# KONSTRUKSI, SIFAT DAN DIMENSI HIMPUNAN CANTOR *MIDDLE THIRD*

Khoiroh Alfiana[1], Siti Khabibah[2], Robertus Heri S.U[3]
[1,2,3]Jurusan Matematika FMIPA UNDIP
Jl. Prof. H. Soedarto, S. H, Tembalang, Semarang
Jurusan Matematika FMIPA UNDIP

**Abstract**. This paper discussed about the construction of Cantor middle third set which is formed from unit interval [0,1]. To construct the Cantor set, take a line and remove the middle third and remain two line segments. This Process is repeated infinite number of times. This process produces some interesting properties on Cantor middle third set, such as has uncountable many elements, contains no intervals, and is compact, perfect, and nowhere dense. By using Hausdorff dimension and self similar set, it discussed the dimension of Cantor middle third set which is a unique positive number $0 <$ $< 1$.

**Keywords**: Cantor set, Hausdorff dimension, self-similar set

## 1. PENDAHULUAN

Georg Cantor (1845-1918) adalah seorang matematikawan asal Jerman keturunan Yahudi yang pertama kali memperkenalkan himpunan Cantor. Himpunan ini mempunyai sifat-sifat yang tak wajar yang merupakan akibat dari penggabungan teori himpunan, topologi dan fraktal. Selain itu, himpunan Cantor ini secara topologis dianggap tak berdimensi. Himpunan Cantor dikonstruksikan sebagai bentuk di mana selang terbuka yang pendek dan semakin pendek tersebar pada selang dasar [0, 1], menyisakan himpunan yang mungkin serupa dirinya, dan mungkin mempunyai suatu dimensi yang memenuhi $0 <$ $< 1$.

Dalam memahami dimensi himpunan Cantor, matematikawan seperti Constantin Carathéodory dan Felix Hausdorff menggeneralisasi konsep dimensi untuk menyelidiki bahwa dimensi yang ada mungkin nilainya adalah non integer. Pada tahun 1918 matematikawan Felix Hausdorff memperkenalkan dimensi Hausdorff.

## 2. PEMBAHASAN

Himpunan Cantor ditemukan oleh Henry John Stephen Smith pada tahun 1875 dan diperkenalkan oleh matematikawan German, Georg Cantor pada tahun 1883. Himpunan ini dibangun berdasarkan teori himpunan, topologi dan teori fraktal.

**Definisi 2.1 [4]** *Himpunan disebut himpunan* ***sempurna (perfect)*** *asalkan* $= '$, *dengan* $'$ *merupakan himpunan semua titik limit dari . Dengan kata lain, disebut* ***sempurna (perfect)*** *jika merupakan himpunan tertutup dengan setiap titik dari merupakan titik limitnya.*

**Definisi 2.2 [4]** *Suatu himpunan dikatakan* ***tidak rapat dimana-mana (nowhere dense)*** *jika titik interior dari pemampat (closure) kosong.*

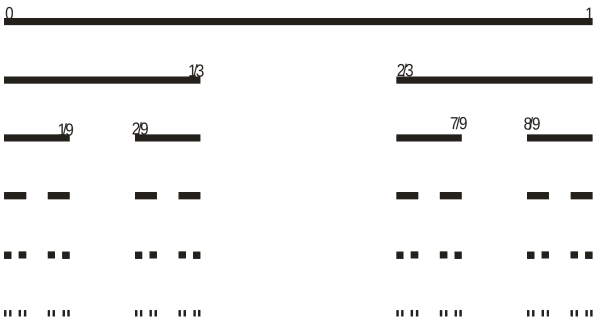
### 2.1 Konstruksi Himpunan Cantor *Middle Third*

Langkah mengkonstruksikan himpunan Cantor *middle third* adalah diberikan interval $= [0,1]$ di dalam himpunan semua bilangan riil. Interval dibagi menjadi tiga bagian. Selanjutnya dihapus interval terbuka $-,-$ dan diperoleh himpunan $= 0,- \quad -,1$. Segmen garis dari pertiga tengah (*middle third*) dari dua himpunan tertutup yang ada pada masing-masing dihapus bagian tengahnya, diperoleh himpunan baru yang dinotasikan dengan $= 0,- \quad -,- \quad -,- \quad -,1$. Proses ini diulangi pada setiap langkah untuk $= 0,1,2, \dots,$ kemudian dihapus segmen pertiga tengah (*middle third*) dari setiap himpunan tertutup di dan diberi nama himpunan sisa berikutnya . Untuk setiap $= 0,1,2, \dots,$ merupakan gabungan dari 2 interval dengan panjang dari setiap interval tertutup sebesar 3 .

**Definisi 2.3 [4]** *Himpunan Cantor middle third dinotasikan merupakan himpunan terbatas. Dari proses penghapusan bagian tengah pertiga (middle third), himpunan Cantor dapat didefinisikan sebagai berikut*

$$\infty$$

$$=$$




*Gambar 2.1 Himpunan Cantor Middle Third*

## 2.2 Penyajian Bilangan Terner

**Definisi 2.4 [2]** *Untuk sebarang* $[0,1]$, *dapat dituliskan dalam skala integer* $> 1$ *sebagai* $= (0. \quad \dots)$ , *dimana untuk setiap merupakan salah satu integer* $0, \dots, \quad - 1$. *Sehingga dapat dituliskan dalam bentuk deret konvergen*

$$= \sum^{\infty} \frac{}{}, \quad \{0, \dots, \quad - 1\}$$

untuk setiap $= 1,2, \dots$

Langkah penyajian bilangan $[0,1]$ menjadi bilangan terner $(0. \quad \dots)$ adalah sebagai berikut.

$$= \quad + \quad , \quad = \text{sisa}$$
$$= \quad +$$

$$= 0 +$$

Integer disebut sebagai basis.

Sedangkan untuk penyajian bilangan terner dengan diberikan $[0,1]$, sehingga terdapat barisan $\{ \quad \}$ dengan $\{0,1,2\}$ dan $= \sum^{\infty} \frac{}{}$. Jadi, diperoleh $= (0. \quad \dots)$ .

Untuk itu dilakukan cara sebagai berikut :

$$3 \quad = \quad + \quad , \quad = \text{sisa}$$
$$3 \quad = \quad +$$

$$3 \quad = 0 +$$

**Proposisi 2.5 [2]** *Himpunan Cantor middle third merupakan himpunan titik-titik dalam interval* $[0,1]$ *yang ekspansi ternernya tanpa bilangan 1.*

## 2.3 Sifat-Sifat Himpunan Cantor *Middle Third*

**Teorema 2.6 [4]** *Himpunan Cantor middle thirds mempunyai elemen yang tak terhitung (uncountable).*

**Bukti :**

Akan dibuktikan bahwa himpunan Cantor tak terhitung (*uncountable*) dengan kontradiksi. Andaikan terhitung (*countable*), maka menurut definisi himpunan terhitung terdapat fungsi surjektif $:$ dengan $= \{ \ , \ , \ , \dots \}$ dan

$$= 0. \quad \dots$$
$$= 0. \quad \dots$$
$$= 0. \quad \dots$$

$$= 0. \quad \dots$$

dimana $= 0$ atau $2$ untuk semua , (Proposisi 2.5).

Misal diberikan $= 0, \quad \dots$ dengan $= \begin{cases} 2 \text{ jika} & = 0 \\ 0 \text{ jika} & = 2 \end{cases}$

sehingga $\neq$ karena $\neq$ , $\neq$ karena $\neq$ dan seterusnya. Jadi, $\neq$ , untuk setiap . Hal ini menunjukkan bahwa , tetapi hal ini kontradiksi karena $\{0,2\}$ untuk setiap , sehingga . Oleh karena itu, *uncountable.*

**Teorema 2.7 [4]** *Himpunan Cantor middle third tidak memuat interval.*

**Bukti :**

Akan ditunjukkan panjang komplemen dari himpunan Cantor sama dengan 1, sedemikian sehingga himpunan Cantor tidak memuat interval.

Pada saat konstruksi ke- ( > 0), interval yang dihapus sebesar 2 interval dari interval himpunan sebelumnya dimana setiap intervalnya mempunyai panjang —. Panjang interval dari komplemen himpunan Cantor dalam interval [0,1] setelah suatu bilangan tak hingga terhapus adalah

$$2 \quad \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \quad \frac{2}{3}$$

$$= \frac{1}{3} \quad \frac{2}{3}$$

$$= \frac{1}{3} \quad \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1$$

Oleh karena itu, telah terhapus panjang sebesar 1 pada suatu interval [0,1] yang mempunyai panjang 1. Akibatnya himpunan Cantor mempunyai panjang 0, ini menunjukkan bahwa Cantor tidak mempunyai interval.

**Teorema 2.8 [5]** *Himpunan Cantor middle third merupakan himpunan yang kompak (compact).*

**Bukti :**

Suatu himpunan bagian dari dikatakan kompak (*compact*) jika dan hanya jika himpunan tersebut tertutup dan terbatas. Oleh karena gabungan himpunan tertutup berhingga dan tertutup untuk semua , sehingga yang merupakan irisan dari kumpulan himpunan tertutup , juga pasti tertutup. Setiap berada di dalam interval tertutup [0,1], menunjukkan bahwa terbatas, sehingga juga terbatas. Karena tertutup dan terbatas, maka kompak (*compact*).

**Teorema 2.9 [5]** *Himpunan Cantor middle third merupakan himpunan yang sempurna (perfect).*

**Bukti :**

Dari Definisi 2.1 diketahui bahwa suatu himpunan dikatakan sempurna (*perfect*) jika himpunan tersebut tertutup dan semua titiknya merupakan titik limitnya. Karena kompak, pasti tertutup. Berikutnya akan ditunjukkan bahwa setiap titik di adalah titik limitnya.

Semua titik ujung dari subinterval termuat dalam . Jika diambil sebarang = , yang berarti di dalam untuk semua , sehingga pasti pada salah satu interval yang banyaknya 2 interval. Bila adalah titik ujung dari subinterval dalam dan karena setiap subinterval mempunyai panjang —, maka | − | < —.

Oleh karena itu, barisan ( ) konvergen ke , dan karena semua *endpoint* dari subinterval termuat dalam , ditemukan suatu barisan bilangan yang bukan di dalam yang konvergen ke . Diperoleh merupakan titik limit , karena sebarang, maka setiap titik merupakan titik limitnya. Jadi, sempurna.

**Teorema 2.10 [5]** *Himpunan Cantor middle third merupakan himpunan yang tidak rapat dimana-mana (nowhere dense).*

**Bukti :**

Dari Definisi 2.2 suatu himpunan dikatakan *nowhere dense* jika interior dari pemampat (*closure*) himpunan tersebut adalah kosong, dengan kata lain *closure* tersebut tidak memuat titik interior.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa tidak mempunyai titik interior. Diasumsikan terdapat ( ), maka terdapat > 0 sedemikian hingga ( − , + ) . Diambil sedemikian hingga — < , sehingga ( − , + ) . Oleh karena itu ( − , + ) , kontradiksi dengan ( − , + ) , sehingga ( ). Sebab sebarang, maka tidak mempunyai titik interior. Karena elemen *closure* sama dengan elemen , dan tidak mempunyai titik interior, maka closure juga tidak mempunyai titik interior

( ) = ( ) =

Oleh karena itu, *nowhere dense*.

## 2.4 Dimensi Himpunan Cantor *Middle Third*

Dalam matematika, dimensi suatu obyek diartikan sebagai jumlah minimal koordinat yang dibutuhkan untuk menentukan titik-titik yang ada di dalamnya.

### 2.4.1 Dimensi Hausdorff

Diameter suatu himpunan tak kosong di adalah

| | = sup{ | − |: , }

Koleksi berhingga { } subset dikatakan menjadi -liput jika

dan 0 < | |

< , .

**Definisi 2.11 [6] (Pengukur Hausdorff)** *Diberikan* ≥ 0. *Untuk setiap* , *dinotasikan*

( ) =

inf ∑ : { } adalah suatu -liput dari

*Selanjutnya, dapat dinotasikan*

( ) = ( )
→

*dengan disebut sebagai pengukur - dimensi Hausdorff.*

**Definisi 2.12 [6] (Dimensi Hausdorff)** *Misalkan himpunan , dimensi Hausdorff-nya adalah*

dim( ) = inf{ : ( ) = 0}
= sup{ : ( ) = ∞}

Dari penjelasan di atas, dapat dilihat bahwa

( ) = ∞ jika < dim( )
0 jika > dim( )

Pada titik = dim( ), nilai ( ) mungkin nol, tak hingga atau memenuhi

0 < ( ) < ∞ .

**Teorema 2.13 [6]** *Dimensi himpunan Cantor* ( ) *adalah* dim( ) = ———

**Bukti :**

Langkah pertama mencari dimensi adalah dengan mencari batas atas ( ) terlebih dahulu. Terdapat -liput dari himpunan Cantor menggunakan interval dasar 2 yang mempunyai panjang − − — . Untuk

− − — -liput dari

( ) = inf | | ≤ | |

$= 2 \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$

$= \quad 2 \; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$

Jika dipilih sedemikian hingga 2 − − — = 1 maka ( ) = lim → ( ) ≤ 1, untuk > 0. Selanjutnya karena = ——— maka ( ) ≤ 1 ≤ ∞ dan dim ( ) ≤ ———.

Langkah berikutnya mennentukan batas bawah ( ). Akan ditunjukkan

$| \quad | \geq \frac{1}{2}$

untuk sebarang liput { } pada . Karena kompak, maka koleksi berhingga himpunan tertutup { } meng-*cover* .

Misalkan diberikan { } liput tertutup berhingga. Untuk setiap , diberikan , sedemikian hingga

$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \quad \leq | \quad | < \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$

Perhatikan bahwa beririsan paling banyak dengan 1 interval dasar . Jika ≥ , maka banyaknya interval yang beririsan adalah paling banyak

$$2 \quad = 2 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

$$= 2 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \quad ( \quad )$$

$$\leq 2 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times | \quad |$$

Karena { } beririsan dengan semua 2 interval , diperoleh

$$2 \leq 2 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times | \quad |$$

Ekuivalen dengan

$$| \quad | \geq \frac{1}{2}$$

Dapat disimpulkan bahwa $0 < - \leq$ $( \quad ) \leq 1 < \infty$, sehingga diperoleh $\dim( \quad ) = \frac{-}{- \; -}$.

### 2.4.2 Himpunan *Self-Similar*

Suatu himpunan yang *self-similar*, maka himpunan tersebut mempunyai dimensi.

**Definisi 2.14 [5]** *Pemetaan* $: \to$ *adalah suatu* ***contractive similitude*** *atau suatu* ***penyusutan (contraction)*** *jika* $|\ (\ ) - \ (\ )| = \ | \ - \ |$ *untuk sebarang* , *dan* $0 < \ < 1$ *merupakan* ***rasio penyusutan (contraction ratio)*** *atau* ***rasio kemiripan (similitude ratio)***.

**Definisi 2.15 [5]** *Diberikan* { } , *pemetaan ke dirinya, merupkan koleksi dari penyusutan berhingga. Himpunan yang tak kosong dan kompak (compact) dan mempunyai persamaan* $= \ (\ )$ *disebut* ***himpunan invariant*** *dari* { } .

**Definisi 2.16 [6]** *Diberikan dan* { } *merupakan koleksi dari contractive similitude berhingga, sedemikian hingga merupakan invariant terhadap* { } . *Himpunan disebut* ***himpunan serupa dirinya (self-similar set)*** *asalkan terdapat* $> 0$ *sehingga* $(\ ) > 0$ *tetapi*

$$(\ ) \cap \ (\ ) = 0 \text{ untuk } \neq .$$

**Definisi 2.17 [6]** *Koleksi contractive similitude berhingga* { } *dikatakan memenuhi himpunan terbuka bersyarat (open set condition), apabila terdapat himpunan terbuka sedemikian hingga* $(\ )$ *dan gabungan tersebut disjoint*.

Diasumsikan bahwa { } adalah *similitude* pada . Ditunjukkan bahwa jika himpunan terbuka bersyarat terpenuhi, maka himpunan invariant adalah *self-similar* menyebabkan dimensi Hausdorff dan dimensi *self-similar* adalah sama. Dimensi *self-similar* adalah suatu bilangan unik positif untuk [1]

$$(\ ) = 1$$

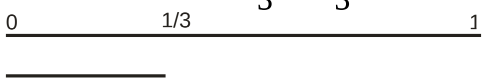
**Proposisi 2.19 [6]** *Dimensi Himpunan Cantor middle third adalah* $\dim(\ ) = \frac{}{}$.

**Bukti :**

Misalkan $(\ ): [0,1] \to [0, -]$ dan $(\ ): [0,1] \to [-, 1]$ didefinisikan sebagai berikut

$$(\ ) = \frac{1}{3}$$

$$(\ ) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}$$




*Gambar 2.2* $(\ ) : [0,1] \to [0, -]$


*Gambar 2.3* $(\ ) : [0,1] \to [-, 1]$

Oleh karena himpunan Cantor *middle third* merupakan himpunan *self-similar*, maka $= \ (\ )$ dan { } memenuhi himpunan terbuka bersyarat untuk $= (0,1)$, dengan $= -$

dan $\quad = -$ sehingga dapat dengan mudah dicari besarnya dimensi $\quad$ yaitu suatu bilangan $\quad$ untuk

$$(\quad) \quad = 1$$

$$2 \quad \frac{1}{3} \quad = 1 \text{ jika dan hanya jika } \quad = \frac{\log 2}{\log 3}$$

Jadi,

$$\dim(\quad) = \frac{\log 2}{\log 3}$$

## 3. PENUTUP

Himpunan Cantor *middle third* dibentuk dari penghapusan himpunan bilangan riil dalam interval unit [0,1]. Dilakukan penghapusan interval terbuka yang panjangnya $-$, sehingga menyisakan dua himpunan bilangan riil tak terhubung yaitu interval $0, - \quad 1 - -$ dan $1 - - \quad 1 - - \quad ,1$ . Proses penghapusan tersebut dilakukan berulang sampai takterhingga.

Himpunan Cantor *middle third* mempunyai sifat-sifat yang unik, sifat-sifat ini dipengaruhi oleh teori himpunan dan topologi. Sifat-sifat yang dimiliki himpunan Cantor yaitu memuat elemen yang takterhitung (*uncountable*), tidak memuat interval, merupakan himpunan kompak, himpunan sempurna, dan tidak rapat dimana-mana (*nowhere dense*). Dengan himpunan *self-similar* yang dimiliki himpunan Cantor *middle third* memudahkan dimensi Hausdorff untuk dihitung, dan dapat ditunjukkan bahwa bilangannya adalah non-integer.

## 4. DAFTAR PUSTAKA


[1] Falconer, K.J. (2002), *The Geometry of Fractal Sets*. USA : Cambridge University Press.

[2] Jamal Moustafa Yaseen, Alaa. (2005), *Cantor Set in Measure Theory*. Palestine: An-Najah National Universyty.

[3] Roinestad, Kristine A. (2007), *Geometry of Self-Similar Sets*. Virginia Polytechnic Institute and State University, 68 : 4-31.

[4] Shaver, Christopher. (2009), *An Exploration of the Cantor Set*. Rockhurst University, 19 : 1-19.

[5] Wachsmuth, Bert G. (2007), *Interactive Real Analysis*. New Jersey : Seton Hall University

[6] Wong, Carto. (2003), *Hausdorff Dimension*. http://www.mathdb.org/notes_download/advanced/fractals/e_dim_H.pdf. Diakses tanggal 21 Maret 2012.