ENDOMORFISMA L_0 DARI *BCH*-ALJABAR

Restia Sarasworo Citra[1], Suryoto[2]
[1,2] Jurusan Matematika FMIPA UNDIP
Jl. Prof. H. Soedarto, S. H, Tembalang, Semarang
Jurusan Matematika FMIPA UNDIP

Abstract. *BCH*-algebras is an algebraic structure which built on a commutative group. In *BCH*-algebra there is a mapping from this structure to itself which called a *BCH*-endomorphism. In *BCH*-algebra context, we denote *L* as a set of all left mapping and it contains L_0 which the only non-identity *BCH*-endomorphism in *L* with some properties : the left map L_0 is a center of *BCH*-endomorphism, L_0 both be a periodic mapping dan an epimorphism on *BCH*-algebra. Such as a group with the fundamental group homomorphism theorem, in a *BCH*-algebra we have a fundamental *BCH*-algebra homomorphism theorem.

Keywords : endomorphism, left mapping, periodic.

1. PENDAHULUAN

Pada tahun 1996, Y. Imai dan K. Iseki telah memperkenalkan dua kelas penting dari aljabar logika, yaitu *BCK*-aljabar dan *BCI*-aljabar [5, 6]. Selanjutnya pada referensi [3, 4], Q. P. Hu dan X. Li juga memperkenalkan kelas aljabar logika yang lain, yang disebut *BCH*-aljabar. Oleh keduanya diperlihatkan bahwa *BCH*-aljabar merupakan perumuman dari *BCI*-aljabar. Pembahasan BCH-aljabar lebih lanjut dilakukan oleh M. A. Chaudary dan H. Fakhruddin [1]. Menurut [3], *BCH*-aljabar merupakan struktur aljabar yang dibentuk dari grup komutatif. Di dalam *BCH*-aljabar, seperti telah dipakai pada [2], notasi *L* dimaksudkan adalah himpunan semua pemetaan kiri dari *BCH*-aljabar ke dirinya sendiri, di mana pemetaan kiri ini dituliskan dengan notasi $L_x : X \to X$ dimana setiap unsur *t* di *X* dikaitkan dengan unsur $x * t$ di *X* yang didefinisikan oleh $L_x(t) = x * t$. Di dalam himpunan semua pemetaan kiri *L* tersebut terdapat L_0 yang didefinisikan dengan $L_0(t) = 0 * t$ di mana pemetaan L_0 tersebut merupakan *BCH*-endomorfisma. Pada makalah ini, akan dibahas lebih jauh mengenai pemetaan ini dan sifat-sifat pentingnya.

2. *BCH*-ALJABAR

Berikut ini terlebih dahulu diberikan definisi dari *BCH*-aljabar.

Definisi 2.1 [3], [4] *Misalkan* $(X, \bullet)$ *suatu grup komutatif dengan operasi biner* $\bullet$ *dan 0 sebagai unsur identitas. Selanjutnya jika pada X didefinisikan operasi biner* $*$ *dengan* $x * y = x \bullet y^{-1}, \forall x, y \in X$, *maka tripel terurut* $(X, *, 0)$ *dikatakan BCH-aljabar jika untuk setiap* $x, y, z \in X$ *memenuhi aksioma-aksioma berikut :*

(BCH1) $x * x = 0$

(BCH2) jika $x * y = 0$ *dan* $y * x = 0$ *maka* $x = y$

(BCH3) $(x * y) * z = (x * z) * y$

Contoh 2.1 Misalkan $X = \{0,1,2\}$ suatu himpuanan yang dilengkapi dengan operasi biner $\bullet$ seperti diberikan oleh tabel berikut.

Tabel 1. Operasi $\bullet$ pada *X*

$\bullet$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Terlihat bahwa $X=\{0,1,2\}$ merupakan grup komutatif terhadap operasi $\bullet$. Selanjutnya jika pada *X* didefinisikan operasi "$*$" dengan

$$x*y=x\bullet y^{-1},\forall x,y\in X,$$

maka diperoleh tabel berikut ini.

Tabel 2. Operasi $*$ pada *X*

$*$	0	1	2
0	0	2	1
1	1	0	2
2	2	1	0

X ={0,1,2} dengan operasi biner "$*$" seperti pada Tabel 2.2 merupakan *BCH*-aljabar karena $\forall x,y,z\in X$ memenuhi aksioma BCH1,BCH2 dan BCH3.

Proposisi 2.2 [3] *Jika $(X,*,0)$ adalah suatu BCH-aljabar, maka berlaku sifat-sifat berikut :*

1. $x*0=x$
2. $x*0=0\Rightarrow x=0$
3. $0*(x*y)=(0*x)*(0*y)$
4. $0*(0*(0*x))=0*x$
5. $\{x*(x*y)\}*y=0$

Selanjutnya diberikan definisi *BCH*-endomorfisma beserta sifat pentingnya, seperti diberikan oleh definisi dan teorema berikut.

Definisi 2.3 [3] *Suatu pemetaan $\phi:X\to X$ pada BCH-aljabar $(X,*,0)$ disebut BCH-endomorfisma jika $\phi(x*y)=\phi(x)*\phi(y)$ untuk semua $x,y\in X$.*

Teorema 2.4 [3] *Jika $\phi:X\to X$ adalah suatu BCH- endomorfisma dari $(X,*,0)$, maka :*

(i) $\phi(0)=0$

(ii) $\phi(0*x)=0*\phi(x)$

(iii) *Jika* $x*y=0$ *maka* $\phi(x)*\phi(y)=0$

(iv) *Jika S adalah BCH-subaljabar dari X maka $\phi(S)$ adalah BCH-subaljabar dari X juga*

(v) *Jika S adalah suatu BCH-ideal dari X maka $\phi(S)$ adalah BCH- ideal dari X juga*

(vi) $Ker\phi=\{x\in X:\phi(x)=0\}$ *adalah ideal dari X, untuk setiap ϕ dalam $End(X)$*

Definisi 2.5 [3] *Untuk setiap elemen $x\in X$ berpadanan dengan pemetaan kiri L_x dengan pemetaan $L_x:X\to X$ didefinisikan oleh $L_x(t)=x*t$ untuk semua $t\in X$.*

3. ENDOMORFISMA L_0 DARI *BCH*-ALJABAR

Dari Definisi 2.5, jika $x=0$ maka dipunyai pemetaan kiri L_0. Berikut ini diberikan definisi mengenai pusat dari himpunan semua endomorfisma dari *X* dan pemetaan kiri L_0 ini.

Definisi 3.1 [2] *Misalkan End(X) menyatakan himpunan semua endomorfisma dari BCH-aljabar $(X,*,0)$, pusat dari End(X) dinotasikan dengan p(End(X)) tidak lain adalah p(End(X)) = $\{f\in End(X)\mid f\circ\phi=\phi\circ f,\forall\phi\in End(X)\}$.*

Teorema 3.2 [3] *Misalkan $(X,*,0)$ adalah BCH-aljabar, maka L_0 adalah satu-satunya BCH-endomorfisma dari X di dalam L.*

Bukti :

Dapat dibuktikan bahwa L_0 adalah suatu endomorfisma dari *X*, sebab untuk semua $x,y\in X$, berlaku :

$$L_0(x)*L_0(y)=L_0(x*y)$$

Akan ditunjukkan bahwa L_0 adalah satu-satunya *BCH*-endomorfisma dari *X* di dalam *L*. Diambil sebarang $x\in X$ dengan $x\neq 0$, kemudian dibentuk pemetaan $L_x:X\to X$ melalui pengaitan setiap unsur *t* di *X* dikaitkan dengan unsur $x*t$ di *X*, atau $L_x(t)=x*t$. Andaikan L_x suatu endomorfisma pada *X*, maka berlaku :

$$\begin{aligned}x*0&=L_x(0)\\&=L_x(0)*L_x(0)\\&=0\end{aligned}$$

Bertentangan dengan $x\neq 0$. Jadi L_x dengan $x\neq 0$ bukan merupakan endomorfisma pada *X* atau dengan kata lain satu-satunya endomorfisma pada *X* di dalam *L* adalah L_0.

Teorema 3.3 [2] *Pada BCH-aljabar* $(X,*,0)$, *L_0 termuat di dalam pusat dari BCH-endomorfisma.*

Bukti :

Misalkan ϕ adalah endomorfisma pada $(X,*,0)$, dan x sebarang unsur pada X maka :

$$\begin{aligned} \phi \circ L_0(x) &= \phi[L_0(x)] \\ &= \phi(0*x) \\ &= 0*\phi(x) \\ &= L_0 \circ \phi(x) \end{aligned}$$

Karena hal ini berlaku $\forall\ \phi \in End(X)$ dan $x \in X$, maka didapat $\phi \circ L_0 = L_0 \circ \phi$, yaitu $L_0 \in p(End(X))$.

Dalam *BCH*-aljabar $(X,*,0)$, untuk semua $x \in X$, akan diberikan notasi-notasi perpangkatan yang akan digunakan pada pembahasan lebih lanjut, yaitu :

(i) $0*x = 0^1 * x$

(ii) $0*(0*x) = 0^2 * x$

(iii) $0*(0*(0*x)) = 0^3 * x$

(iv) $\underbrace{0*(0*(0*\ldots(0*x)))}_{0 \text{ sebanyak } n \text{ kali}} = 0^n * x$, untuk semua n bilangan bulat positif.

Teorema 3.4 [2] *Misalkan* $(X,*,0)$ *suatu BCH-aljabar, maka untuk sebarang bilangan bulat positif l, m, k dan x, y*$\in X$ *berlaku :*

(a) $0*(0^k * x) = 0^{k+1} * x$

(b) $0^l * (0^m * x) = 0^{l+m} * x$

(c) $(0^l * x) * (0^l * y) = 0^l * (x*y)$

Teorema 3.5 [2] *Jika* $(X,*,0)$ *merupakan BCH-aljabar, maka untuk semua* $x \in X$ *berlaku:*

$0^3 * x = 0 * x$

Bukti :

$$\begin{aligned} 0^3 * x &= 0*(0*(0*x)) \\ &= 0*x \end{aligned}$$

Teorema 3.6 [2] *Pada BCH-aljabar* $(X,*,0)$, *L_0 adalah pemetaan periodik dengan periode 2.*

Bukti :

Diambil sebarang unsur $x \in X$, akan diperoleh:

(i) $L_0(x) = 0*x$

(ii) $L_0^{\ 2}(x) = x$

sehingga dapat diperoleh bahwa :

$$L_0^{\ n}(x) = \begin{cases} 0*x, & \text{untuk semua n ganjil} \\ x, & \text{untuk semua n genap} \end{cases}$$

Teorema 3.7 [2] *Pada BCH-aljabar* $(X,*,0)$, *L_0^2 adalah pemetaan identitas dari* $L_0(X)$.

Bukti :

Menurut Teorema 3.6, dapat dilihat bahwa L_0 adalah pemetaan periodik dengan periode 2 dan karena $L_0^{\ 2}(x) = x, \forall x \in X$, maka $L_0^{\ 2}$ adalah pemetaan identitas dari L_0.

Teorema 3.8 [2] *Pada BCH-aljabar* $(X,*,0)$, *L_0 adalah epimorfisma pada X.*

Bukti :

Misalkan diambil sebarang unsur $y \in X$ dan dipilih $x = (0*y)*0$, akan dibuktikan $\forall y \in X, \exists x \in X \ni y = L_0(x)$.

$$\begin{aligned} L_0(x) &= L_0((0*y)*0) \\ &= 0*((0*y)*0) \\ &= 0*(0*y) \\ &= y \end{aligned}$$

Teorema 3.9 [2] *Jika* $(X,*,0)$ *adalah BCH-aljabar, maka untuk semua* $x, y, z \in X$, *berlaku:*

(a) $0*(x*y) = 0^2 * (y*x)$

(b) $(0^2 * z)*(y*x) = 0^2 * (x*(y*z))$

Bukti :

(a) Diambil sebarang $x, y \in X$, maka :

$$\begin{aligned} 0*(x*y) &= 0^3 * (x*y) \\ &= 0^2 * (0*(x*y)) \end{aligned}$$

$$= 0^2 * \left(\left(0^2 * y\right) * x\right)$$
$$= \left(0^2 * y\right) * \left(0^2 * x\right)$$
$$= 0^2 * (y * x)$$

(b) Diambil sebarang $x, y, z \in X$, maka

$$\left(0^2 * z\right) * (y * x) = (0 * (0 * z)) * (y * x)$$
$$= (0 * (y * x)) * (0 * z)$$
$$= 0 * ((y * z) * x)$$
$$= (0 * (0 * x)) * (y * z)$$
$$= \left(0^2 * x\right) * (y * z)$$
$$= x * (y * z)$$
$$= 0^2 * (x * (y * z))$$

Akibat 3.10 [2] *Pada BCH-aljabar* $(X,*,0)$, *berlaku* $0 * (x * (x * y)) = 0 * y \, \forall \, x, y \in X$

Bukti :

Diambil sebarang $x, y \in X$, maka :

$$0 * (x * (x * y)) = (0 * x) * (0 * (x * y))$$
$$= (0 * x) * ((0 * x) * (0 * y))$$
$$= (0 * ((0 * x) * (0 * y))) * x$$
$$= \left(\left(0^2 * x\right) * \left(0^2 * y\right)\right) * x$$
$$= (x * y) * x$$
$$= (x * x) * y$$
$$= 0 * y$$

Akibat 3.11 [2] *Pada BCH-aljabar* $(X,*,0)$, *berlaku* $0 * ((x * y) * (x * z)) = 0 * (z * y) \, \forall \, x, y, z \in X$

Bukti :

Diambil sebarang $x, y, z \in X$, maka :

$$0 * ((x * y) * (x * z)) = 0 * ((x * (x * z)) * y)$$
$$= (0 * (x * (x * z))) * (0 * y)$$
$$= (0 * z) * (0 * y)$$
$$= 0 * (z * y)$$

Akibat 3.12 [2] *Pada BCH-aljabar* $(X,*,0)$, *berlaku* $\left(0^2 * y\right) * x = (0 * (x * y)) \, \forall \, x, y \in X$

Bukti :

Diambil sebarang $x, y \in X$, maka :

$$\left(0^2 * y\right) * x = (0 * (0 * y)) * x$$
$$= (0 * x) * (0 * y)$$
$$= 0 * (x * y)$$

4. RELASI PADA *BCH*-ALJABAR

Berikut akan diberikan definisi mengenai relasi "~" pada *BCH*-aljabar.

Definisi 4.1 *[2]Misalkan* $(X,*,0)$ *merupakan BCH-aljabar, relasi "~" pada X didefinisikan dengan* $x \sim y \Leftrightarrow x * y = 0$ *untuk setiap* $x, y \in X$.

Teorema 4.2

Pada BCH-aljabar $(X,*,0)$, *relasi "~" bersifat refleksif, tidak simetris, antisimetris, dan tidak transitif.*

Bukti :

a) Relasi "~" bersifat refleksif, artinya $\forall x \in X$ berlaku $x \sim x$.
   Diambil sebarang $x \in X$, maka menurut aksioma BCH1, $x * x = 0$ atau $x \sim x$.
b) Relasi "~" bersifat tidak simetris
   Andaikan relasi "~" bersifat simetris, maka $\forall x, y \in X$ dan berlaku $x \sim y$ maka $y \sim x$. Diambil sebarang $x, y \in X$ dan berlaku $x \sim y$ atau $x * y = 0$. Akan diperlihatkan apakah $y \sim x$ atau $y * x = 0$.
   Dalam hal ini terdapat dua kemungkinan terhadap unsur x dan y, yaitu $x = y$ atau $x \neq y$.
   (i) Untuk $x = y$, maka $y * x = x * x = 0$, ini berarti $y \sim x$.
   (ii) Untuk $x \neq y$, klaim bahwa $y * x \neq 0$. Andaikan $y * x = 0$, dengan mengingat bahwa $x \sim y$ yaitu $x * y = 0$, maka akan diperoleh $x = y$, hal ini bertentangan dengan $x \neq y$, jadi yang benar adalah $y * x \neq 0$.

   Dari (ii) dapat disimpulkan bahwa relasi "~" tidak simetris.

c) Relasi "~" bersifat antisimetris yaitu $\forall x.y \in X$ dan berlaku $x \sim y$ dan $y \sim x$, maka $x = y$.

d) Relasi "~"bersifat tidak transitif
Andaikan relasi "~" bersifat transitif, maka $\forall x, y, z \in X$ dan berlaku $x \sim y$ dan $y \sim z$, maka $x \sim z$.
Diambil sebarang $x, y, z \in X$ dan berlaku $x \sim y$ dan $y \sim z$, maka dari dua hubungan diatas dipunyai $x * y = 0$ dan $y * z = 0$. Akan diperlihatkan apakah $x \sim z$ atau $x * z = 0$.
Terdapat dua kemungkinan terhadap unsur x , y dan z yaitu :
(i) $x = y = z$
Untuk $x = y = z$, maka $x * z = x * x = 0$
(ii) x , y dan z ketiganya berbeda.
akan diperlihatkan apakah $x \sim z$ atau $x * z = 0$.
$$\begin{aligned} x * z &= (x * 0) * z \\ &= (x * 0) * (z * 0) \\ &= 0 * (z * y) \end{aligned}$$
Karena $0 * (z * y) \neq 0$ maka $x * z \neq 0$.
Dari (ii) dapat disimpulkan bahwa relasi "~" tidak transitif.

Teorema 4.3 [2] *Pada BCH-aljabar* $(X,*,0)$, *relasi "~" bersifat transitif jika 0 ~ x dan x ~ y maka 0 ~ y.*

Bukti :
Diambil sebarang $x, y \in X$ berlaku $0 \sim x$ atau $0 * x = 0$ dan $x \sim y$ atau $x * y = 0$. Akan dibuktikan bahwa $0 \sim y$ atau $0 * y = 0$.
$$\begin{aligned} 0 * y &= 0 * (0^2 * y) \\ &= 0 * (0 * (0 * y)) \\ &= 0 * ((0 * x) * (0 * y)) \\ &= 0 \end{aligned}$$
atau dapat dikatakan bahwa $0 \sim y$.

Selanjutnya akan diberikan definisi relasi "$\approx$" pada *BCH*-aljabar *X*

Definisi 4.4 [2] *Misalkan* $(X,*,0)$ *suatu BCH-aljabar, relasi "*$\approx$*" pada X didefinisikan dengan* $x \approx y \Leftrightarrow x * y \in Ker(L_0)$ *untuk setiap* $x, y \in X$.

Lemma 4.5 [2] *Misalkan* $(X,*,0)$ *suatu BCH-aljabar dan terdapat relasi "*$\approx$*" pada X, maka berla* $x \approx y \Leftrightarrow 0 * x = 0 * y$; $x, y \in X$.

Bukti :
Dengan melihat definisi dari relasi "$\approx$" dimana untuk setiap $x, y \in X$ berlaku $x \approx y \Leftrightarrow x * y \in Ker(L_0)$, maka $\forall x, y \in X$ akan dibuktikan bahwa
$$x * y \in Ker(L_0) \Leftrightarrow 0 * x = 0 * y.$$
($\Rightarrow$) Diambil sebarang $x, y \in X$ dan misalkan berlaku $x * y \in Ker(L_0)$ atau $L_0(x * y) = 0 * (x * y) = 0$, maka $0 * (x * y) = 0$ atau
$$(0 * x) * (0 * y) = 0 \quad .... \qquad (4.1)$$
disisi lain, $(0 * (0 * y)) * x = 0$
atau $(0 * y) * (0 * x) = 0 \quad ... \qquad (4.2)$
Dari (4.1) dan (4.2), menurut aksioma BCH2 , maka terlihat bahwa $0 * x = 0 * y$.

($\Leftarrow$) Diambil sebarang $x, y \in X$ dan berlaku $0 * x = 0 * y$, maka dari $0 * x = 0 * y$, didapat $(0 * x) * (0 * y) = 0$ atau $0 * (x * y) = 0$ yaitu $L_0(x * y) = 0$ yang memberikan $x * y \in Ker(L_0)$.

Teorema 4.6 *Misalkan* $(X,*,0)$ *adalah BCH-aljabar, relasi "*$\approx$*" merupakan relasi ekuivalensi.*

Bukti :
Akan dibuktikan bahwa relasi "$\approx$" bersifat refleksif, simetris dan transitif.

a) Relasi "$\approx$" bersifat refleksif yaitu $\forall x \in X$ berlaku $x \approx x$.
Diambil sebarang $x \in X$, maka $0 * (x * x) = 0 * 0 = 0$ atau $L_0(x * x) = 0$ yaitu $x * x \in Ker(L_0)$. Maka benar bahwa $x \approx x$.

b) Relasi "$\approx$" bersifat simetris yaitu $\forall x, y \in X$ dan berlaku $x \approx y$ maka $y \approx x$.
   Diambil sebarang $x, y \in X$ dan berlaku $x \approx y$ atau $x * y \in Ker(L_0)$ atau $L_0(x * y) = 0 * (x * y) = 0$. Akan dibuktikan bahwa $y * x \in Ker(L_0)$ atau $0 * (y * x) = 0$.
   $$0 * (y * x) = (0 * (x * y)) * (y * x)$$
   $$= 0 \text{ atau}$$
   $L_0(y * x) = 0$, yaitu $y * x \in Ker(L_0)$, maka $y \approx x$.

c) Relasi "$\approx$" bersifat transitif yaitu $\forall x, y, z \in X$ berlaku $x \approx y$ dan $y \approx z$, maka $x \approx z$.
   Diambil sebarang $x, y, z \in X$ dan berlaku $x \approx y$ atau $x * y \in Ker(L_0)$ atau $L_0(x * y) = 0 * (x * y) = 0$ dan $y \approx z$ atau $y * z \in Ker(L_0)$ atau $L_0(y * z) = 0 * (y * z) = 0$ .Akan dibuktikan bahwa $x * z \in Ker(L_0)$.
   $$\begin{aligned} 0 * (x * z) &= (0 * 0) * (x * z) \\ &= (0 * (z * x)) * (x * z) \\ &= (0^2 * (x * z)) * (x * z) \\ &= (x * z) * (x * z) \\ &= 0 \end{aligned}$$

atau $L_0(x * z) = 0$, yaitu $x * z \in Ker(L_0)$, atau dengan perkataan lain $x \approx z$.

Jadi karena relasi "$\approx$" bersifat refleksif, simetris dan transitif, maka relasi "$\approx$" disebut relasi ekuivalensi.

Definisi 4.7 [2] *Misalkan X adalah himpunan tidak kosong, dan terdapat relasi R_1 dan R_2 pada X, maka relasi R_2 disebut penutup ekuivalen dari R_1 pada X jika :*

(i) $R_1 \subseteq R_2$

(ii) R_2 adalah relasi ekuivalensi.

Teorema 4.8 [2] *Pada BCH-aljabar $(X, *, 0)$ dan terdapat relasi "~" dan "$\approx$" pada X , maka relasi "$\approx$" disebut penutup ekuivalen dari "~" pada X.*

Bukti :

(i) Pertama akan dibuktikan bahwa ~ $\subseteq \approx$. Diambil sebarang $x, y \in X$, akan ditunjukkan apabila $x \sim y$ maka $x \approx y$.
   Diambil sebarang $(x, y) \in \sim$, maka,
   $$\begin{aligned} x \sim y &\Leftrightarrow x * y = 0 \\ &\Leftrightarrow x * y \in Ker(L_0) \\ &\Leftrightarrow x \approx y \end{aligned}$$
   Dengan kata lain $(x, y) \in \approx$
   Sehingga terbukti bahwa ~ $\subseteq \approx$.

(ii) Telah dibuktikan bahwa relasi "$\approx$" merupakan relasi ekuivalensi

Sehingga karena ~ $\subseteq \approx$ dan relasi "$\approx$" merupakan relasi ekuivalensi, maka relasi "$\approx$" merupakan penutup ekuivalen dari "~"pada *X*.

Dengan mengingat bahwa relasi "$\approx$"merupakan relasi ekuivalensi yang didefinisikan dengan $x \approx y$ jika dan hanya jika $x * y \in Ker(L_0)$, apabila dipilih salah satu kelas ekuivalensi yang memuat 0 yaitu
$$\begin{aligned} \bar{0} &= \{x \in X \mid 0 \approx x\} \\ &= \{x \in X \mid 0 * x \in Ker(L_0)\} \\ &= \{x \in X \mid 0 * x = 0\} \\ &= Ker(L_0) \end{aligned}$$
maka $Ker(L_0)$ merupakan salah satu kelas ekuivalensi pada *X*, sehingga dapat dibentuk aljabar hasil bagi $X / Ker(L_0)$.

Akibat 4.9 [2] *Jika $Ker(L_0) = X$ maka BCH-aljabar hasil bagi $X / Ker(L_0)$ yaitu $X / X = X$.*

Bukti :

Karena $Ker(L_0) = X$, maka $X / Ker(L_0) = X / X$.

Akan ditunjukkan bahwa $X / X = X$.
$$\begin{aligned} X / X &= \{\bar{x} \mid \bar{x} = x * X, x \in X\} \\ &= X \end{aligned}$$

Selanjutnya apabila aljabar hasil bagi $X/Ker(L_0)$ dilengkapi operasi biner "$*$", kemudian diambil sebarang $\overline{x}, \overline{y} \in X/Ker(L_0)$, dan dibentuk pengaitan :

$$* : (\overline{x}, \overline{y}) \mapsto (\overline{x} * \overline{y})$$

dengan

$$\overline{x} * \overline{y} = \overline{x * y}$$

yang mendefinisikan pemetaan

$$* : \frac{X}{Ker(L_0)} \times \frac{X}{Ker(L_0)} \to \frac{X}{Ker(L_0)}$$

Dengan menggunakan operasi $*$ tersebut, dan dilengkapi dengan $\overline{0}$ sebagai elemen khusus, maka dapat dibentuk $(X/Ker(L_0), *, \overline{0})$

Teorema 4.10 [2] *Jika* $Ker(L_0) = \{x \in X : 0 * x = 0\}$ *adalah ideal sejati pada X maka aljabar hasil bagi* $X/Ker(L_0)$ *adalah BCH-aljabar.*

Bukti :

Pada *BCH*-aljabar $(X, *, 0)$, didefinisikan aljabar hasil bagi $X/Ker(L_0)$ $= \{\overline{x} \mid \overline{x} = x * Ker(L_0), x \in X\}$.

(i) Pertama, akan ditunjukkan terlebih dahulu bahwa $X/Ker(L_0) \neq \{\ \}$.
Aljabar hasil bagi $X/Ker(L_0) \neq \{\ \}$ karena paling tidak terdapat $\overline{0} \in X/Ker(L_0)$ yaitu $\overline{0} = 0 * 0$ yang disebabkan karena setidaknya terdapat $0 \in X$ dan $0 \in Ker(L_0)$.

(ii) Kedua, akan diperlihatkan bahwa $X/Ker(L_0)$ adalah *BCH*-aljabar yaitu $\forall \overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in X/Ker(L_0)$ memenuhi aksioma BCH1, BCH2 dan BCH3.

1. Aksioma BCH1 dipenuhi yaitu $\overline{x} * \overline{x} = \overline{0}$.
2. Aksioma BCH2 dipenuhi yaitu jika $\overline{x} * \overline{y} = \overline{0}$ dan $\overline{y} * \overline{x} = \overline{0}$ maka $\overline{x} = \overline{y}$
3. Aksioma BCH3 dipenuhi yaitu $(\overline{x} * \overline{y}) * \overline{z} = (\overline{x} * \overline{z}) * \overline{y}$

Karena semua aksioma *BCH*-aljabar terpenuhi, maka $(X/Ker(L_0), *, \overline{0})$ adalah suatu *BCH*-aljabar.

Teorema 4.11 [2] *Pada BCH-aljabar* $(X, *, 0)$, *pemetaan* $\eta_0 : X \to X/Ker(L_0)$ *yang didefinisikan dengan* $\eta_0(x) = x * Ker(L_0)$ *adalah BCH-homomorfisma.*

Bukti:

Pertama, Untuk setiap unsur $x \in X$, dibentuk pengaitan $\eta_0 : x \to \eta_0(x)$, diambil sebarang unsur $x, y \in X$ dengan $x = y$, sesuai dengan pengaitan diatas, maka:

$$\eta_0(x) = \eta_0(y)$$

sehingga ini berarti pengaitan $\eta_0 : x \to \eta_0(x)$ mendefinisikan pemetaan $\eta_0 : X \to X/Ker(L_0)$.

Kedua, akan diperlihatkan bahwa $\eta_0 : X \to X/Ker(L_0)$ merupakan suatu homomorfisma. Diambil sebarang $x, y \in X$, maka

$$\begin{aligned} \eta_0(x * y) &= (x * y) * Ker(L_0) \\ &= \eta_0(x) * \eta_0(y) \end{aligned}$$

Teorema 4.12 [2] *Jika X adalah suatu BCH-aljabar, dan L_0 adalah epimorfisma pada X, maka* $X/KerL_0 \cong X$.

Bukti :

Untuk bukti bagian ini dapat dipandang diagram komutatif berikut.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "L_0"] \arrow[d, "\eta_0"'] & X \\ \dfrac{X}{Ker(L_0)} \arrow[ur, "\eta"'] & \end{tikzcd}$$

Gambar 1 Diagram Komutatif Teorema Fundamental Homomorfisma *BCH*-aljabar

Pertama, untuk sebarang unsur tetap $\overline{x} \in X / Ker(L_0)$, dibentuk pengaitan $\eta : \overline{x} \mapsto L_0(x)$. Akan diperlihatkan bahwa pengaitan ini mendefinisikan pemetaan $\eta : X / Ker(L_0) \to X$. Untuk itu diambil sebarang unsur $x, y \in X$ yang mewakili satu koset di $X / Ker(L_0)$ yaitu $\overline{x} = \overline{y}$, maka

$x * Ker(L_0) = y * Ker(L_0)$

$(x * y) * Ker(L_0) = 0 * Ker(L_0)$

Akibatnya $x * y \in Ker(L_0)$ atau $L_0(x * y) = 0$, selanjutnya karena $L_0(x * y) = 0$, maka $L_0(x) = L_0(y)$. Ini berarti pengaitan $\eta : \overline{x} \mapsto L_0(x)$ tidak bergantung pada wakil koset $\overline{x}$, sehingga benar bahwa pengaitan $\eta : \overline{x} \mapsto L_0(x)$ mendefinisikan suatu pemetaan $\eta : X / Ker(L_0) \to X$.

Kedua, akan diperlihatkan bahwa pemetaan $\eta : X / Ker(L_0) \to X$ merupakan homomorfisma.

Diambil sebarang $x, y \in X$, maka:

$\eta((x * Ker(L_0)) * (y * Ker(L_0)))$

$= \eta((x * y) * Ker(L_0))$

$= \eta(x * Ker(L_0)) * \eta(y * Ker(L_0))$

§ Akan diperlihatkan bahwa $\eta : X / Ker(L_0) \to X$ suatu pemetaan yang bijektif.

(i) Akan diperlihatkan bahwa $\eta : X / Ker(L_0) \to X$ pemetaan yang bersifat satu – satu. Diambil sebarang $\overline{x}, \overline{y} \in X / Ker(L_0)$ sedemikian hingga $\eta(\overline{x}) = \eta(\overline{y})$, maka $L_0(x) = L_0(y)$

$L_0(x * y) = L_0(y * y)$

$0 * (x * y) = 0$

akibatnya $x * y = 0$ .... (4.1)

Di sisi lain $L_0(x) = L_0(y)$

$L_0(x * x) = L_0(y * x)$

$0 = 0 * (y * x)$

yaitu $y * x = 0$ .... (4.2)

Dengan demikian dari (4.1) dan (4.2), serta menurut aksioma BCH2, maka $x = y$

(ii) Akan diperlihatkan bahwa $\eta : X / Ker(L_0) \to X$ merupakan pemetaan yang bersifat pada.

Diambil sebarang $x' \in X$, karena $L_0 : X \to X$ epimorfisma, maka $\exists x \in X \ni x' = L_0(x) = \eta(\overline{x})$. Dengan demikian terbukti bahwa $X / KerL_0 \cong X$.

Selanjutnya akan diperlihatkan homomorfisma $\eta : X / Ker(L_0) \to X$ adalah tunggal. Misalkan terdapat homomorfisma $\eta' : X / Ker(L_0) \to X$ yang memenuhi $\eta' \eta_0 = L_0$. Diambil sebarang unsur $\overline{x} \in X / Ker(L_0)$, maka $\eta'(\overline{x}) = \eta'(\eta_0(x))$

$= (\eta' \eta_0)(x)$

$= (\eta \eta_0)(x)$

$= \eta(\overline{x})$

Karena ini berlaku untuk setiap $\overline{x} \in X / Ker(L_0)$, hasil diatas memperlihatkan bahwa $\eta' = \eta$, yaitu homomorfisma $\eta : X / Ker(L_0) \to X$ tunggal.

Terakhir untuk memperlihatkan kekomutatifan diagram di atas, akan diperlihatkan beberapa hal berikut :

a. Akan diperlihatkan $\eta\eta_0 = L_0$.

Diambil sebarang unsur $x \in X$, maka berlaku :

$$\begin{aligned}(\eta\eta_0)(x) &= \eta(\eta_0(x)) \\ &= \eta(\overline{x}) \\ &= L_0(x)\end{aligned}$$

Dan karena ini berlaku $\forall x \in X$, maka terbukti bahwa $\eta\eta_0 = L_0$

b. Terakhir karena untuk setiap homomorfisma $L_0 : X \to X$ terdapat suatu homomorfisma

$$\eta : X / Ker(L_0) \to X$$

yang tunggal dan bersifat 1-1, maka diagram di atas komutatif.

5. PENUTUP

Dari pembahasan pada bagian sebelumnya, didapat kesimpulan bahwa pemetaan kiri L_0 mempunyai beberapa sifat penting yaitu merupakan pusat dari *BCH*-endomorfisma, merupakan pemetaan periodik dengan periode 2 sehingga merupakan pemetaan identitas, dan L_0 adalah epimorfisma *BCH*-aljabar. Selain itu pada *BCH*-aljabar, dapat didefinisikan relasi ekuivalensi yang dapat digunakan untuk membentuk aljabar hasil bagi yang mempunyai struktur berupa *BCH*-aljabar pula. Selanjutnya sebagaimana terorema fundamental homomorfisma yang dapat ditemukan pada pembahasan grup, pada *BCH*-aljabar juga dipunyai teorema fundamental homomorfisma *BCH*-aljabar.

6. DAFTAR PUSTAKA

[1] Chaudary, M.A and H. Fakhruddin (2003), On Some Classes of BCH-algebra, *IJMMS*, 27 : 1739 – 1750

[2] Dar, K.H. and M. Akram (2006), *On Endomorphism of BCH- algebra*, Annals of University of Craiova, Math. Comp. Sci. Ser, 33: 227 – 234

[3] Hu, Q.P. and X. Li (1983), *On BCH-Algebras*, Mathematics Seminar Notes, 11 : 313 – 320

[4] Hu, Q.P. and X. Li (1985), *On Proper BCH-Algebras*, Math. Japonica, 30 : 659 – 661

[5] Imai, Y. And K. Iseki (1996), *On Axioms Systems of Proportional Calculi XIV*, Proc. Japon Academy, 42 : 19 – 22

[6] Iseki, K. (1996), *An Algebra Related with A Propositional Calculus*, Proc. Japan Acad., 42 : 26 – 29