NILAI EKSAK BILANGAN DOMINASI *COMPLEMENTARY TREE* TERHUBUNG-3 PADA GRAF *CYCLE*, GRAF LENGKAP DAN GRAF *WHEEL*

Efni Agustiarini[1], Lucia Ratnasari[2], Widowati[3]
[1,2,3]Jurusan Matematika FSM Universitas Diponegoro Semarang
Jl.Prof. H.Soedarto,SH, Tembalang, Semarang
[1]efni.agustiarini@gmail.com, [2]ratnasari.lucia@yahoo.com

Abstract. Given a graph G with a set of vertices V and the set of edges E. Let be a subset of , if each vertex of − is adjacent to at least one vertex of , then is called a dominating set in . The domination number of a graph denoted as ( ) is the minimum cardinality taken from all dominating sets of . Sometypes of dominating set has been developed based on domination perameter, such as connected dominating set, triple connected dominating set, complementary tree dominating set and triple connected complementary tree dominating set. A subset of ( ) with , a nontrivial connected graph is said to be triple connected complementary tree dominating set, if dominating set, < > is a triple connected graph and < − > is a tree. The triple connected complementary tree domination number of G is denoted as ( ). In this paper we study about triple connected complementary tree domination number, especially on the cycle graph, complete graph and wheel graph. For any cycle graph and complete graph of order ≥ 5 have ( ) = − 2. For any wheel graph of order ≥ 5 have ( ) = 3.

Keywords : Dominating set, domination number, connected domination number, triple connected domination number, triple connected complementary tree domination number

1. PENDAHULUAN

Konsep dominasi pada graf pertama dipelajari oleh Ore [1]. Himpunan dominasi dari sebuah graf = (,) merupakan himpunan subset dari dimana setiap titik di − saling berdekatan setidaknya dengan satu titik di , sedangkan bilangan dominasi adalah kardinalitas minimum dari setiap himpunan dominasi dari sebuah graf . Dalam perkembangannya, himpunan dominasi dapat dibedakan dari parameter – parameter dominasi yang digunakan. E. Sampathkumar mengkaji tentang himpunan dominasi terhubung [2]. S. Muthammai dan M. Bhanumathi mengkaji tentang himpunan dominasi *complementary tree* pada graf tahun 2011 [3]. G. Mahadevan, Selvam Avadayappan, J. Paulraj Joseph dan T. Sabramanian mengkaji tentang himpunan dominasi terhubung pada graf tahun 2012 [4]. Selanjutnya pada tahun 2013 G. Mahadevan, Selvam Avadayappan, N. Ramesh dan T. Subramanian mengkaji tentang himpunan dominasi *complementary tree* terhubung-3 dan menyatakan bahwa bilangan dominasi *complementary tree* terhubung-3 pada graf *cycle*, graf lengkap dan graf *wheel* dengan *order* ≥ 5 mempunyai nilai ( ) = − 2 [5]. Pada tulisan ini ditunjukkan dengan menggunakan induksi matematika bahwa bilangan dominasi *complementary tree* terhubung-3 pada graf *cycle*, graf lengkap dengan *order* ≥ 5 mempunyai nilai ( ) = − 2 , sedangkan setiap graf *wheel* dengan *order* ≥ 5 mempunyai nilai ( ) = 3. Untuk terminologi dan notasi yang tidak didefinisikan secara spesifik pada tulisan ini diacu dari referensi [6].

2. PEMBAHASAN

2.1 Bilangan Dominasi *Complementary Tree* terhubung-3 pada Graf *Cycle*

Berikut diberikan definisi dari himpunan dominasi *complementary tree* terhubung-3 dan bilangan dominasi *Complementary Tree* terhubung-3 pada Graf.

Definisi 2.1 [5] *Suatu himpunan subset dari dengan graf terhubung nontrivial disebut himpunan dominasi complementary tree terhubung-3 jika himpunan dominasi terhubung-3 dan* < − >*tree. Kardinalitas minimum dari setiap himpunan dominasi complementary tree terhubung-3 disebut bilangan dominasi complementary tree terhubung-3 dari dan dinotasikan sebagai* ( ).

Lemma 2.2 [5] *Jika graf cycle dengan order* ≥ 5 *maka* = − 2.

Bukti:

Dibuktikan dengan menggunakan induksi matematika.

a. Untuk graf *cycle* dengan = 5, nilai ( ) = − 2 = 5 − 2 = 3.

Misalkan ( ) = { , , , , } dan = { , , } dengan < > terhubung maka < > = . Himpunan − = ( ) − = { , } maka < − > = .

Himpunan = { , , } merupakan himpunan dominasi *complementary tree* terhubung-3 karena :

1. Himpunan merupakan himpunan dominasi karena titik dan berdekatan dengan setidaknya satu titik di .
2. *Induced subgraf* < > terhubung-3 karena < > = .
3. *Induced subgraf* < − > *tree* karena < − > = .

diperoleh = { , , } himpunan dominasi *complementary tree* terhubung-3 dengan | | = 3. Tidak terdapat kardinalitas dari setiap himpunan dominasi *complementary tree* terhubung-3 yang lebih kecil dari 3, karena batas bawah nilai adalah 3, maka ( ) = | | = − 2 = 5 − 2 = 3. Terbukti nilai ( ) = − 2 = 3 untuk graf *cycle* dengan = 5.

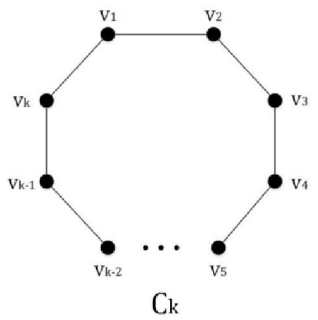
b. Diasumsikan pernyataan tersebut benar untuk = yaitu ( ) = − 2, maka akan dibuktikan bahwa pernyataan tersebut juga benar untuk = + 1 yaitu ( ) = (+ 1) − 2.

Bilangan dominasi adalah kardinalitas minimum dari setiap himpunan dominasi *complementary tree* terhubung-3 yang termuat pada suatu graf, oleh karena itu ditentukan himpunan dengan kardinalitas minimum agar dapat diketahui nilai .

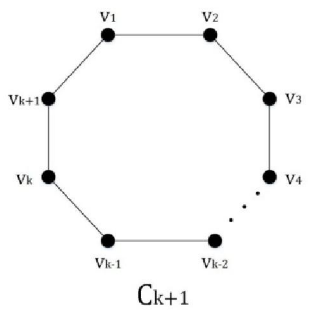
Misalkan ( ) = { , , , , , , ,} dan ( ) = { , , , , , , , }. Misalkan = { , , , } adalah himpunan dominasi *complementary tree* terhubung-3 pada graf dengan < > terhubung.

( ) = − 2 = |{ , , , }| = | |

Diberikan graf *cycle* dengan = dan = + 1 seperti pada Gambar 2.1untuk lebih mempermudah pemahaman.



Gambar 2.1 (a) Graf *Cycle*



Gambar 2.1 (b) Graf *Cycle*

Pada graf *cycle* , himpunan bukan merupakan himpunan- karena terdapat titik yang tidak berdekatan dengan setidaknya satu titik di , oleh karena itu penambahan satu titik pada graf *cycle* menjadi , menyebabkan penambahan satu titik pula pada , sehingga :

$(\quad) = | \quad | = | \quad \{ \quad \}|$
$= |\{ \; , \; , \; , \quad \} \; \{ \quad \}|$
$= |\{ \; , \; , \; , \; , \quad , \quad \}|$
$= \; , \; , \; , \; , \quad , \; (\quad)$
$= (\; + 1) - 2$

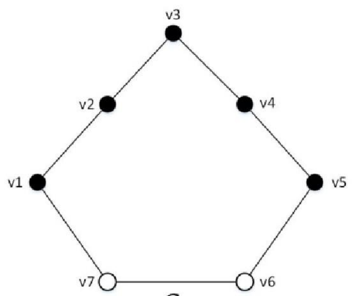
Akan dibuktikan $= \{ \; , \; , \; , \quad \}$ dengan $< \quad >$ terhubung merupakan himpunan dominasi *complementary tree* terhubung-3 pada graf . *Induced* subgraf $< \quad >$ terhubung maka $< \quad > =$. Himpunan $- \quad = (\quad) - \quad =$ $\{ \; , \quad \}$ dan titik berdekatan dengan titik maka $< \; - \quad > =$. Himpunan merupakan himpunan dominasi *complementary tree* terhubung-3 karena :

1. Himpunan merupakan himpunan dominasi karena titik dan berdekatan dengan setidaknya satu titik di .
2. *Induced subgraf* $< \quad >$ terhubung-3 karena $< \quad > =$.
3. *Induced subgraf* $< \; - \quad >$ *tree* karena $< (\quad) - \quad > \; = \;$.

Terbukti himpunan $= \{ \; , \; , \; , \quad \}$ merupakan himpunan dominasi *complementary tree* terhubung-3 dengan $| \quad | = \; - 1 =$ $(\; + 1) - 2$, oleh karena itu terbukti nilai $(\quad) = (\; + 1) - 2$ untuk graf *cycle* dengan $= \; + 1$
.

Contoh 2.3 Diberikan contoh untuk graf *cycle* dengan order $= 7$.

Graf *cycle* dengan *order* $= 7$ memuat himpunan- yakni $= \{ \; , \; , \; , \; , \; \}$ dan karena tidak terdapat kardinalitas dari himpunan- yang lebih kecil dari lima, maka $(\quad) = | \; | = 5 = \; - 2$.



Gambar 2.2 Graf *Cycle*

2.2 Bilangan Dominasi *Complementary Tree* terhubung-3 pada Graf Lengkap

Lemma 2.4 [5] *Jika graf lengkap dengan order* ≥ 5 *maka* $= \; - 2$.

Bukti:

Dibuktikan dengan menggunakan induksi matematika.

a. Akan dibuktikan untuk graf lengkap dengan $= 5$, nilai $(\quad) = \; - 2 = 5 - 2 = 3$.

Misalkan $(\quad) = \{ \; , \; , \; , \; , \; \}$ dan $= \{ \; , \; , \; \}$ maka $< \quad > =$. Himpunan $- \quad = (\quad) - \quad = \{ \; , \; \}$ maka $< \; - \quad > =$.

Himpunan $= \{ \; , \; , \; \}$ merupakan himpunan dominasi *complementary tree* terhubung-3 karena :

1. Himpunan merupakan himpunan dominasi karena titik dan berdekatan dengan titik di .
2. *Induced subgraf* $< \quad >$ terhubung-3 karena $< \quad > =$.
3. *Induced subgraf* $< \; - \quad >$ *tree* karena $< \; - \quad > =$.

Diperoleh himpunan dominasi *complementary tree* terhubung-3 $=$ $\{ \; , \; , \; \}$ dengan $| \; | = 3$. Tidak terdapat kardinalitas dari setiap himpunan- yang lebih kecil dari 3, karena batas bawah nilai adalah 3, maka ( ) = | | = − 2 = 5 − 2 = 3. Terbukti nilai ( ) = − 2 = 3 untuk graf lengkap dengan = 5.

b. Diasumsikan pernyataan tersebut benar untuk = yaitu ( ) = − 2, maka akan dibuktikan bahwa pernyataan tersebut juga benar untuk = + 1 yaitu ( ) = (+ 1) − 2.

Bilangan dominasi adalah kardinalitas minimum dari setiap himpunan dominasi *complementary tree* terhubung-3 yang termuat pada suatu graf, oleh karena itu ditentukan himpunan dengan kardinalitas minimum agar dapat diketahui nilai .

Misalkan

( ) = { , , , , , , ,}

dan

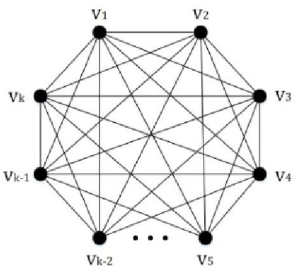
( ) = { , , , , , , , }. Misalkan = { , , , }

adalah himpunan dominasi *complementary tree* terhubung-3 pada graf dan − = ( ) − = { , , }.

( ) = − 2

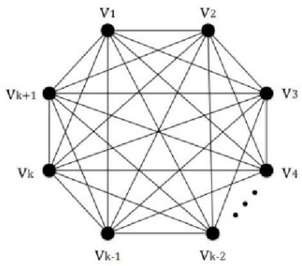
= |{ , , , }| = | |

Diberikan graf lengkap dengan = dan = + 1seperti pada Gambar 2.3 untuk lebih mempermudah pemahaman.



Kk

Gambar 2.3 (a) Graf Lengkap



Kk+1

Gambar 2.3 (b) Graf Lengkap

Pada graf lengkap , himpunan bukan merupakan himpunan dominasi *complementary tree* terhubung-3 karena *induced* subgraf < − > memuat *cycle* sehingga bukan *tree*, oleh karena itu penambahan satu titik pada graf lengkap menjadi , menyebabkan penambahan satu titik pula pada , sehingga :

( ) = | | = | { }|

= |{ , , , }

{ }|

= |{ , , , , , }|

= , , , , , ( )

= (+ 1) − 2

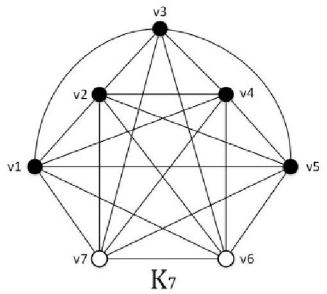
Dibuktikan = { , , , } merupakan himpunan dominasi *complementary tree* terhubung-3 pada graf . Himpunan − = ( ) − = { , } maka < − > = . Himpunan merupakan himpunan dominasi *complementary tree* terhubung-3 karena:

1. Himpunan merupakan himpunan dominasi karena titik dan berdekatan dengan titik di .
2. *Induced subgraf* < > terhubung-3. Setiap titik di saling terhubung maka jika diambil sebarang 3 titik, titik-titik tersebut terletak dalam suatu lintasan di .
3. *Induced subgraf* < − > *tree* karena < − > = .

Terbukti himpunan = { , , , } merupakan

himpunan dominasi *complementary tree* terhubung-3 dengan | | = − 1, oleh karena itu terbukti nilai ( ) = (+ 1) − 2 untuk graf lengkap dengan = + 1.

Contoh 2.5 Diberikan contoh untuk graf lengkap dengan order = 7.



Gambar 2.4 Graf Lengkap

Graf lengkap dengan *order* = 7 memuat himpunan- yakni = { , , , , } dan karena tidak terdapat kardinalitas dari himpunan- yang lebih kecil dari lima, maka ( ) = | | = 5 = − 2.

2.3 Bilangan Dominasi *Complementary Tree* terhubung-3 pada Graf *Wheel*

Lemma 2.6 [5] Jika graf *wheel* dengan *order* ≥ 5 maka = 3.

Bukti:

Dibuktikan dengan menggunakan induksi matematika.

a. Untuk graf *wheel* dengan = 5, nilai ( ) = − 2 = 5 − 2 = 3.

Misalkan ( ) = { , , , , } dengan sebagai titik pusat dan = { , , } dengan titik berdekatan dengan titik maka < > = . Himpunan − = ( ) − = { , } maka < − > = .

Himpunan = { , , } merupakan himpunan dominasi *complementary tree* terhubung-3 karena :

1. Himpunan merupakan himpunan dominasi karena titik dan berdekatan dengan setidaknya satu titik di .
2. *Induced subgraf* < > terhubung-3 karena < > = .
3. *Induced subgraf* < − > *tree* karena < − > = .

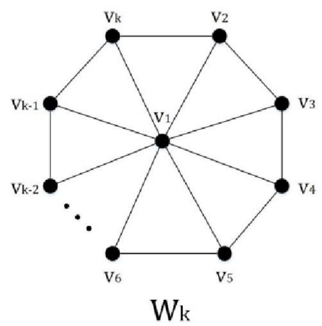
Diperoleh himpunan- = { , , } dengan | | = 3. Tidak terdapat kardinalitas dari setiap himpunan- yang lebih kecil dari 3, karena batas bawah nilai adalah 3, maka ( ) = | | = − 2 = 5 − 2 = 3. Terbukti nilai ( ) = − 2 = 3 untuk graf *wheel* dengan = 5.

b. Diasumsikan pernyataan tersebut benar untuk = yaitu ( ) = 3, maka akan dibuktikan bahwa pernyataan tersebut juga benar untuk = + 1 yaitu ( ) = 3.

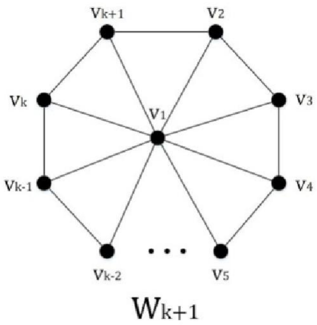
Bilangan dominasi adalah kardinalitas minimum dari setiap himpunan dominasi *complementary tree* terhubung-3 yang termuat pada suatu graf, oleh karena itu ditentukan himpunan dengan kardinalitas minimum agar dapat diketahui nilai .

Misalkan ( ) = { , , , , } dan ( ) = { , , , , , } dengan sebagai titik pusat pada graf *wheel*. Misalkan = { , , } dengan titik berdekatan dengan titik , maka ( ) = 3 = |{ , , }| = | |

Diberikan graf *wheel*dengan = dan = + 1 seperti pada Gambar 2.5 untuk lebih mempermudah pemahaman.



Gambar 2.5 (a) Graf *Wheel*



Gambar 2.5 (b) Graf *Wheel*

Penambahan satu titik pada graf *wheel* menjadi , tidak menyebabkan perubahan | | pada karena | | = 3 tetap merupakan kardinalitas minimum dari setiap himpunan dominasi *complementary tree* terhubung-3 pada , oleh karena itu ( ) = | | = |{ , , }| = 3

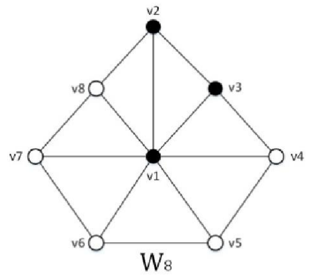
Akan dibuktikan = { , , } merupakan himpunan dominasi *complementary tree* terhubung-3 pada graf . Titik berdekatan dengan titik , maka < > = . Himpunan − = ( ) − = { , , , }. Himpunan merupakan himpunan dominasi *complementary tree* terhubung-3 karena :

1. Himpunan merupakan himpunan dominasi karena setiap titik selain titik di berdekatan dengan setidaknya satu titik di , hal ini dikarenakan salah satu anggota himpunan dominasi adalah yang merupakan titik pusat sehingga titik berdekatan dengan setiap titik lainnya.
2. *Induced subgraf* < > terhubung-3 karena < > = .
3. *Induced subgraf* < − > *tree* karena titik-titik tersebut terhubung dan tidak memuat *cycle.*

Diperoleh himpunan dominasi *complementary tree* terhubung-3 = { , , } dengan | | = 3. Tidak terdapat kardinalitas dari setiap himpunan- yang lebih kecil dari 3, karena batas bawah nilai adalah 3, maka ( ) = | | = 3. Terbukti nilai ( ) = 3untuk graf *wheel* dengan = + 1.

Pada [4] tertulis jika graf *wheel* dengan *order* ≥ 5 maka = − 2. Berdasarkan bukti yang telah dijelaskan nilai = 3 bukan − 2, karena terdapat dengan ( ) = 3 ≠ − 2 = 4.

Contoh 2.7 Diberikan contoh untuk graf *wheel* dengan order = 8.



Gambar 2.6 Graf *Wheel*

Graf *wheel* dengan *order* = 8 memuat himpunan- yakni = { , , } dan karena tidak terdapat kardinalitas dari himpunan- yang lebih kecil dari tiga, maka ( ) = | | = 3.

3.PENUTUP

Berdasarkan hasil pembahasan dapat diambil kesimpulan bahwa jika graf *cycle* dengan *order* ≥ 5 maka = − 2, jika graf lengkap dengan *order* ≥ 5 maka = − 2 dan jika graf *wheel* dengan *order* ≥ 5 maka = 3.

4. DAFTAR PUSTAKA

[1] O.Ore, (1962), *Theory of Graps*, Amer. Math. Soc. Colloq., Publication, 38

[2] E. Sampathkumar, (1979), The Connected Domination Number of a Graph, *Jour. Math. Psy. Sci.*, 13(6) : 607 – 613.

[3] S. Muthammai and M. Bhanumathi, (2011), Complementary Tree Domination Number of a Graph,

International Mathematical Forum, 6 (26) : 1273 - 1282.

[4] Mahadevan, G., A. Selvam, N. Ramesh and T. Subramanian, (2012), Triple Connected Domination Number of a Graph, *International J. Math. Combin*, 3 : 93 - 104.

[5] Mahadevan, G., A. Selvam, N. Ramesh and T. Subramanian, (2013), Triple Connected Complementary Tree Domination Number of a Graph, *International Mathematical Forum,* 8 : 659 - 670.

[6] Wilson, J. Robin and John J. Watkins, (1990), *Graphs : An Introductory Approach*, Canada: John Wiley & Sons, Inc.