PELABELAN *GRACEFUL* SISI BERARAH PADA GRAF GABUNGAN GRAF SIKEL DAN GRAF STAR

Putri Octafiani[1], R. Heri Soelistyo U[2]
[1,2] Jurusan Matematika FMIPA UNDIP
Jl. Prof. H. Soedarto, S. H, Tembalang, Semarang
Jurusan Matematika FMIPA UNDIP

Abstract Let G is simple and finite graph. Graph G is called a directed edge-gracefull graph if there exists an orientation of G and bijective map $f : A(G) \rightarrow \{1,2, ..., q\}$ such as a map g on V defined by $g(v) = [f^+(v) – f^-(v)]$ (mod p) is bijective map, which is $f^+(v)$ is the sum of the labels of arcs with v as a head and $f^-(v)$ is the sum of the labels of all arc with v as a tail. Graph with directed edge-gracefull labeling is called directed edge-gracefull graph. In this paper we will discussed about directed edge-gracefull labeling of cycle and star related graph.

Keywords : bijective map, cycle graph, graceful, graph labeling

1. PENDAHULUAN

Pelabelan graf merupakan salah satu topik dari teori graf yang mendapat perhatian khusus, karena model-model yang ada dalam teori graf berguna untuk aplikasi yang luas, misalnya, pada jaringan transportasi, komunikasi dan riset operasi. Pelabelan graf pertama kali diperkenalkan oleh Sadlàčk (1964), kemudian Stewart (1966), Kotzig dan Rosa (1970).

Pelabelan dari graf adalah pemetaan yang memetakan unsur-unsur graf ke bilangan (umumnya bilangan bulat positif) yang disebut label. Pada umumnya domain dari pemetaan ini adalah himpunan titik (pelabelan titik), himpunan sisi saja (pelabelan sisi), atau himpunan titik dan himpunan sisi (sehingga pelabelan ini disebut Pelabelan total). Ada banyak pelabelan yang telah dikembangkan, diantaranya adalah pelabelan *graceful*.

Gallian (2007 : 4) mengatakan bahwa *Pelabelan graceful* didefinisikan sebagai pemberian label pada titik suatu graf G yang memenuhi fungsi injektif dari himpunan titik ke himpunan bilangan bulat tak negatif $\{0, 1, 2, ..., q\}$ sedemikian hingga setiap sisi xy di G mendapat label $| f(x) - f(y) |$, maka label setiap sisi akan berbeda. Dengan demikian, pelabelan *graceful* merupakan salah satu bentuk pelabelan pada titiknya saja sedangkan label sisinya menjadi akibat dari adanya label titik. Sebuah graf G dikatakan graf *graceful* sisi jika terdapat pemetaan bijektif $f : E(G) \rightarrow \{1, 2, ..., q\}$ sedemikian sehingga pemetaan f^* dari himpunan titik $V(G)$ ke $\{0, 1, ..., p – 1\}$ yang didefinisikan dengan $f^*(x) = (\sum f(xy))$ (mod p), untuk semua sisi xy berinsiden dengan titik x, adalah bijektif. Penulis mencoba memperluas konsep pelabelan *graceful* sisi untuk graf berarah. Sehingga, pada paper ini penulis akan membahas mengenai "pelabelan *graceful* sisi berarah pada graf yang menghubungkan graf sikel dan graf star".

Permasalahan yang akan dibahas dalam paper ini adalah apakah graf yang menghubungkan graf sikel dan graf star dapat dilabeli dengan pelabelan *graceful* sisi berarah. Permasalahan tersebut dibatasi pada graf sederhana dan berhingga. Dalam paper ini graf yang digunakan adalah graf C_{2m} @ $K_{1,\ 2n+1}$ dan graf C_{2m+1} @ $K_{1,\ 2n}$ yaitu graf yang diperoleh dari graf sikel dan graf star yang dihubungkan pada satu titik. Serta Graf Korona $C_n \odot \bar{K}_m$ dengan n bilangan ganjil dan m bilangan genap yaitu graf yang diperoleh dari graf sikel dan graf star yang dihubungkan pada n titik.

2. TINJAUAN PUSTAKA

Definisi 2.1 [10] *Graf G terdiri atas himpunan yang tidak kosong dari elemen-elemen yang disebut titik, dan suatu himpunan (boleh kosong) yang elemen-*

elemennya disebut sisi. Himpunan titik dari graf dinotasikan dengan V(G), dan himpunan sisi G, dinotasikan dengan E(G) yang merupakan pasangan yang tidak terurut dari titik-titik V(G). Definisi di atas menyatakan bahwa V(G) tidak boleh kosong, sedangkan E(G) boleh kosong.

Jadi, sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi, tetapi titiknya harus ada, minimal satu. Graf yang hanya mempunyai satu titik tanpa satu sisi pun dinamakan graf trivial.

Titik pada graf dapat dilabeli dengan huruf, seperti *a, b, c, ... , v, w, ...* dengan bilangan asli 1, 2, 3, ... atau gabungan keduanya. Sedangkan sisi yang menghubungkan titik *v* dengan titik *w* dinyatakan dengan lambang *e.* sehingga *e* adalah sisi yang menghubungkan titik *v* dengan titik *w*, maka *e* dapat ditulis sebagai *e* = (*v*, *w*).

Definisi 2.2 [10] *Dua sisi atau lebih yang menghubungkan pasangan titik yang sama disebut sisi ganda (multiple edges), dan sebuah sisi yang menghubungkan sebuah titik ke dirinya sendiri disebut loop (simpul). Graf dengan loop atau sisi ganda disebut graf tidak sederhana (unsimple graph), sedangkan graf tanpa loop atau sisi ganda disebut graf sederhana (simple graph).*

Definisi 2.3 [10] *Misal v dan w adalah titik-titik pada graf. Jika v dan w dihubungkan dengan suatu sisi e, maka v dan w dikatakan adjacent. Lebih jauh, v dan w dikatakan incident dengan e, dan e dikatakan incident dengan v dan w.*

Definisi 2.4 [5] *Banyaknya titik pada graf G disebut order dari G yang dinyatakan dengan* $p = |V(G)|$ *dan banyaknya sisi pada graf G disebut size dari G yang dinyatakan dengan* $q = |E(G)|$.

Definisi 2.5 [10] *Misal G adalah graf tanpa loop, dan misal v adalah suatu titik dari G. Maka, derajat v adalah banyaknya sisi yang incident pada v. Derajat titik v dinotasikan dengan deg(v).*

Walaupun derajat suatu titik telah didefinisikan hanya untuk graf tanpa *loop*, definisi ini dapat dengan mudah diperluas untuk graf yang memiliki *loop*. Hal ini dilakukan dengan mengingat bahwa setiap *loop* menyumbang dua pada derajat titiknya.

Definisi 2.6 [10] *Graf G dikatakan terhubung (connected) jika untuk setiap dua titik v dan w di G, terdapat path yang menghubungkan kedua titik tersebut. Graf G disebut graf tak terhubung (disconnected) jika ada pasangan titik di G yang tidak mempunyai path.*

Definisi 2.7 [10] *Digraf (directed graf) D terdiri atas himpunan tak kosong dari elemen-elemen yang disebut titik, dan suatu himpunan (boleh kosong) yang elemen-elemennya disebut sisi. Himpunan titik dari digraf D dinotasikan dengan V(D) dan himpunan sisi D, dinotasikan dengan A(D) yang merupakan pasangan terurut (u, v) dari titik u, v di V(D) yang disebut arc (busur).*

Definisi 2.8 [10] *Misal D suatu digraf. Graf dasar D adalah graf yang diperoleh dengan mengganti setiap busur D dengan sisi yang sesuai (tidak berarah).*

Definisi 2.9 [10] *Misal v dan w adalah titik-titik pada digraf. Jika v dan w dihubungkan dengan sebuah busur e, maka v dan w dikatakan adjacent. Jika busur e diarahkan dari v ke w, maka busur e dikatakan incident dari v dan incident pada w.*

Berdasarkan [9] dan [10] berikut diberikan jenis-jenis graf.

1. Graf Sikel [10]
   Graf Sikel adalah graf yang terdiri dari sebuah sikel yang tunggal. Graf sikel dengan n titik dinotasikan dengan C_n Graf sikel C_n setiap titiknya berderajat 2.
2. Graf Star [10]
   Graf Star adalah graf bipartit komplit yang satu titik hitamnya dihubungkan dengan setiap titik putih dengan tepat satu sisi. Graf bipartit komplit dengan m titik hitam dan n titik putih dinotasikan sebagai $K_{m,n}$. Graf bipartit komplit yang berbentuk $K_{1,n}$ disebut graf bintang.

3. Graf Korona [9]
   Graf korona dinotasikan dengan $C_n \odot \overline{K}_m$, artinya graf korona terdiri dari graf sikel dengan *n* titik dan pada setiap titiknya ditambahkan sebanyak *m* daun. Derajat setiap titik pada graf sikelnya menjadi 2+*m* dan derajat titik daun adalah 1. Himpunan titik pada korona adalah

   $V(C_n \odot \overline{K}_m) = \{v_i \mid i = 1, 2, ..., n\} \bigcup_{i=1}^{m} \{ u_{i,j} \mid j = 1, 2, ..., m\}$

   Dan himpunan sisinya adalah

   $E(C_n \odot \overline{K}_m) = \{(v_i, v_{i+1}) \mid i = 1, 2, ..., n\} \bigcup_{i=1}^{m} \{ (v_i, u_{i,j}) \mid j = 1, 2, ..., m\}$

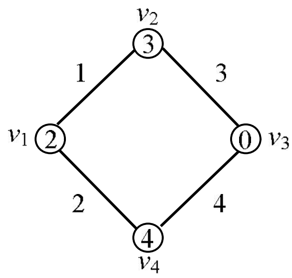
   Dengan v_i menyatakan titik dalam, yaitu titik pada sikel dan $u_{i,j}$ menyatakan titik luar ke *j* yang terhubung dengan titik dalam ke *i*.
4. Graf gabungan graf sikel dan graf star
   Graf gabungan graf sikel dan graf star adalah suatu graf dimana graf sikel dan graf star dihubungkan oleh satu titik, dan dinotasikan dengan $G_1@G_2$, dimana G_1 adalah graf sikel dan G_2 adalah graf star.

3. PELABELAN *GRACEFUL* Sisi BERARAH PADA GRAF GABUNGAN GRAF SIKEL DAN GRAF STAR

Definisi 3.1 [3] *Pelabelan graceful pada graf G adalah pemetaan injektif $f : V(G) \to \{0, 1, 2, \ldots, q\}$ sedemikian hingga, jika sisi (xy) dilabeli dengan $| f(x) - f(y) |$ maka label setiap sisi akan berbeda.*

Dengan demikian, pelabelan *graceful* merupakan salah satu bentuk pelabelan pada titik sedangkan label sisinya menjadi akibat dari adanya label titik.

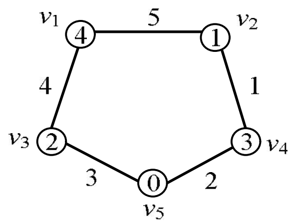
Contoh 3.2



Gambar 1 Pelabelan *graceful* pada graf C_4

Definisi 3.3[3] *Sebuah graf G dikatakan graf graceful sisi jika terdapat pemetaan bijektif $f : E(G) \to \{1, 2, ..., q\}$ sedemikian sehingga pemetaan f^* dari himpunan titik V(G) ke $\{0, 1, ..., p - 1\}$ yang didefinisikan dengan $f^*(x) = (\sum f(xy)) \pmod p$, untuk semua sisi xy berinsiden dengan titik x, adalah bijektif.*

Contoh 3.4



Gambar 2 Pelabelan *graceful* sisi pada graf C_5

Definisi 3.5 [3] *Sebuah graf G dikatakan graf graceful sisi berarah, bila terdapat arah pada G dan pemetaan bijektif $f : A(G) \to \{1,2, ..., q\}$ sedemikian sehingga pemetaan g pada himpunan titik V yang didefinisikan dengan $g(v) = [f^+(v) - f^-(v)] \pmod p$ merupakan pemetaan bijektif, dimana $f^+(v)$ = jumlah dari label semua busur dengan v sebagai kepala busur, $f^-(v)$ = jumlah dari label semua busur dengan v sebagai ekor busur.*

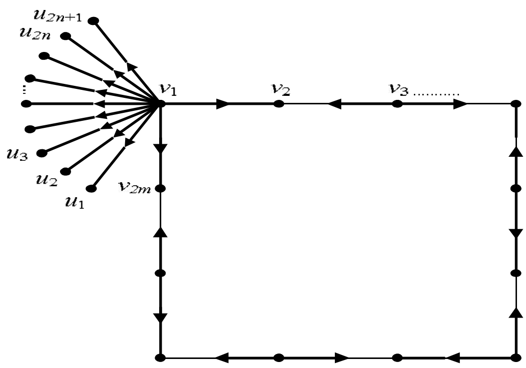
Suatu graf yang memenuhi aturan pelabelan *graceful* sisi berarah disebut graf *graceful* sisi berarah.

Definisi 3.6 [3] *Graf $G_1@G_2$ adalah suatu graf, dimana antara graf G_1 dan G_2 hanya dihubungkan oleh satu titik, dengan graf G_1 dan G_2 adalah graf sebarang.*

Teorema 3.7 [3] *Graf C_{2m} @ $K_{1,\ 2n+1}$ adalah graceful sisi berarah untuk $m \geq 2$ dan $n \geq 1$*

Bukti :

Misalkan graf $G = C_{2m}$ @ $K_{1,\ 2n+1}$ dan $V[C_{2m}$ @ $K_{1,\ 2n+1}] = \{v_1, v_2, ..., v_{2m}, u_1, u_2, ..., u_{2n+1}\}$ adalah himpunan titik pada graf G, sedangkan himpunan sisi berarah graf C_{2m} @ $K_{1,\ 2n+1}$ adalah $A = \{(v_{2i+1}, v_{2i}), 1 \leq i \leq m - 1\} \cup \{(v_1, v_{2m})\} \cup \{(v_{2i-1}, v_{2i}), 1 \leq i \leq m\} \cup \{(v_1, u_j), 1 \leq j \leq 2n + 1\}$, seperti gambar berikut ini.



Gambar 3 Graf C_{2m} @ $K_{1,\ 2n+1}$ yang semua sisinya telah diberi arah

Definisikan pelabelan titik dan busur pada graf C_{2m} @ $K_{1,\ 2n+1}$ sebagai berikut.

Label pada himpunan busur A adalah

$f((v_{2i+1}, v_{2i})) = i, \quad 1 \leq i \leq m - 1$

$f((v_1, v_{2m})) = m$

$f((v_{2i-1}, v_{2i})) = m + 2n + 1 + i, \quad 1 \leq i \leq m$

$f((v_1, u_{2j-1})) = m + j, \quad 1 \leq j \leq n + 1$

$f((v_1, u_{2j})) = m + 2n + 2 - j, \quad 1 \leq j \leq n$

Pelabelan titik untuk graf star didefinisikan sebagai berikut.

$g(u_{2j-1}) = m + j, \quad 1 \leq j \leq n + 1$

$g(u_{2j}) = m + 2n + 2 - j, \quad 1 \leq j \leq n$

Pelabelan titik untuk graf sikel didefinisikan sebagai berikut.

Kasus 1, *m* adalah bilangan ganjil.

$g(v_{2i-1}) = m + 1 - 2i, \quad 1 \leq i \leq \frac{m+1}{2}$

$g(v_{2i}) = m + 2n + 1 + 2i, \quad 1 \leq i \leq \frac{m-1}{2}$

$g(v_{m-1+2i}) = 2i - 1, \quad 1 \leq i \leq \frac{m+1}{2}$

$g(v_{m+2i}) = (2m + 2n + 1) - \left(\frac{m-1}{2}\right) + 2 - 2i,$

$1 \leq i \leq \frac{m-1}{2}$

Kasus 2, *m* adalah bilangan genap.

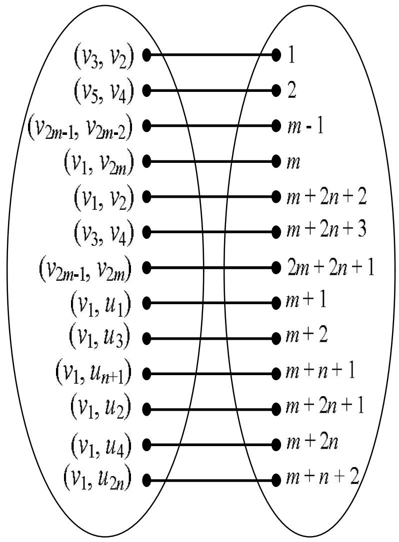
$g(v_{2i-1}) = m + 1 - 2i, \quad 1 \leq i \leq \frac{m}{2}$

$g(v_{2i}) = m + 2n + 1 + 2i, \quad 1 \leq i \leq \frac{m-2}{2}$

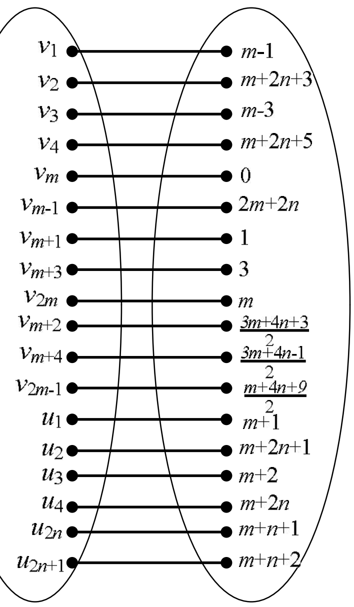
$g(v_{m-2+2i}) = 2i - 2, \quad 1 \leq i \leq \frac{m+2}{2}$

$g(v_{m-1+2i}) = 2m + 2n + 2 - 2i, \quad 1 \leq i \leq \frac{m}{2}$

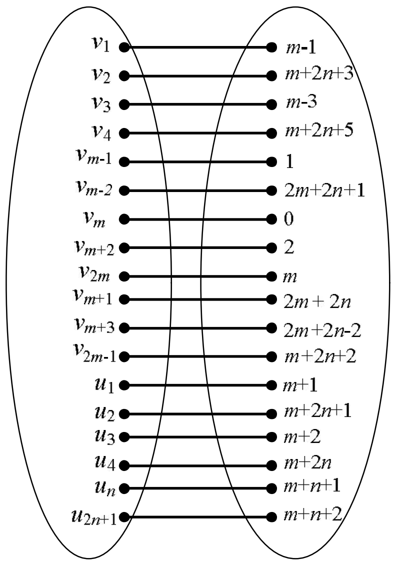
Selanjutnya untuk membuktikan bahwa graf C_{2m} @ $K_{1,\ 2n+1}$ graf *graceful* sisi berarah, akan ditunjukkan bahwa pelabelan busur *f* dan pelabelan titik *g* merupakan pemetaan bijektif sebagai berikut:



Gambar 4 Pemetaan bijektif *f* pada graf C_{2m} @ $K_{1,\ 2n+1}$



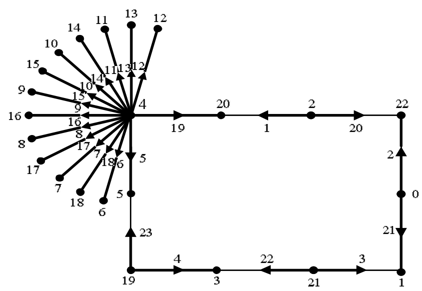
Gambar 5 Pemetaan bijektif *g* pada graf C_{2m} @ $K_{1,\ 2n+1}$ dengan *m* bilangan ganjil



Gambar 6 Pemetaan bijektif g pada graf C_{2m} @ $K_{1,\,2n+1}$ dengan m bilangan genap

Jadi, diperoleh bahwa g merupakan pemetaan bijektif sehingga terbukti bahwa graf C_{2m} @ $K_{1,\ 2n+1}$ dapat dilabeli dengan pelabelan *graceful* sisi berarah. Oleh karena itu, graf C_{2m} @ $K_{1,\ 2n+1}$ dapat dikatakan graf *gracef*■ sisi berarah.

Contoh 3.8

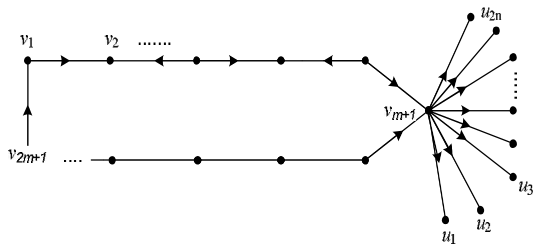


Gambar 7 C_{10} @ $K_{1,\,13}$ dengan pelabelan *graceful* sisi berarah

Teorema 3.9 [3] *Graf C_{2m+1} @ $K_{1,2n}$ adalah graceful sisi berarah untuk $m \geq 1$ dan $n \geq 1$.*

Bukti :

Misalkan $G = C_{2m+1}$ @ $K_{1,2n}$ dan $V[C_{2m+1}$ @ $K_{1,2n}] = \{v_1, v_2, ..., v_{2m+1}, u_1, u_2, ..., u_{2n}\}$ adalah himpunan titik pada graf G, sedangkan himpunan sisi berarah graf C_{2m+1} @ $K_{1,2n}$ adalah $A = \{(v_{2i-1}, v_{2i}), 1 \leq i \leq m\} \cup \{(v_{2i+1}, v_{2i}), 1 \leq i \leq m\} \cup \{(v_{2m+1}, v_1)\} \cup \{(v_{m+1}, u_j), 1 \leq j \leq 2n\}$, seperti Gambar 8 berikut ini.



Gambar 8 Graf C_{2m+1} @ $K_{1,2n}$ yang semua sisinya telah diberi arah

Definisikan pelabelan titik dan busur pada graf C_{2m} @ $K_{1,\,2n+1}$ sebagai berikut:

Label pada himpunan busur A adalah

$f((v_{2i-1}, v_{2i})) = m + 2n + i,\ 1 \leq i \leq m$

$f((v_{2i+1}, v_{2i})) = i,\ 1 \leq i \leq m$

$f((v_{2m+1}, v_1)) = 2m + 2n + 1$

$f((v_{m+1}, u_1)) = m + 1$

$f((v_{m+1}, u_{2j})) = m + 1 + j,\ 1 \leq j \leq n$

$f((v_{m+1}, u_{2j+1})) = m + 2n + 1 - j,\ 1 \leq j \leq n-1$

Pelabelan titik untuk graf star didefinisikan sebagai berikut.

$g(u_1) = m + 1$

$g(u_{2j}) = m + 1 + j,\ 1 \leq j \leq n$

$g(u_{2j+1}) = m + 2n + 1 - j,\ 1 \leq j \leq n - 1$

Pelabelan titik untuk graf sikel didefinisikan sebagai berikut.

Kasus 1, m adalah bilangan ganjil.

$g(v_{2i-1}) = m + 2 - 2i, \quad 1 \leq i \leq \frac{m+1}{2}$

$g(v_{2i}) = m + 2n + 2i, \quad 1 \leq i \leq \frac{m-1}{2}$

$g(v_{m+1}) = 0$

$g(v_{m+2i}) = 2m + 2n + 2 - 2i, 1 \leq i \leq \frac{m+1}{2}$

$g(v_{m+1+2i}) = 2i, \quad 1 \leq i \leq \frac{m-1}{2}$

Kasus 2, m adalah bilangan genap.

$g(v_{2i-1}) = m + 2 - 2i, \quad 1 \leq i \leq \frac{m}{2}$

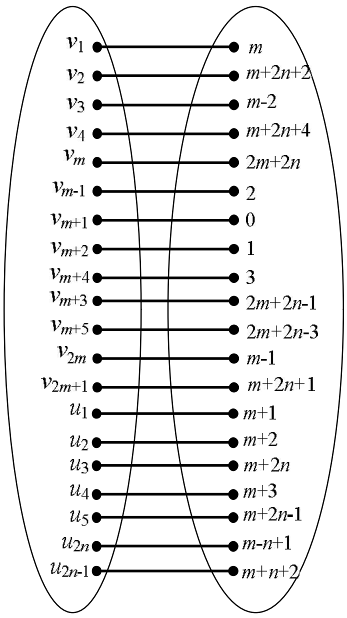
$g(v_{2i}) = m + 2n + 2i, \quad 1 \leq i \leq \frac{m}{2}$

$g(v_{m+1}) = 0$

$g(v_{m+2i}) = 2i - 1, \quad 1 \leq i \leq \frac{m}{2}$

$g(v_{m+1+2i}) = 2m + 2n + 1 - 2i, 1 \leq i \leq \frac{m}{2}$

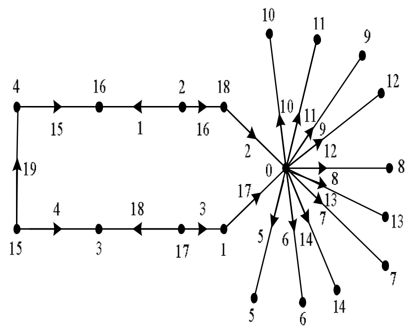
Selanjutnya untuk membuktikan bahwa graf C_{2m+1} @ $K_{1,\,2n}$ graf *graceful* sisi berarah, akan ditunjukkan bahwa pelabelan titik g merupakan pemetaan bijektif sebagai berikut:



Gambar 9 Pemetaan bijektif g pada graf C_{2m+1} @ $K_{1,\,2n}$ untuk m bilangan genap

Jadi, diperoleh bahwa g merupakan pemetaan bijektif, sehingga terbukti bahwa graf C_{2m+1} @ $K_{1,2n}$ dapat dilabeli dengan pelabelan *graceful* sisi berarah. Oleh karena itu, graf C_{2m+1} @ $K_{1,2n}$ dapat dikatakan graf *graceful* sisi berarah.■

Contoh 3.10



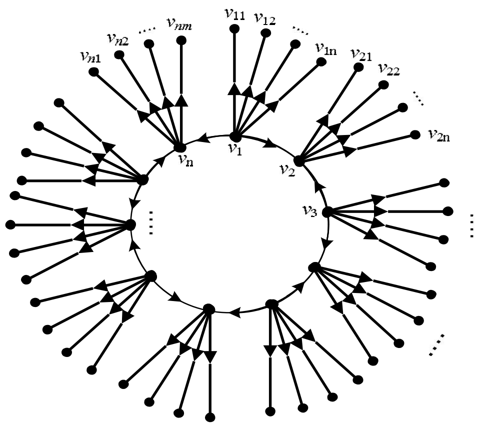
Gambar 10 Graf C_9 @ $K_{1,\,10}$ dengan pelabelan *graceful* sisi berarah

Definisi 3.11[3] *Jika G memiliki order n, korona dari G dengan H dinotasikan dengan G H adalah graf yang diperoleh dengan menggabungkan titik ke-i dari G dengan sebuah sisi ke setiap titik ke-i salinan H.*

Teorema 3.12 [3] *Graf $C_n \odot \overline{K}_m$ graceful sisi berarah jika n ganjil dan m adalah genap*
untuk $n \geq 3$ & $m \geq 2$.

Bukti :

Misalkan $G = C_n \odot \overline{K}_m$ dan $V[C_n \odot \overline{K}_m] = \{v_1, v_2, \ldots, v_n, v_{11}, v_{12}, \ldots, v_{1m}, v_{21}, v_{22}, \ldots, v_{2m}, \ldots, v_{n1}, v_{n2}, \ldots, v_{nm}\}$ adalah himpunan titik pada graf G, sedangkan himpunan sisi berarah graf $C_n \odot \overline{K}_m$ adalah $A = \{(v_{2i-1}, v_{2i}), 1 \leq i \leq \frac{n-1}{2}\} \cup \{v_{2i+1}, v_{2i}), 1 \leq i \leq \frac{n-1}{2}\} \cup \{v_n, v_1)\} \cup \{(v_i, v_{i,j}), 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$, seperti Gambar 3.11 berikut ini:



Gambar 11 Graf Korona $C_n \odot \overline{K}_m$ yang sisi-sisinya telah diberi arah

Definisikan pelabelan titik dan busur pada graf korona $C_n \odot \overline{K}_m$ sebagai berikut:

Label pada himpunan busur A adalah

$f((v_{2i+1}, v_{2i})) = i,\ 1 \leq i \leq \frac{n-1}{2}$

$f((v_{2i-1}, v_{2i})) = n(m+1) - (\frac{n-1}{2}) - 1 + i,$
$1 \leq i \leq \frac{n-1}{2}$

$f((v_n, v_1)) = n(m+1)$

$f((v_i, v_{i(2j-1)})) = (\frac{n-1}{2}) + \frac{m}{2}(i-1) + j,$
$1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq \frac{m}{2}$

$f((v_i, v_{i(2j)})) = [n(m+1) - (\frac{n-1}{2})] - \frac{m}{2}(i-1) - j,\ 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le \frac{m}{2}$

Pelabelan titik untuk graf star didefinisikan sebagai berikut.

$g(v_{i\,(2j-1)}) = (\frac{n-1}{2}) + \frac{m}{2}(i-1) + j,\ 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le \frac{m}{2}$

$g(v_{i\,(2j)}) = [\,n(m+1) - (\frac{n-1}{2})] - \frac{m}{2}(i-1) - j,\ 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le \frac{m}{2}$

Pelabelan titik untuk graf sikel didefinisikan sebagai berikut.

Kasus 1, $(\frac{n-1}{2})$ adalah bilangan ganjil.

$g(v_{2i-1}) = (\frac{n-1}{2}) + 2 - 2i,\ 1 \le i \le \frac{n+1}{4}$

$g(v_{2i}) = n(m+1) - (\frac{n-1}{2}) - 1 + 2i,\ 1 \le i \le \frac{n-3}{4}$

$g(v_{(\frac{n-3}{2})+2i}) = 2i - 2,\ 1 \le i \le \frac{n+1}{4}$

$g(v_{(\frac{n-1}{2})+2i}) = n(m+1) + 1 - 2i,\ 1 \le i \le \frac{n+1}{4}$

Kasus 2, $(\frac{n-1}{2})$ adalah bilangan genap.

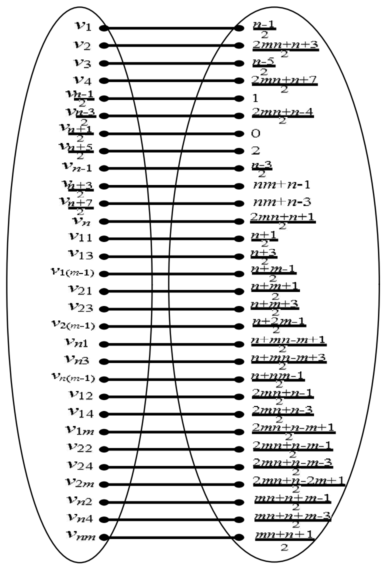
$g(v_{2i-1}) = (\frac{n-1}{2}) + 2 - 2i,\ 1 \le i \le \frac{n+3}{4}$

$g(v_{2i}) = n(m+1) - (\frac{n-1}{2}) - 1 + 2i,\ 1 \le i \le \frac{n-1}{4}$

$g(v_{\frac{n-1}{2}+2i}) = 2i - 1,\ 1 \le i \le \frac{n-1}{4}$

$g(v_{\frac{n+1}{2}+2i}) = n(m+1) - 2i,\ 1 \le i \le \frac{n-1}{4}$

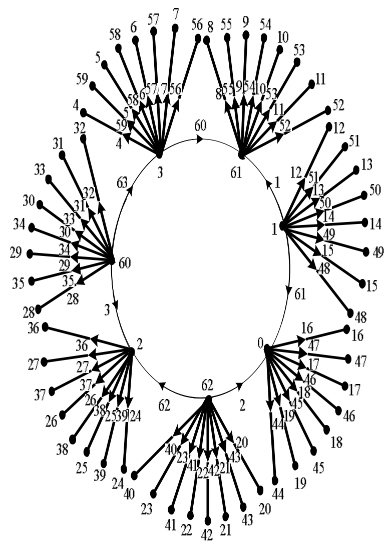
Selanjutnya untuk membuktikan bahwa graf $C_n \odot \bar{K}_m$ graf *graceful* sisi berarah, akan ditunjukkan bahwa pelabelan titik g merupakan pemetaan bijektif sebagai berikut:



Gambar 12 Pemetaan bijektif g pada graf korona $C_n \odot \bar{K}_m$ dengan $\frac{n-1}{2}$ bilangan ganjil

Jadi, diperoleh bahwa g merupakan pemetaan bijektif, sehingga terbukti bahwa graf $C_n \odot \bar{K}_m$ dapat dilabeli dengan pelabelan *graceful* sisi berarah. Oleh karena itu, graf $C_n \odot \bar{K}_m$ dapat dikatakan graf *graceful* sisi berarah. ■

Contoh 3.13



Gambar 13 Graf $C_7 \odot \bar{K}_8$ dengan pelabelan *graceful* sisi berarah

4. KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan dari bab sebelumnya mengenai pelabelan *graceful* sisi berarah pada gabungan graf sikel dan graf star, dapat diambil kesimpulan sebagai berikut**:**

1. Graf C_{2m} @ $K_{1,\ 2n+1}$ dengan $m \geq 2$ dan $n \geq 1$ dapat dilabeli dengan pelabelan *graceful* sisi berarah, sehingga Graf C_{2m} @ $K_{1,\ 2n+1}$ dapat dikatakan graf *graceful* sisi berarah.
2. Graf C_{2m+1} @ $K_{1,\ 2n}$ dengan $m \geq 1$ dan $n \geq 1$ dapat dilabeli dengan pelabelan *graceful* sisi berarah, sehingga Graf C_{2m+1} @ $K_{1,\ 2n}$ dapat dikatakan graf *graceful* sisi berarah.
3. Graf korona $C_n \odot \bar{K}_m$ dengan $n \geq 3$ dan $m \geq 2$, dimana n bilangan ganjil dan m bilangan genap dapat dilabeli dengan pelabelan *graceful* sisi berarah, sehingga Graf $C_n \odot \bar{K}_m$ dapat dikatakan graf *graceful* sisi berarah.

5. DAFTAR PUSTAKA

[1] Abdussakir, Azizah, N.N, and Nofandika, F.F. (2009). "*Teori Graf*". Malang : UIN-Malang Press.

[2] Abdussakir, (2008), *Graph Labelling*, Abdussakir's Blog. http://abdussakir.wordpress.com (diakses pada tanggal 21 Oktober 2011)

[3] B, Gayathri and V, Vanitha, (2011) Directed Edge-Graceful Labelling of Cycle and Star Related Graph, *International Journal of Mathematics and Soft Computing*, 1(1) :89 – 104.

[4] Bartle, Robert G. and Donald R. Sherbert. (2000), *Introduction to Real Analysis Third Edition*. New York : John Willey and Sons.

[5] Chartrand, G. and Lesniak, L. (1996), "*Graphs & Digraphs, 3^{rd} ed*", Chapman & Hill. London.

[6] Howard Anton and Chris Rorres. (1988), *Penerapan Aljabar Liniear*, Erlangga. Jakarta.

[7] Rosen, Kenneth H. (2007), *Discrete Mathematics and Its Applications Sixth Edition*. New York : McGRAW-HILL BOOK COMPANY.

[8] Triyas Lestari. (2010), *Pelabelan graceful dan graceful ganjil pada path, sikel dan gabungan graf sikel dan graf path*, Semarang : FMIPA Universitas Diponegoro.

[9] Vajar Kasmawati. (2008), *Pelabelan total a-simpul berurutan busur ajaib pada gabungan dua graf yang terdiri dari graf bintang dan graf yang mengandung unicycle*, Depok : F.MIPA Universitas Indonesia. (diakses pada tanggal 12 November 2011).

[10] Wilson, J. Robin and John J. Watskin. (1990), *Graphs An Introductory Approach* New York : University Course Graphs, Network, and Design.