

PERLUASAN HARNACK DAN SIFAT CAUCHY INTEGRAL HENSTOCK-DUNFORD PADA RUANG EUCLIDE \mathbb{R}^n

Solikhin

Jurusan Matematika FMIPA UNDIP

Jl. Prof. H. Soedarto, S. H, Tembalang, Semarang

e-mail : solikhin@yahoo.com

Abstract. In this paper we study Henstock-Dunford integral on the Euclidean space \mathbb{R}^n . We discuss some properties of the integrable. We prove the Harnack Extension theorems and the Cauchy extension theorems for Henstock-Dunford integral on the Euclidean space \mathbb{R}^n .

Keyword : Henstock-Dunford integral, Harnack extension and Cauchy extension.

1. PENDAHULUAN

Sejak diperkenalkan oleh Ralph Henstock pada tahun 1960-an, yang merupakan pengintakan dari integral Riemann, integral Henstock telah mengalami perkembangan baik dari segi teori maupun aplikasinya [1], [4], [6]. berdasarkan kajian tentang integral Henstock banyak sifat-sifat yang telah diungkap baik dalam ruang real \mathbb{R} [2], [7] maupun ruang Euclide \mathbb{R}^n [5].

Dunford mendefinisikan integralnya pada fungsi terukur lemah f dari \mathbb{R}^n ke ruang Banach X (X^* ruang dualnya) dan untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi bernilai real x^*f terintegral Lebesgue. Integral ini dikenal dengan integral Dunford [10]. Kajian integral Dunford telah diperluas ke dalam integral tipe Riemann (integral Henstock) pada ruang \mathbb{R}^n , yaitu dengan mendefinisikan fungsi bernilai realnya x^*f terintegral Henstock. Hasilnya dikenal dengan integral Henstock-Dunford pada ruang \mathbb{R}^n [3]. Penelitian selanjutnya, integral Henstock-Dunford pada ruang \mathbb{R}^n digeneralisasi ke dalam ruang Euclide \mathbb{R}^n [9]. Pembahasannya meliputi sifat-sifat sederhana dan beberapa teorema kekonvergenan [9].

Berdasarkan uraian tersebut, penulis akan meneliti sifat-sifat lebih lanjut dari integral Henstock-Dunford pada ruang Euclide \mathbb{R}^n . Sifat-sifat ini digeneralisasi dari integral Henstock pada ruang real \mathbb{R} .

2. INTEGRAL HENSTOCK-DUNFORD PADA RUANG EUCLIDE \mathbb{R}^n

Pada tulisan ini, dibahas definisi integral Henstock-Dunford pada ruang Euclide \mathbb{R}^n , sifat-sifat sederhana, dan fungsi primitifnya mengacu pada [9].

Definisi 2.1 [9] Diberikan X ruang Banach dan X^* ruang dualnya, volume- α pada \mathbb{R}^n dan sel $E \subset \mathbb{R}^n$. Fungsi $f : E \rightarrow X$ dikatakan terintegral Henstock-Dunford pada E jika untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi x^*f terintegral Henstock pada E dan untuk setiap sel $A \subset E$ terdapat vektor $x_{(f,A,\alpha)}^{**} \in X^{**}$ sehingga

$$x_{(f,A,\alpha)}^{**}(x^*) = (H) \int_A x^* f.$$

Selanjutnya vektor $x_{(f,A,\alpha)}^{**} \in X^{**}$ di atas disebut nilai integral Henstock-Dunford fungsi f pada A dan ditulis

$$x_{(f,A,\alpha)}^{**} = (HD) \int_A f.$$

Jika f terintegral Henstock-Dunford pada E , ditulis $f \in HD(E, \alpha)$.

Teorema 2.2 [9] Jika $f \in HD(E, \alpha)$ maka $f \in HD(A, \alpha)$ untuk setiap sel bagian $A \subset E$.

Bukti :

Jelas berdasarkan definisi.

Definisi 2.3 [9] Diberikan $f \in HD(E, \alpha)$ dan $\mathbf{I}(E)$ koleksi semua sel bagian di dalam E . Fungsi $F : \mathbf{I}(E) \rightarrow X$ dengan rumus

$$F(A) = x_{(f,A,\alpha)}^{**} = (HD) \int_A f$$

dan $F(\emptyset) = 0$, untuk setiap $A \in \mathbf{I}(E)$ disebut fungsi primitif-HD fungsi f .

Berdasarkan Definisi 2.3 maka fungsi F merupakan fungsi aditif.

Teorema 2.4 [9] Jika $f \in HD(E, \alpha)$ dengan F sebagai primitif-HDnya maka F merupakan fungsi aditif pada E .

Bukti :

Fungsi $f \in HD(E, \alpha)$ berarti untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi $x^* f$ terintegral Henstock pada E dan untuk setiap sel $A \subset E$ dan sel $B \subset E$ dengan $\mu_\alpha(A \cap B) = 0$ berturut-turut terdapat vektor $x_{(f,A,\alpha)}^{**} \in X^{**}$ dan $x_{(f,B,\alpha)}^{**} \in X^{**}$ sehingga

$$x_{(f,A,\alpha)}^{**}(x^*) = (H) \int_A x^* f \text{ dan}$$

$$x_{(f,B,\alpha)}^{**}(x^*) = (H) \int_B x^* f .$$

Dengan demikian diperoleh

$$x_{(f,A,\alpha)}^{**}(x^*) + x_{(f,B,\alpha)}^{**}(x^*) =$$

$$(H) \int_A x^* f + (H) \int_B x^* f$$

$$= (H) \int_{A \cup B} x^* f$$

$$= x_{(f,A \cup B,\alpha)}^{**}(x^*)$$

untuk setiap $x^* \in X^*$.

Jadi

$$x_{(f,A,\alpha)}^{**} + x_{(f,B,\alpha)}^{**} = x_{(f,A \cup B,\alpha)}^{**} \text{ atau}$$

$$F(A) + F(B) = F(A \cup B) .$$

Akibat 2.5 [9] Jika $f \in HD(E, \alpha)$ dengan F sebagai primitif-HDnya dan E_1, E_2, \dots, E_p sel-sel di dalam E yang

tidak saling tumpang-tindih dan $E = \bigcup_{i=1}^p E_i$ maka

$$F(E) = \sum_{i=1}^p F(E_i) = \sum_{i=1}^p x_{(f,E_i,\alpha)}^{**} .$$

Bukti :

Karena $f \in HD(E, \alpha)$ dengan F sebagai primitif-HDnya, $E = \bigcup_{i=1}^p E_i$ dengan $E_i^0 \cap E_j^0 = \emptyset$ untuk setiap $i \neq j$ maka diperoleh

$$F(E) = F\left(\bigcup_{i=1}^p E_i\right)$$

$$= x_{(f, \bigcup_{i=1}^p E_i, \alpha)}^{**}$$

$$= x_{(f,E_1,\alpha)}^{**} + x_{(f,E_2,\alpha)}^{**} + \dots + x_{(f,E_p,\alpha)}^{**}$$

$$= F(E_1) + F(E_2) + \dots + F(E_p)$$

$$= \sum_{i=1}^p F(E_i)$$

$$= \sum_{i=1}^p x_{(f,E_i,\alpha)}^{**} .$$

Selanjutnya berdasarkan Definisi 2.1 maka integral Henstock-Dunford pada E dapat dinyatakan seperti dalam teorema berikut.

Teorema 2.6 [9] Fungsi $f \in HD(E, \alpha)$ jika dan hanya jika terdapat fungsi aditif $F : \mathbf{I}(E) \rightarrow X$ sehingga untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ dan $x^* \in X^*$ terdapat fungsi positif δ pada E sehingga jika $A \subset E$ sel dan $\mathbf{D} = \{(D_i, \bar{x}_i) : i = 1, 2, \dots, p\}$ partisi Perron δ -fine pada A berlaku

$$\left| \sum_{i=1}^p x^*(f(\bar{x}_i)\alpha(D_i) - F(D_i)) \right| < \varepsilon \text{ atau}$$

$$\left| \sum_{i=1}^p x^* f(\bar{x}_i)\alpha(D_i) - x^* F(D_i) \right| < \varepsilon .$$

3. PERLUASAN HARNACK DAN SIFAT CAUCHY

Berikut ini dibahas perluasan Harnack dan Sifat Cauchy integral Henstock-Dunford pada ruang Euclidean \mathbb{R}^n .

Teorema 3.1 [3], [5], [8] (Ekstensi Harnack) Diberikan X ruang Banach dan X^* ruang dualnya, volume- α pada

\mathbb{R}^n , sel $E \subset \mathbb{R}^n$, dan fungsi $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. Himpunan G merupakan himpunan tertutup di dalam E dan $\{E_i\}$ $i=1,2,3,\dots$ barisan himpunan sederhana yang tidak saling tumpang-tindih dengan $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = E - G$. Jika $f \in HD(G, \alpha)$ dan $f \in HD(E_i, \alpha)$ untuk setiap $i \in \mathbb{N}$ dengan

$$\left| \sum_{i=1}^{\infty} (H) \int_{E_i} x^* f \right| < \infty$$

untuk setiap $x^* \in X^*$ maka $f \in HD(E, \alpha)$ dan

$$(HD) \int_A f = (HD) \int_E f \chi_G + \sum_{i=1}^{\infty} (HD) \int_{E_i} f.$$

Bukti :

Diberikan bilangan $\varepsilon > 0$ sebarang. Karena $f \in HD(G, \alpha)$ maka terdapat fungsi positif δ_0 pada G sehingga untuk setiap partisi Perron δ_0 -fine $\mathbf{D}_0 = \{(D, \bar{x})\}$ pada G berlaku

$$\left| (\mathbf{D}_0) \sum x^* f(\bar{x}) \alpha(D) - (H) \int_G x^* f \right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

untuk setiap $x^* \in X^*$.

Karena $f \in HD(E_i, \alpha)$ untuk setiap i maka untuk bilangan $\varepsilon > 0$ di atas dan $x^* \in X^*$ terdapat fungsi positif δ_i pada E_i sehingga untuk setiap partisi Perron δ_i -fine $\mathbf{D}_i = \{(D, \bar{x})\}$ pada E_i berlaku

$$\left| (\mathbf{D}_i) \sum x^* f(\bar{x}) \alpha(D) - (H) \int_{E_i} x^* f \right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Kemudian, karena diketahui

$$\left| \sum_{i=1}^{\infty} (H) \int_{E_i} x^* f \right| < \infty$$

maka untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ di atas terdapat bilangan asli n sehingga untuk $i > N$ berlaku

$$\left| \sum_{i>N} (H) \int_{E_i} x^* f \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dibentuk fungsi positif δ pada E dengan rumus

$$\delta(\bar{x}) = \begin{cases} \min \{ \delta_0(\bar{x}), \delta_1(\bar{x}), \dots, \delta_N(\bar{x}) \}, & \bar{x} \in G \cup \left(\bigcup_{i=1}^N E_i \right) \\ \min \{ \delta_0(\bar{x}), \delta_{N+k}(\bar{x}) \}, & \bar{x} \in \bigcup_{i=N+k}^{\infty} E_i, k=1,2,\dots \end{cases}$$

Dengan demikian untuk setiap partisi Perron δ -fine $\mathbf{D} = \{(D, \bar{x})\}$ pada E diperoleh

$$\begin{aligned} & \left| (\mathbf{D}) \sum x^* f(\bar{x}) \alpha(D) - \left((H) \int_G x^* f + \sum_{i>N} (H) \int_{E_i} x^* f \right) \right| \\ & \leq \left| (\mathbf{D}_0) \sum x^* f(\bar{x}) \alpha(D) - (H) \int_G x^* f \right| \\ & + \left| \sum_{i=1}^{n_0} (\mathbf{D}_i) \sum x^* f(\bar{x}) \alpha(D) - \sum_{i<N} (H) \int_{E_i} x^* f \right| \\ & + \left| \sum_{i>n_0} (H) \int_{E_i} x^* f \right| \\ & < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Hal ini berarti $x^* f$ terintegral Henstock pada E dan untuk setiap sel $A \subset E$ terdapat vektor $x_{(f,A,\alpha)}^{**} \in X^{**}$ sehingga

$$x_{(f,A,\alpha)}^{**}(x^*) = (H) \int_G x^* f + \sum_{i=1}^{\infty} (H) \int_{E_i} x^* f.$$

Dengan kata lain $f \in HD(E, \alpha)$ dan

$$x_{(f,A,\alpha)}^{**}(x^*) = (H) \int_G x^* f + \sum_{i=1}^{\infty} (H) \int_{E_i} x^* f$$

Untuk setiap $x^* \in X^*$.

Jadi untuk setiap $x^* \in X^*$ diperoleh

$$x_{(f,A,\alpha)}^{**} = (HD) \int_E f \chi_G + \sum_{i=1}^{\infty} (HD) \int_{E_i} f.$$

Ekuivalen

$$(HD) \int_A f = (HD) \int_E f \chi_G + \sum_{i=1}^{\infty} (HD) \int_{E_i} f.$$

Teorema 3.2 [5], [8] (Sifat Cauchy)
 Diberikan X ruang Banach dan X^* ruang dualnya, volume- α pada \mathbb{I}^n , dan sel $E \subset \mathbb{I}^n$. Jika $f \in HD(E', \alpha)$ untuk setiap $E' \subset E^0$ dan

$$\lim_{E' \rightarrow E} (HD) \int_{E'} f = \sum_{i=1}^{\infty} (HD) \int_{E_i} f$$

ada maka $f \in HD(E, \alpha)$ dan

$$(HD) \int_A f = \sum_{i=1}^{\infty} (HD) \int_{E_i} f.$$

Bukti :

Diberikan bilangan $\varepsilon > 0$ sebarang dan $x^* \in X^*$. Karena $f \in HD(E', \alpha)$ untuk setiap $E' \subset E^0$ maka terdapat fungsi positif δ' pada E' sehingga untuk setiap partisi Perron δ' -fine $\mathbf{D}' = \{(D, \bar{x})\}$ pada E' berlaku

$$\left| (\mathbf{D}') \sum x^* f(\bar{x}) \alpha(D) - (H) \int_{E'} x^* f \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Diketahui bahwa

$$\lim_{E' \rightarrow E} (HD) \int_{E'} f = \sum_{i=1}^{\infty} (HD) \int_{E_i} f$$

ada, berarti untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ dan $x^* \in X^*$ di atas terdapat bilangan $\eta > 0$ sehingga untuk $E' \subset E^0$ dengan $\alpha(E - E') < \eta$ berlaku

$$\left| (H) \int_{E'} x^* f - \sum_{i=1}^{\infty} (H) \int_{E_i} x^* f \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Untuk sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ dan $x^* \in X^*$ di atas, dibentuk fungsi δ pada E dengan rumus

$$\delta(\bar{x}) = \begin{cases} \min \{ \delta'(\bar{x}) \}, & \bar{x} \in E' \\ \min \left\{ \delta'(\bar{x}), \frac{\varepsilon}{3 |x^* f(\bar{x})| + 1} \right\}, & \bar{x} \notin E' \end{cases}$$

Diambil sebarang partisi Perron δ -fine $\mathbf{D} = \mathbf{D}' \cup \mathbf{D}'' = \{(D, \bar{x})\}$ pada E , dengan \mathbf{D}' dan \mathbf{D}'' berturut-turut partisi yang terkait dengan $\bar{x} \in E'$ dan $\bar{x} \notin E'$. Dengan demikian diperoleh

$$\begin{aligned} & \left| (\mathbf{D}) \sum x^* f(\bar{x}) \alpha(D) - \sum_{i=1}^{\infty} (H) \int_{E_i} x^* f \right| = \\ & \left| (\mathbf{D}' \cup \mathbf{D}'') \sum x^* f(\bar{x}) \alpha(D) - \sum_{i=1}^{\infty} (H) \int_{E_i} x^* f \right| \\ & \leq \left| (\mathbf{D}') \sum_{\bar{x} \in E'} x^* f(\bar{x}) \alpha(D) - (H) \int_{E'} x^* f \right| \\ & \quad + \left| (H) \int_{E'} x^* f - \sum_{i=1}^{\infty} (H) \int_{E_i} x^* f \right| \\ & \quad + \left| (\mathbf{D}'') \sum_{\bar{x} \notin E'} x^* f(\bar{x}) \alpha(D) \right| \\ & \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + (\mathbf{D}'') \left| x^* f(\bar{x}) \right| \sum_{\bar{x} \notin E'} \alpha(D) \\ & \leq \frac{2\varepsilon}{3} + \left| x^* f(\bar{x}) \right| \frac{\varepsilon}{3 |x^* f(\bar{x})| + 1} \\ & < \varepsilon. \end{aligned}$$

Hal ini berarti $x^* f$ terintegral Henstock pada E dan untuk setiap sel $A \subset E$ terdapat vektor $x_{(f,A,\alpha)}^{**} \in X^{**}$ sehingga

$$x_{(f,A,\alpha)}^{**}(x^*) = \sum_{i=1}^{\infty} (H) \int_{E_i} x^* f.$$

Jadi $f \in HD(E, \alpha)$ dan

$$(H) \int_A x^* f = \sum_{i=1}^{\infty} (H) \int_{E_i} x^* f.$$

Jadi untuk setiap $x^* \in X^*$ diperoleh

$$(HD) \int_A f = \sum_{i=1}^{\infty} (HD) \int_{E_i} f.$$

4. PENUTUP

Dari pembahasan di muka diperoleh kesimpulan bahwa perluasan Harnack dan sifat Cauchy pada integral Henstock dapat digeneralisasi untuk integral Henstock-Dunford pada ruang Euclide \mathbb{I}^n . Untuk penelitian lebih lanjut, dapat dikaji mengenai sifat-sifat smal Riemann sums

fungsi terintegral Henstock-Dunford pada ruang Euclidean \mathbb{R}^n .

5. DAFTAR PUSTAKA

- [1] Boccuto, A., Skvortsov, A.V. (2004), Henstock-Kurzweil Type Integration of Riesz-Space-Valued Functions and Applications to Walsh Series, *Real Analysis Exchange*, 29(1): 419-439.
 - [2] Gordon, R.A. (1994), *The Integral of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*, Mathematical Society, USA.
 - [3] Guoju, Ye., Tianqing, An. (2001), On Henstock-Dunford and Henstock-Pettis Integrals, *IJMMS*, 25(7): 467-478.
 - [4] Heikkila, S. (2011), Monotone Convergence Theorems for Henstock-Kurzweil Integrable Functions and Applications, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 377(1): 286-295.
 - [5] Indrati, Ch. R. (2002), *Integral Henstock-Kurzweil di dalam Ruang Euclidean Berdimensi-n*, Disertasi, Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta.
 - [6] Indrati, Ch.R., Surodjo, Budi. (2000), *Aplikasi Integral Henstock-Kurzweil pada Medan Vektor*, Lembaga Penelitian UGM, Yogyakarta.
 - [7] Lee P.Y. (1989), *Lanzhou Lectures on Henstock Integration*, World Scientific, Singapore.
 - [8] Rahman, Hairur. (2005), *Integral Henstock-Pettis pada ruang Euclidean \mathbb{R}^n* , Tesis, Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta.
 - [9] Saifullah. (2003), *Integral Henstock-Dunford pada Ruang Euclidean \mathbb{R}^n* , Tesis, Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta.
 - [10] Schwabik, S., Guoju, Ye. (2004), *Topics in Banach Space Integration*, Manuscript in Preparation.
-