuat terkuat $(u-v)$.

4. JARAK KUAT TERKUAT (SS-DISTANCE) DALAM GRAF FUZZY

Definisi 4.1 [4] *Jarak kuat terkuat (ss-distance) antara setiap dua titik u,v dalam graf fuzzy $G:(\sigma,\mu)$ dinotasikan $(d_{ss}(uv))$ adalah berbanding terbalik dengan kekuatan keterhubungan antara titik u dan v.*

$$d_{ss}(uv)=\begin{cases}\dfrac{1}{\mu^{\infty}(uv)} & \text{jika} \quad u\neq v\\ 0 & \text{jika} \quad u=v\end{cases}$$

Jika $G:(\sigma,\mu)$ adalah tidak tehubung, dua titik u dan v di G tidak dihubungkan oleh path, maka $\mu^{\infty}(uv)=0$ dan $d_{ss}(uv)=\infty$.

Contoh 4.2 Diberikan graf fuzzy $G:(\sigma,\mu)$ pada Gambar 1, akan ditunjukkan *ss-distance* $(d_{ss}(uv))$ antara titik *a* dan titik *b* sebagai berikut :

$$d_{ss}(ab)=\frac{1}{\mu^{\infty}(ab)}=\frac{1}{0.3}=3.33$$

Dengan cara yang sama, maka dapat dicari *ss-distance* $(d_{ss}(uv))$ dari setiap titik ke setiap titik yang lain seperti tabel berikut :

Tabel 1 *ss-distance* $(d_{ss}(uv))$ dalam Graf Fuzzy $G:(\sigma,\mu)$

No	Titik *u* dan titik *v*	$\mu^{\infty}(uv)$	*ss-distance* $(d_{ss}(uv))$
1	Titik *a* dan titik *b*	0.3	3.33
2	Titik *a* dan titik *c*	0.2	5
3	Titik *a* dan titik *d*	0.2	5
4	Titik *a* dan titik *e*	0.2	5
5	Titik *b* dan titik *c*	0.2	5
6	Titik *b* dan titik *d*	0.2	5
7	Titik *b* dan titik *e*	0.2	5
8	Titik *c* dan titik *d*	0.3	3.33
9	Titik *c* dan titik *e*	0.4	2.5
10	Titik *d* dan titik *d*	0.3	3.33

Teorema 4.3 [4] *ss-distance* $(d_{ss}(uv))$ *adalah metrik di S dengan* $\forall u,v,w\in S$.

1). $d_{ss}(uv)\geq 0 \quad \forall u,v\in S$

2). $d_{ss}(uv)=d_{ss}(vu)$

3). $d_{ss}(uw)\leq d_{ss}(uv)+d_{ss}(vw)$

Bukti :

Diberikan graf fuzzy $G:(\sigma,\mu)$, misal diambil sembarang titik u dan v dalam graf fuzzy $G:(\sigma,\mu)$.

1). $\mu^{\infty}(uv)\geq 0$, maka $d_{ss}(uv)\geq 0 \quad \forall u,v\in S$.

2). Karena kebalikan path dari *u* ke *v* adalah path dari *v* ke *u* dan sebaliknya, maka
$$d_{ss}(uv)=\frac{1}{\mu^{\infty}(uv)}=\frac{1}{\mu^{\infty}(vu)}=d_{ss}(vu).$$

3). Karena $\mu^{\infty}(uw)$ adalah transitif, diperoleh
$$\mu^{\infty}(uw)\geq \mu^{\infty}(uv)\wedge\mu^{\infty}(vw)$$
sehingga
$$\frac{1}{\mu^{\infty}(uw)}\leq\frac{1}{\mu^{\infty}(uv)\wedge\mu^{\infty}(vw)}$$
$$\frac{1}{\mu^{\infty}(uw)}\leq\frac{1}{\mu^{\infty}(uv)}+\frac{1}{\mu^{\infty}(vw)},$$
maka $d_{ss}(uw)\leq d_{ss}(uv)+d_{ss}(vw)$.

Teorema 4.4 [4] *Setiap graf terhubung* $G:(\sigma,\mu)$ *adalah* $ss-selfcentered$.

Bukti :

Misalkan *P* adalah path $(u-v)$ terkuat di *G* yang memiliki kekuatan *m* dan misalkan *m* adalah kekuatan keterhubungan yang infimum antara dua titik di *G*. Andaikan $\mu(xy)=m$ dimana xy adalah busur di *P*. Ambil sembarang titik $w\in\sigma^{*}$, pertama membuktikan bahwa $\mu^{\infty}(wx)=m$ atau $\mu^{\infty}(wy)=m$.

Andaikan tidak, ada path P_1 dari $(w-x)$ terkuat dengan kekuatan m_1 dan path P_2 dari $(w-y)$ terkuat dengan kekuatan m_2 sehingga setiap $m_1,m_2>m$, maka kedua P_1 dan P_2 tidak mengandung busur xy. Jadi setiap busur dalam $P_1\cup P_2$ memiliki kekuatan lebih besar dari *m*. Path $P_1\cup P_2$ mengandung path $(x-y)$, tetapi tidak mengandung busur xy dan memiliki kekuatan yang lebih besar dari *m*, maka terdapat path P_3 dari $(u-v)$ yang mengandung P_1 atau P_2 atau $P_1\cup P_2$ memiliki kekuatan yang lebih besar dari *m*, yang bertentangan dengan asumsi. Oleh karena itu $\mu^{\infty}(wx)=m$ atau $\mu^{\infty}(wy)=m$. Karena *m* adalah infimum maka $\mu^{\infty}(wx)\leq\mu^{\infty}(wz)$ untuk setiap titik lain $z\in\sigma^{*}$. Berarti
$$\frac{1}{\mu^{\infty}(wx)}\geq\frac{1}{\mu^{\infty}(wz)}$$
$$d_{ss}(wx)\geq d_{ss}(wz)\quad\forall z\in\sigma^{*}.$$
Sehingga
$$e_{ss}(w)=d_{ss}(wx)=\frac{1}{\mu^{\infty}(wx)}=\frac{1}{m}\quad\forall w\in\sigma^{*}.$$
Oleh karena itu *G* adalah $ss-selfcentered$.

Contoh 4.5 Diberikan graf fuzzy terhubung $G:(\sigma,\mu)$ pada Gambar 1, akan ditunjukkan bahwa graf terhubung $G:(\sigma,\mu)$ adalah $ss-selfcentered$. Berikut akan dicari $ss-esentrisitas$ (e_{ss}) dan *ss-center* di $G:(\sigma,\mu)$ sebagai berikut :

1). $e_{ss}(a)=d_{ss}(ac)=\frac{1}{\mu^{\infty}(ac)}=\frac{1}{m}=\frac{1}{0.2}=5$

2). $e_{ss}(b)=d_{ss}(bc)=\frac{1}{\mu^{\infty}(bc)}=\frac{1}{m}=\frac{1}{0.2}=5$

3). $e_{ss}(c)=d_{ss}(ca)=\frac{1}{\mu^{\infty}(ca)}=\frac{1}{m}=\frac{1}{0.2}=5$

4). $e_{ss}(d)=d_{ss}(da)=\frac{1}{\mu^{\infty}(da)}=\frac{1}{m}=\frac{1}{0.2}=5$

5). $e_{ss}(e) = d_{ss}(ea) = \frac{1}{\mu^{\infty}(ea)} = \frac{1}{m} = \frac{1}{0.2} = 5$

sehingga diperoleh $e_{ss}(a) = 5$, $e_{ss}(b) = 5$, $e_{ss}(c) = 5$, $e_{ss}(d) = 5$, $e_{ss}(e) = 5$.

Kemudian akan dicari ss-esentrisitas minimum di $G:(\sigma,\mu)$ = $\inf\{e_{ss}(v)/v \in S\}$= 5. Karena setiap titik di $G:(\sigma,\mu)$ memiliki ss-esentrisitas minimum, maka setiap titik di $G:(\sigma,\mu)$ adalah *ss-center*. Oleh karena itu graf fuzzy terhubung tersebut adalah *ss-selfcentered*.

5. PENUTUP

Dari pembahasan yang telah diuraikan diatas diperoleh :

1. Terdapat path kuat terkuat (*ss-path*) antara setiap pasangan titik *u* dan *v* dalam graf fuzzy terhubung *G*.
2. Jarak kuat terkuat (*ss-distance*) antara titik *u* dan titik *v* dalam graf fuzzy terhubung *G* berbanding terbalik dengan kekuatan keterhubungan antara titik *u* dan titik *v*.
3. Dengan menggunakan metrik dapat diketahui bahwa setiap graf fuzzy terhubung adalah $ss-selfcentered$.

6. DAFTAR PUSTAKA

[1] Gani, A. Nagoor, dan Malarvizhi, J. (2009), Isomorphism Properties on Strong Fuzzy Graphs, *International Journal of Algorithms, Computational and Mathematical*, 2 (1).

[2] Gani, A. Nagoor dan J. Malarvizhi. (2010), On Antipodal Fuzzy Graph, *Applied Mathematical Sciences*, 4(43) :2145-2155.

[3] Moderson, John. N dan Premchand S. Nair. (2000), *Fuzzy Graphs and Fuzzy Hypergraphs*. Physica-Verlag, Heidelberg.

[4] Sameena, K dan M.S Sunitha. (2010), On ss-paths and ss-distance in Fuzzy Graphs, *Journal of Fuzzy mathematics*, 5(1):1-6.

[5] Susilo, Frans. (2006), *Himpunan dan Logika Kabur serta Aplikasinya*. Yogyakarta : Graha Ilmu.

[6] Wilson, J. Robin and John J. Watskin (1990), *Graphs : An Introductory Approach*, New York, University Course Graphs, Network and Design.