

KINERJA SISTEM LUP TERTUTUP DENGAN PENGENDALI LINEAR QUADRATIC GAUSSIAN PADA SISTEM MASSA PEGAS

Pradesia¹, Widowati²

^{1,2}Jurusan Matematika FMIPA UNDIP

^{1,2}Jl. Prof. H. Soedarto, S. H, Tembalang, Semarang

E-mail: widowati_math@undip.ac.id

wiwied_mathundip@yahoo.com

Abstract. Linear Quadratic Gaussian (LQG) controller is one of the controllers used to stabilize a plant. The plant is an object that is controlled. The procedure to find this controller as follows; first, the plant is balanced so that controllability and observability Grammians is equal to square Hankel singular values diagonal matrix, then look for the controller gain and estimator gain that are solutions of Riccati equations. Next, construct a state space realization of LQG controller. To verify the performance of the obtained controller, it was applied for the spring mass system. Further, by using MATLAB program, the performance of the closed loop system with the LQG controller and the open loop system is compared. The simulation results show that the closed loop system can be stabilized in less than 10 seconds, whereas the open loop system can be stabilized in 3000 seconds. This indicate that the performance of the closed loop system with LQG controller better than the open loop system.

Keywords : Balanced plant, LQG controller, closed loop system, controller performance, spring mass system

1. PENDAHULUAN

Elemen fleksibel atau tidak kaku, misalnya kabel, cenderung mempunyai bentuk tertentu pada suatu kondisi pembebanan. Bentuk tersebut dapat berubah apabila pembebanan berubah. Pada umumnya struktur fleksibel berdimensi hingga dan merupakan sistem linear terkendali dan terobservasi dengan pole kompleks dan peredam kecil. Dari pengertian tersebut diharapkan sekalipun struktur fleksibel mendapat gangguan, akan tetap dapat mempertahankan kestabilannya.

Untuk itu dibutuhkan alat bantu agar sistem terhindar dari kerusakan akibat gangguan. Metode *Linear Quadratic Gaussian* (LQG) [2, 5] setimbang merupakan salah satu cara yang digunakan untuk mendapatkan pengendali yang dinamakan pengendali LQG. Oleh karena itu, pada paper ini akan dikaji tentang pengendali LQG setimbang yang diaplikasikan pada sistem massa pegas (struktur fleksibel). Selanjutnya menguji kinerja dari pengendali LQG serta

menganalisa kestabilan dari sistem lup tertutupnya melalui simulasi.

Struktur fleksibel [1] didefinisikan sebagai sistem linear berdimensi hingga, terkendali, dan terobservasi dengan peredam kecil, direpresentasikan dengan persamaan matriks differensial orde ke dua $M\ddot{q} + D\dot{q} + Kq = B_o u, \quad y = C_{oq}q + C_{ov}\dot{q}$ dengan q adalah vektor pemindahan (keadaan) $n \times 1$, u adalah vektor input $s \times 1$, y adalah vektor output $r \times 1$, M adalah matriks massa $n_2 \times n_2$, D adalah matriks peredam $n \times n$, K adalah matriks kekakuan $n \times n$, matriks input B_o adalah $n \times s$, matriks pemindahan output C_q adalah $r \times n$, dan matriks percepatan keluaran C_v adalah $r \times n$. Nilai n merupakan nilai derajat kebebasan dari sistem (koordinat kebebasan linier yang mendeskripsikan struktur berdimensi hingga).

2. LINEAR QUADRATIC GAUSSIAN SETIMBANG

Dalam pendesainan pengendali LQG [3, 5, 8], diasumsikan plant stabil, terkendali dan terobservasi. Plant

direpresentasikan dengan persamaan ruang keadaan

$$\dot{x} = Ax + Bu + v \quad y = Cx + w \quad (2.1)$$

dengan x adalah vektor keadaan $n \times 1$, u adalah vektor input $s \times 1$, y adalah vektor output $r \times 1$, v dan w adalah gangguan (*noise*). A , B , C adalah matriks konstan real.

Grammian keterkendalian dan keterobservasian [7] dari Sistem (2.1), W_c dan W_o merupakan matriks definit positif dan memenuhi persamaan Lyapunov

$$AW_c + W_c A^T + BB^T = 0 \quad A^T W_o + W_o A + C^T C = 0 \quad (2.2)$$

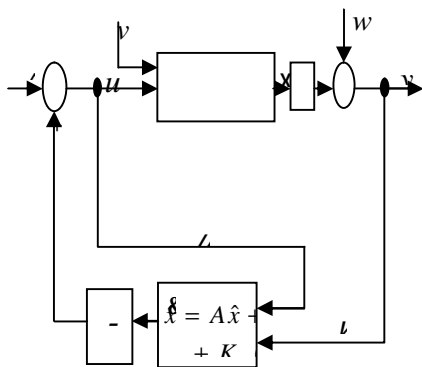
Untuk menyetimbangkan plant [4, 6, 9], keadaan x ditransformasi dengan matriks nonsingular R oleh $\bar{x} = Rx$, sehingga grammian sistem ditransformasikan menjadi

$$\bar{W}_c = \bar{W}_o = \begin{matrix} 2 \\ \end{matrix} = \text{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \quad (2.3)$$

$$\gamma_i \geq \gamma_{i+1}, i = 1, \dots, n-1$$

dengan $\bar{W}_c = R^{-1} W_c R^{-T}$, $\bar{W}_o = R^T W_o R$, γ_i merupakan Nilai Singular Hankel ke- i dari sistem.

Diagram blok pengendali LQG diberikan pada Gambar 1.



Gambar 1 Pengendali LQG

Kinerja sistem ditentukan dengan gain estimator (K_c) dan gain pengendali (K_p) sedemikian hingga indeks kinerja J [1],

$$J^2 = E \left(\int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T P u) dt \right), \dots \dots \dots (2.4)$$

adalah minimal, dengan P merupakan bobot matriks masukan definit positif dan Q merupakan bobot matriks keadaan semidefinit positif. Minimal dari J didapat untuk umpan balik $u = -K_p \hat{x}$ dengan matriks gain, $K_p = B^T S_c$ dan S_c adalah *solution of the controller Riccati equation (CARE)*

$$A^T S_c + S_c A - S_c B B^T S_c + Q = 0, \dots (2.5a)$$

Gain estimator optimal diberikan dengan $K_e = S_e C^T$ dimana S_e adalah *solution of the estimator Riccati equation (FARE)*

Untuk kasus dari $Q = C^T C$ dan $V = B B^T$, terdapat matriks diagonal definit positif M sedemikian hingga solusi dari CARE dan FARE

$$S_c = S_e = M = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) \quad (2.6)$$

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n > 0$$

yang merupakan representasi LQG setimbang dengan $\mu_i; i = 1, \dots, n$ adalah nilai karakteristik LQG.

Selanjutnya, untuk mendefinisikan kinerja sistem lup tertutup [1], misalkan $\Gamma_o = \text{diag}(\gamma_{oi})$ dan $\Gamma_c = \text{diag}(\gamma_{ci}), i = 1, \dots, n$ merupakan matriks nilai singular Hankel dari sistem lup terbuka dan lup tertutup. Matriks B ,

$$B = \Gamma_o^{-2} \Gamma_c^{-2} = \text{diag}(\beta_i) = \text{diag}(\gamma_{oi}^2 / \gamma_{ci}^2) \quad (2.7)$$

merupakan rasio nilai singular Hankel lup terbuka (γ_{oi}) dan lup tertutup (γ_{ci}). Jadi B merupakan ukuran kinerja dari sistem lup tertutup.

Persamaan lyapunov untuk grammian keterkontrolan lup tertutup W_c , adalah

$$(A - B B^T S_c) W_c + W_c (A^T - S_c B B^T) + B B^T = 0 \quad (2.8)$$

Dengan mensubsitusikan $S_c = \Gamma_o^{-2}$ dan $W_c = \Gamma_o^2 / 3$ ke Persamaan (2.8), diperoleh $A \Gamma_o^2 + \Gamma_o^2 A^T + B B^T = 0 \dots \dots \dots (2.9)$

3. PENGENDALI LQG SETIMBANG UNTUK STRUKTUR FLEKSIBEL

Pada bagian ini dikaji struktur fleksibel dalam representasi lup terbuka setimbang yang menghasilkan solusi diagonal dominan dari persamaan CARE dan FARE, sifat yang berkaitan serta representasi dari LQG setimbang. Untuk persamaan CARE diperoleh sifat 1, seperti berikut.

Sifat 1.

Jika matriks diagonal $Q = \text{diag}(q_i I_2)$, $i=1, \dots, n$, maka terdapat q_i q_{oi} , dengan $q_{oi} > 0$, $i=1, \dots, n$, dengan

$$S_{ci} \equiv \frac{\beta_{ci} - 1}{2\gamma_i^2}, \quad \beta_{ci} = \sqrt{1 + \frac{2q_i \gamma_i^2}{\zeta_i \omega_i}}, \dots \dots \dots (3.1)$$

sedemikian sehingga $S_c \equiv \text{diag}(S_{ci} I_2)$ merupakan solusi dari persamaan (2.5a).

Bukti:

Perbedaan antara dua entri-entri diagonal dari pasangan masing-masing adalah finit, karenanya S_c adalah diagonal dominan dalam bentuk:
 $S_c \equiv \text{diag}(S_{c1}, S_{c1}, \dots, S_{cn}, S_{cn})$. Dalam kasus ini, Persamaan (2.5a) dapat ditulis menjadi

$$S_{ci}(A_i + A_i^T) - S_{ci}^2 B_i B_i^T + q_i I_2 \equiv 0, \quad i=1, \dots, n \quad (3.2)$$

Untuk sistem setimbang [1]

$$B_i B_i^T \equiv -\gamma_i^2 (A_i + A_i^T), \text{ dan}$$

$A_i + A_i^T = -2\zeta_i \omega_i I_2$. Oleh karena itu persamaan (3.2) dapat ditulis

$$S_{ci}^2 + \frac{S_{ci}}{\gamma_i^2} - \frac{q_i}{2\zeta_i \omega_i \gamma_i^2} \equiv 0, \quad i=1, \dots, n, \dots \dots \dots (3.3)$$

Ada dua solusi dari persamaan diatas, tapi untuk sistem stabil dan untuk $q_i=0$ itu diperlukan bahwa $S_{ci}=0$, oleh karena itu Persamaan (3.1) merupakan solusi dari Persamaan (3.12). ■

Sedangkan untuk persamaan FARE, diperoleh Sifat 2, seperti di bawah ini

Sifat 2 Jika matriks diagonal $V = \text{diag}(v_i I_2)$, $i=1, \dots, n$, maka terdapat v_i v_{oi} , dimana $v_{oi} > 0$, $i=1, \dots, n$, dengan

$$S_{ei} \equiv \frac{\beta_{ei} - 1}{2\gamma_i^2}, \text{ dimana } \beta_{ei} = \sqrt{1 + \frac{2v_i \gamma_i^2}{\zeta_i \omega_i}}, \dots \dots \dots (3.4)$$

sedemikian sehingga $S_e \equiv \text{diag}(S_{ei} I_2)$ merupakan solusi dari Persamaan (2.5b).

Bukti:

Perbedaan antara dua entri-entri diagonal dari pasangan masing-masing adalah finit, karenanya S_e adalah diagonal utama dalam bentuk: $S_e \equiv \text{diag}(S_{e1}, S_{e1}, \dots, S_{en}, S_{en})$.

Dalam kasus ini, persamaan (2.5b) dapat ditulis menjadi

$$S_{ei}(A_i + A_i^T) - S_{ei}^2 C_i C_i^T + v_i I_2 \equiv 0, \quad i=1, \dots, n \dots \dots (3.5)$$

Untuk sistem setimbang [1]

$$C_i C_i^T \equiv -\gamma_i^2 (A_i + A_i^T), \text{ dan}$$

$A_i + A_i^T = -2\zeta_i \omega_i I_2$. Oleh karena itu Persamaan (2.9) sekarang

$$S_{ei}^2 + \frac{S_{ei}}{\gamma_i^2} - \frac{v_i}{2\zeta_i \omega_i \gamma_i^2} \equiv 0, \quad i=1, \dots, n, \dots \dots \dots (3.6)$$

Ada dua solusi dari persamaan diatas, tapi untuk sistem stabil dan untuk $v_i=0$ itu diperlukan bahwa $S_{ei}=0$, oleh karena itu Persamaan (3.4) merupakan solusi khusus dari Persamaan (3.6).

Untuk solusi dominan diagonal dari CARE dan FARE, ($S_c \equiv \text{diag}(S_{ci} I_2)$, $S_e \equiv \text{diag}(S_{ei} I_2)$, $i=1, 2, \dots, n$), pendekatan solusi setimbang M dari FARE dan CARE, yang mana juga diagonal dominan yaitu

$$M \equiv \text{diag}(\mu_i I_2) \quad \text{dimana} \quad \mu_i = \sqrt{S_{ci} S_{ei}} \quad i=1, \dots, n, \dots \dots \dots (3.7)$$

Transformasi R_{lqg} dari representasi lup terbuka setimbang (A_b, B_b, C_b) untuk representasi LQG setimbang $(A_{lqg}, B_{lqg}, C_{lqg})$ adalah secara diagonal dominan juga,

$$R_{lqg} \equiv \text{diag}(r_{lqg1} I_2, r_{lqg2} I_2, \dots, r_{lqgn} I_2), \quad r_{lqgi} = \left(\frac{S_{ei}}{S_{ci}} \right)^{1/4}, \dots \dots (3.8)$$

dengan representasi LQG setimbang merupakan pendekatan yang didapat dari transformasi $(A_{lqg}, B_{lqg}, C_{lqg}) \equiv (A_b, R_{lqg}^{-1} B_b, C_b R_{lqg})$.

Solusi diagonal dominan CARE dan FARE menentukan hubungan antara bobot

dan *root locus*, yang berguna untuk pendesainan pengendali.

Misalkan bobot Q menjadi

$$Q = \text{diag}(0, 0, \dots, q_1 I_2, \dots, 0, 0) \dots\dots\dots(3.9)$$

Maka untuk q_i pasangan lup tertutup dari kutub fleksibel ($\lambda_{cri} \pm \lambda_{cii}$) sebagai berikut

$$(\lambda_{cri} \pm j\lambda_{cii}) \cong (\beta_{ci} \lambda_{ori} \pm \lambda_{oii}) \dots\dots\dots(3.10)$$

dengan β_{ci} didefinisikan dalam Persamaan (3.1). Perhatikan bahwa untuk bobot kecil q_i matriks A dari sistem lup tertutup merupakan diagonal dominan, yaitu $A_o \cong \text{diag}(A_{oi}), i=1, \dots, n,$ dan $A_{oi} = A_i - B_i B_i^T S_{ci}$.

Selanjutnya dapat diperoleh,

$$A_{oi} \cong A_i + 2S_{ci} \gamma_i^2 (A_i + A_i^T) \dots\dots\dots(3.12)$$

Dan mensubsitusikan A_i ke Persamaan (3.12), sehingga diperoleh

$$A_{oi} \cong \begin{bmatrix} -\beta_{ci} \zeta_i \omega_i & -\omega_i \\ \omega_i & -\beta_{ci} \zeta_i \omega_i \end{bmatrix}, \dots\dots\dots(3.13)$$

dengan β_{ci} seperti pada Persamaan (3.1).

Hasil ini dapat berarti bahwa bobot Q seperti pada Persamaan (3.9) mengubah pasangan ke- i kutub kompleks dari struktur fleksibel, dan meninggalkan pasangan sisanya dari kutub yang hampir tidak berubah. Hanya bagian riil dari pasangan kutub yang diubah (hanya menggerakkan kutub terpisah dari axis imajiner dan menstabilkan sistem), dan bagian imajiner dari sisa kutub tidak diubah.

Sifat diatas memiliki penafsiran tambahan. Catat bahwa bagian riil dari kutub ke- i lup terbuka adalah $\lambda_{oi} = -\zeta_i \omega_i$, dan bahwa bagian riil dari kutub ke- i lup tertutup adalah $\lambda_{ci} = -\zeta_{ci} \omega_i$; catat juga bahwa tinggi dari puncak resonansi lup terbuka adalah $\alpha_{oi} = \kappa/2 \zeta_i \omega_i$, dengan κ adalah konstan, dan puncak resonansi lup tertutup adalah $\alpha_{ci} = \kappa/2 \zeta_{ci} \omega_i$. Dari Persamaan (3.10) mendapatkan $\beta_{ci} = \lambda_{cri} / \lambda_{ori}$, karenanya

$$\beta_{ci} = \frac{\zeta_{ci}}{\zeta_i} = \frac{\alpha_{oi}}{\alpha_{ci}}, \dots\dots\dots(3.14)$$

adalah rasio dari faktor peredam lup tertutup dan terbuka, atau itu adalah rasio dari puncak resonansi lup terbuka dan tertutup. Oleh karena itu, jika penindihan dari puncak resonansi ke- i dengan faktor β_{ci} diperlukan, bobot q_i yang sesuai didapat dari Persamaan (3.1)

$$q_i \cong \frac{(\beta_{ci}^2 - 1) \zeta_i \omega_i}{2 \gamma_i^2} \dots\dots\dots(3.15)$$

Koefisien β_{ci} dapat juga ditafsirkan sebagai rasio dari Nilai Singular Hankel lup terbuka dan tertutup, atau sebagai rasio dari varian lup terbuka (σ_{oi}^2) dan tertutup (σ_{ci}^2) keadaan dibangkitkan dengan masukan *white noise*

$$\beta_{ci} = \frac{\gamma_{oi}^2}{\gamma_{ci}^2} = \frac{\sigma_{oi}^2}{\sigma_{ci}^2} \dots\dots\dots(3.16)$$

Tafsiran berikut ini dari persamaan Lyapunov lup tertutup

$$(A - BB^T S_c) \Gamma_c^2 + \Gamma_c^2 (A - BB^T S_c)^T + BB^T = 0 \dots\dots\dots(3.16a)$$

Yang mana untuk pasangan ke- i dari variable adalah

$$(A_i - B_i B_i^T S_{ci}) \gamma_{ci}^2 + \gamma_{ci}^2 (A_i - B_i B_i^T S_{ci})^T + B_i B_i^T = 0 \dots\dots\dots(3.17b)$$

Dengan mesubstitusikan Persamaan (2.9) ke persamaan diatas, memberikan

$$\gamma_{ci}^2 + 2\gamma_{ci}^2 \gamma_{oi}^2 S_{ci} - \gamma_{oi}^2 = 0, \dots\dots\dots(3.18)$$

atau

$$\frac{\gamma_{oi}^2}{\gamma_{ci}^2} \cong 1 + S_{ci} \sigma_{oi}^2 = \beta_{ci} \dots\dots\dots(3.19)$$

Plot β_{ci} dari berkenaan dengan bobot q_i dan Nilai Singular Hankel γ_i .

Estimator kutub diubah dengan cara yang sama. Menunjukkan

$$V = \text{diag}(0, 0, \dots, v_i I_2, \dots, 0, 0) \dots\dots\dots(3.20)$$

Maka untuk v_i pasangan lup tertutup dari kutub fleksibel ($\lambda_{cri} \pm \lambda_{cii}$) sebagai berikut

$$(\lambda_{cri} \pm j\lambda_{cii}) \cong (\beta_{ei} \lambda_{ori} \pm \lambda_{oii}), \dots\dots\dots(3.21)$$

dengan β_{ei} didefinisikan dalam Persamaan (3.7).

Hal tersebut diatas digunakan untuk pengendali dengan otoritas peredam

terbatas, yaitu pengendali yang hanya memodifikasi sistem frekuensi natural. Otoritas pengendali adalah terbatas, dengan nilai q_{oi} dan v_{oi} diperkenalkan sebelumnya. Untuk otoritas peredam terbatas memiliki q_i q_{oi} dan v_i v_{oi} .

4. PROSEDUR PENDESAIN PENGENDALI LQG SETIMBANG

Pada bagian ini diberikan langkah-langkah pendesainan pengendali LQG secara matematik:

1. Diberikan plant dengan realisasi (A,B,C) .
2. Menyetimbangkan plant sehingga realisasi (A_b,B_b,C_b) adalah setimbang yang memenuhi

$$\bar{W}_c = \bar{W}_o = \begin{matrix} \square & \\ & \square \end{matrix} = \begin{matrix} \square & \\ & \square \end{matrix} = \text{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \\ \gamma_i \geq 0, i = 1, \dots, n$$

dengan γ adalah nilai singular Hankel.

3. Menentukan *controller gain* $(K_p=B^T S_c)$ dan *estimator gain* $(K_e=S_e C^T)$ dengan S_c dan S_e adalah solusi dari persamaan Riccati

$$A^T S_c + S_c A - S_c B B^T S_c + Q = 0, \\ A S_e + S_e A^T - S_e C^T C S_e + V = 0.$$

4. Mengkonstruksi persamaan ruang keadaan pengendali LQG setimbang,

$$\dot{\hat{x}} = A \hat{x} + B u + K_e (y - C \hat{x}) \\ = (A - K_p B - K_e C) \hat{x} + (K_e) y \\ u = -K_p \hat{x},$$

dengan $A_p=A - K_p B-K_e C$; $B_p=K_e$; $C_p=-K_p$; $D_p=0$

5. SISTEM LUP TERTUTUP DENGAN PENGENDALI LQG

Setelah pengendali LQG setimbang diperoleh, selanjutnya dibentuk sistem lup tertutup dengan persamaan ruang keadaan

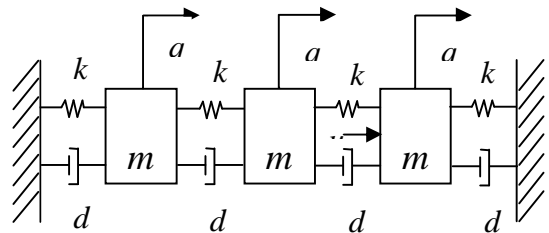
$$\dot{x}_o = A_o x_o + B_o r + B_v v + B_w w \quad y = C_o x_o + w, \dots (5.1) \\ \text{dengan}$$

$$A_o = \begin{bmatrix} A - BK_p & BK_p \\ 0 & A - K_e C \end{bmatrix}, \dots (5.2)$$

$$B_o = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \quad B_v = \begin{bmatrix} I \\ I \end{bmatrix} \quad B_w = \begin{bmatrix} 0 \\ -K_e \end{bmatrix} \quad C_o = [C \ 0], (5.3)$$

6. IMPLEMENTASI PENGENDALI LQG PADA SISTEM MASSA PEGAS

Sebagai verifikasi dari metode yang telah, pada bagian ini diberikan studi kasus untuk pengendali sistem berorde enam pada sistem massa pegas (struktur fleksibel) menggunakan metode LQG.



Gambar 2 Diagram

Persamaan matriks dari struktur fleksibel tersebut dapat di tulis dalam bentuk persamaan differensial orde dua, sebagai berikut

$$m_1 \ddot{q}_1 + (d_1 + d_2) \dot{q}_1 + (k_1 + k_2) q_1 - d_2 \dot{q}_2 - k_2 q_2 = 0$$

$$m_2 \ddot{q}_2 + (d_2 + d_3) \dot{q}_2 + (k_2 + k_3) q_2 - d_2 \dot{q}_1 - k_2 q_1 - d_3 \dot{q}_3 - k_3 q_3 = 0$$

$$m_3 \ddot{q}_3 + (d_3 + d_4) \dot{q}_3 + (k_3 + k_4) q_3 - d_3 \dot{q}_2 - k_3 q_2 = u$$

dengan massa $m_1 = m_2 = m_3 = 1$, kekakuan $k_1 = 10, k_2 = 3, k_3 = 4, k_4 = 0$, dan matriks peredam $D=0,004K+0,001M$, dengan K, M berturut-turut merupakan matriks kekakuan dan massa. Gaya input di aplikasikan pada massa m_3 , dan output adalah kecepatan massa yang sama.

Dari persamaan di atas dapat diperoleh persamaan ruang keadaan

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx,$$

dengan

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -13 & -0,054 & 3 & 0,013 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0,013 & -7 & -0,03 & 4 & 0,017 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0,017 & -4 & -0,017 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0], \quad D = 0$$

Untuk mengecek kestabilan dari plant (sistem lup terbuka) di atas, perhatikan nilai eigennya $\lambda_{01,02} = -0.0305 \pm 3.8084 i$; $\lambda_{03,04} = -0.0180 \pm 2.9197 i$; $\lambda_{05,06} = -0.0021 \pm 0.9851 i$.

Terlihat bahwa semua bagian real dari nilai eigen tersebut adalah negatif, maka sistem stabil. Selain itu plant juga terkendali dan terobservasi, hal ini dapat diselidiki dari rank matriks keterkendalian sama dengan rank matriks keterobservasian samadengan 6 (enam). Didapat nilai singular Hankel $\gamma_1 = 8,7357$, $\gamma_2 = 8,7174$, $\gamma_3 = 1,2958$, $\gamma_4 = 1,2879$, $\gamma_5 = 0,2477$, dan $\gamma_6 = 0,2457$.

Matriks solusi CARE, S_c dan solusi FARE, S_e , adalah sama dan diagonal dominan, yakni merupakan pendekatan LQG setimbang

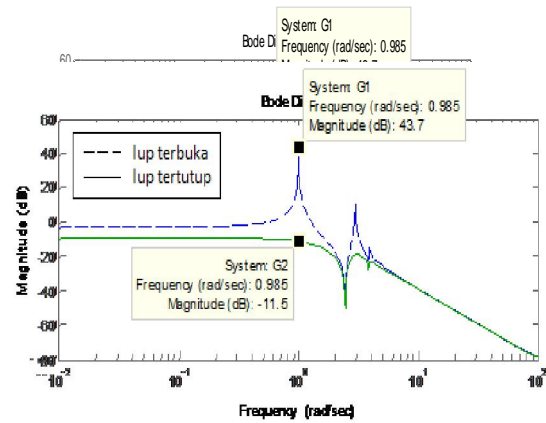
$$S_c = S_e = M = \text{diag}(16,9926 \quad 16,7273 \quad 10,9386 \quad 10,7457 \quad 6,6340 \quad 3,4382)$$

Gain Pengendali $k_p = [0,0890 \quad 0,1872 \quad -1,2967 \quad 0,3357 \quad 2,3383 \quad 3,2523]$

Gain estimator

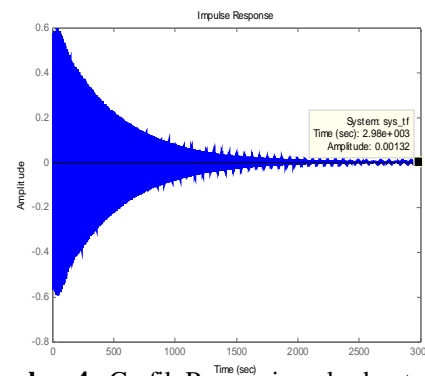
$$k_e^T = [0,1876 \quad 0,0872 \quad 0,3352 \quad -1,2516 \quad 3,2526 \quad 2,289]$$

Untuk menganalisis kinerja sistem lup tertutup (G2) dan membandingkannya dengan kinerja lup terbuka (G1) diselidiki grafik respon frekuensi dengan input fungsi impuls. Untuk menggambar kinerjanya digunakan Program MATLAB. Respon frekuensi dan respon impuls diberikan pada Gambar 3 sampai dengan Gambar 5.

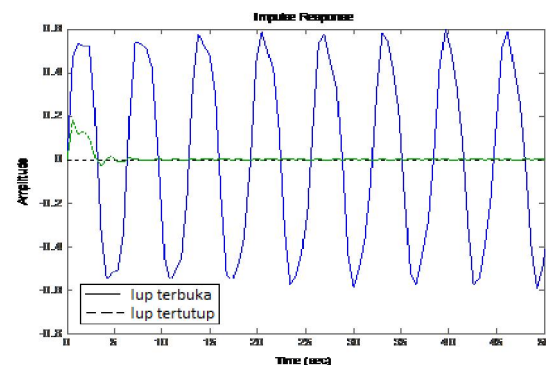


Gambar 3. Grafik Respon Frekuensi

Dari Gambar 3 terlihat bahwa sistem lup terbuka mempunyai puncak frekuensi pada 0,985 rad/sec dengan magnitudo 43,7dB. Ini mengakibatkan sistem lup terbuka rawan terhadap gangguan dari luar. Dengan frekuensi yang sama, sistem lup tertutup memiliki magnitudo -11,5dB. Ini menunjukkan kinerja sistem lup tertutup lebih baik dibanding lup terbuka dilihat dari nilai Magnitudo yang lebih kecil.



Gambar 4. Grafik Respon impuls lup terbuka



Gambar 5. Grafik Respon impuls lup tertutup dan terbuka

Dari Gambar 5 dapat dilihat perbandingan kinerja sistem lup terbuka

dengan lup tertutup. Kinerja sistem lup tertutup lebih baik dibandingkan lup terbuka, dapat dilihat dari grafiknya, dimana osilasi dari sistem lup tertutup mempunyai amplitudo yang lebih kecil dari pada amplitudo sistem lup terbuka. Waktu yang dibutuhkan untuk mencapai kestabilan sistem lup tertutup kurang lebih 10 detik, sedangkan dari Gambar 5 terlihat bahwa sistem lup terbuka mencapai kestabilan dalam waktu kurang lebih 3000 detik. Selain itu juga terlihat bahwa kinerja pengendali LQG mampu menstabilkan sistem lup tertutup dengan sangat cepat, yaitu sekitar 10 detik.

7. PENUTUP

Metode *Linear Quadratic Gaussian* (LQG) merupakan metode yang efektif untuk mendesain pengendali pada sistem struktur fleksibel. Sistem tersebut harus terkendali dan terobservasi. Dari plant setimbang pengendali LQG didesain untuk menghasilkan sistem lup tertutup. Untuk menguji kinerja dari pengendali LQG setimbang yang telah diperoleh, pengendali tersebut diaplikasikan ke sistem massa pegas untuk meredam getaran. Dari hasil simulasi diperoleh bahwa kinerja pengendali LQG yang didesain mampu meredam getaran dalam waktu yang jauh lebih cepat dari pada sistem tanpa pengendali. Kinerja pengendali LQG ini mampu menstabilkan sistem lup tertutup dalam waktu kurang lebih 10 detik. Dari sini berarti kinerja sistem lup tertutup dengan pengendali LQG lebih baik dibandingkan dengan sistem lup terbuka tanpa pengendali yang baru terstabilkan dalam waktu 3000 detik.

8. DAFTAR PUSTAKA

- [1]. Gawronski, W., (1996), *Balanced Control of Flexible Structures*, Springer, Inggris.
- [2]. Colaneri, P., Geromel, J.C., Locatelli, A., (1997), *Control Theory and Design*, Academic Press.
- [3]. Dino Sciulli, (1997), *Dynamics and Control for Vibration Isolation design, dissertation*, Polytechnic Institute and state university, Blacksburg, Virginia.
- [4]. Lall, S. and Beck, C. (2003), Error-bounds for Balanced model-reduction of linear time-varying systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(6) : 946-956.
- [5]. Leonid, F., (2003), *Linear Quadratic Gaussian Control Design with loop Transfer recovery*, Department of Mathematics Michigan state University, USA.
- [6]. Liu, Y and Anderson, B.D.O. (1989), Singular perturbation approximation of balanced system, *International Journal of Control*, 33(4):1379-1405.
- [7]. Mäkilä, P.M., (2004), *Kalman Filtering and Linear Quadratic Gaussian Control*, Institute of Automation and Control Tampere University of Technology, FINLAND.
- [8]. Valery, A.U and Petersen, I.R., (2001), Minimax LQG Control of Stochastic Partially Observed Uncertain Systems, *SIAM Journal Control Optim.*, 40(4):1189-1226.
- [9]. Widowati, et. Al., (2004), *Model reduction for unstable LPV systems based on coprime factorizations and singular perturbation*, Proceedings of the 5th Asian Control Conference, Melbourne, Australia, 692-699.
- [10]. Zhou, K., Doyle, J.C. , (1998), *Essentials of Robust Control*, Prentice-Hall, Inc.