SEMIGRUP – YANG DIBANGKITKAN DARI SUATU SEMIGRUP

Y.D. Sumanto
Jurusan Matematika FSM Universitas Diponegoro
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H. Tembalang Semarang

Abstract. Every Element Γ on semigroup $-\Gamma$ can be regarded as binary operation on . Furthermore every element semigroup can be defined a binary operation on , if Γ is set of binary operation that is defined from element semigroup , then can be formed become semigroup Γ.

Keywords : semigroup, semigroup -Γ

1. PENDAHULUAN

Konsep semigrup – Γ telah dikenalkan oleh M.K. Sen [1] di tahun 1981. Pembahasan lebih lanjut telah banyak dilakukan, seperti yang telah dilakukan oleh Islam Braja [2] yang membahas tentang karakteristik semigrup – Γ regular. Setiap elemen Γ pada semigrup – Γ dapat dipandang sebagai operasi biner pada dan Y.D Sumanto [3] menunjukkan untuk setiap , Γ dan , mendefinisikan operasi biner pada .

Pada himpunan dengan elemen dapat didefinisikan sebanyak ( ) operasi biner. Dua operasi biner dan pada dikatakan sama = , jika = untuk setiap , . Jika operasi biner pada yang memenuhi ( ) = ( ) untuk setiap , , , maka disebut operasi biner assosiatif. Himpunan yang dilengkapi dengan operasi biner assosiatif disebut semigrup. Elemen di dalam semigrup , dikatakan regular jika terdapat sehingga = [4]. Himpunan bagian disebut ideal kiri (kanan) dari semigrup , jika ( ), dan disebut ideal jika ideal kanan maupun kiri dari [4].

Diberikan dua himpunan tak kosong dan Γ, disebut semigrup - Γ jika terdapat pemetaan $\times \Gamma \times$ dengan (, ,) untuk setiap , dan Γ yang memenuhi ( ) = ( ) untuk setiap , , dan , Γ. Elemen di dalam semigrup – Γ (,Γ) dikatakan regular jika Γ Γ a , dan semigrup – Γ disebut semigrup – Γ regular jika setiap elemennya adalah regular [2]. Himpunan bagian dari semigrup – Γ disebut ideal kiri (kanan) jika Γ (Γ S A) dan disebut ideal jika ideal kanan maupun kiri [5].

Dalam tulisan ini penulis membahas suatu semigrup dapat membangkitkan suatu semigrup – Γ.

2. PEMBAHASAN

Pada bagian ini ditunjukkan bahwa setiap elemen dari semigrup dapat mendefinisikan operasi biner pada yang ditunjukkan pada Teorema 2.1 berikut. Selanjutnya Teorema 2 menunjukkan bahwa himpunan semua operasi biner yang didefinisikan dari elemen semigrup membentuk semigrup – Γ terhadap .

Teorema 2.1 *Diberikan semigrup* (,), *untuk setiap mendefinisikan suatu operasi biner pada , yaitu*
(,) ( )
= ( )
= ( ) *untuk setiap* ,
(,) *merupakan semigrup.*

Bukti :
Diberikan sebarang ,
jelas bahwa untuk setiap , ,
( ) = ( ) = ( )
.
Jika dengan = dan = , maka
( ) = ( )

$= (\quad)$
$= \quad (\quad)$
$= \quad (\quad)$
$= \quad (\quad)$

Jadi merupakan operasi biner pada untuk setiap .

Diberikan sebarang , untuk setiap , , memenuhi

$((\quad))(\quad) = (\quad) \quad (\quad)$
$= (\quad) \quad ((\quad))$
$= (\quad)((\quad))$

Jadi (,) merupakan semigrup, untuk setiap .

Contoh 2.2 Diberikan semigrup = { , , , } dengan operasi biner seperti didefinisikan dalam tabel berikut :

Setiap elemen mendefinisikan operasi biner pada seperti diberikan dalam tabel-tabel berikut :

Teorema berikut menunjukkan bahwa sebarang semigrup dapat membangkitkan suatu semigrup –

Teorema 2.3 *Diberikan semigrup* (,) *dan* Γ = { | } { } *maka merupakan semigrup* – *dengan pemetaan* (, ,) *untuk setiap* , *dan* Γ.

Bukti :

Seperti pada bukti Teorema 2.1 dapat ditunjukkan bahwa (, ,) untuk setiap x, y S dan α Γ merupakan pemetaan. Selanjutnya diambil sebarang , , dan , Γ. Ada beberapa kemungkinan yang terjadi terhadap dan .

1. Jika = = jelas bahwa ( ) = ( )
2. Jika = dan = untuk suatu a S, maka
   $(\quad) = ((\quad))$
   $= (\quad) \quad) \quad)$
   $= (\quad) \quad (\quad)$
   $= (\quad)(\quad)$
   $= (\quad)$
3. Jika = dan = untuk suatu , seperti bagian 2 dapat ditunjukkan ( ) = ( )
4. Jika = dan = untuk suatu , , maka
   $(\quad) = ((\quad))(\quad)$
   $= (\quad) \quad) \quad (\quad)$
   $= (\quad) \quad (\quad (\quad))$
   $= (\quad)((\quad))$
   $= (\quad)$

Jadi merupakan semigrup – Γ.

Berikut ini diberikan sifat-sifat semigrup – berdasarkan sifat-sifat semigrup pembangkitnya.

Definisi 2.4 *Semigrup – yang dihasilkan dari semigrup (,) dengan* Γ = { | } { } *disebut semigrup yang dibangkitkan dari semigrup .* (Γ − *semigroup induced by semigroup*)

Teorema 2.5 *Jika* (,) *semigrup dengan elemen nol , maka semigrup*−Γ *yang dibangkitkan dari , maka memenuhi*

i. *Untuk setiap , , ( ) =*

ii. *merupakan semigrup*−Γ *dengan elemen nol.*

Bukti :

i. Jelas untuk setiap , , ( ) = ( ) = =

ii. Untuk setiap dan Γ
= ( )
= ( )
=
= untuk suatu .

Teorema 2.6 *Jika* (,) *semigrup dengan elemen identitas , maka =*

Bukti :

Jelas Terpenuhi.

Teorema 2.7 *Jika* (,) *semigrup regular maka semigrup*−Γ *yang dibangkitkan dari semigrup , merupakan semigrup*−Γ *regular.*

Bukti :

Diambil sebarang , maka ada , = , sehingga Γ S Γ .

Jadi merupakan semigrup−Γ regular.

Teorema 2.8 *Jika ideal dari semigrup* (,), *maka merupakan ideal*−Γ *dari semigrup*−Γ *yang dibangkitkan dari .*

Bukti :

Karena ideal dari , maka dan , maka untuk setiap , dan

( ) = ( ) ( )

Sehingga Γ S . Dengan cara yang sama ditunjukkan Γ I

Jadi ideal−Γ dari semigrup−Γ .

3. DAFTAR PUSTAKA

[1] Sen, M.K., (1981), On Γ − semigrup. *Procedding of International Converence on algebra and its Application*, Dekker Publication. New York, hal 301.

[2] Islam Braja, (2009), Characterization of Regular Γ − semigrup Using Quazy−Ideal. *International Journal of Mathematic Analysis*, 3(6): 1789-1794.

[3] Sumanto, Y.D., (2012), Grup−Γ dual dari suatu Grup−Γ. *Jurnal Matematika*, 15(1): 23-27.

[4] Howie, J.M., (1976), *An Introduction To Semigrup Theory*, Academic Press. London.

[5] Niovi kehayopulu, (2014), On Left Regular Γ − semigroup, *International Journal of Algebra*, 8(8): 389-394.

[6] Thawhat changphas, (2012), On Intra Regular Γ − semigrup. *International Journal Contemporer Mathematics*, 7(6): 273-277.