NEUTROSOFIK MODUL DAN SIFAT-SIFATNYA

Suryoto[1], Bambang Irawanto[2], Nikken Prima Puspita[3]
[1,2,3]Jurusan Matematika FSM Universitas Diponegoro
Jl. Prof. H. Soedarto, SH, Tembalang, Semarang 50275
[1]suryoto_math@undip.ac.id

Abstract. Given any ring with unity and a commutative neutrosophic group under the additional operation, then from the both structures can be constructed a neutroshopic module by define the scalar multiplication between elements of the ring and elements of the commutative group. Further by generalized the neutrosophic module can be obtained a substructure of the neutrosophic module called a neutrosophic submodule. In this paper, from the concept of neutrosophic module and the ring with unity we study a generalization of classical module, that is a neutrosophic module and its properties. By utilizing the neutroshopic element as an indeterminate and an idempotent element under multiplication can be shown that most of the basic properties of clasiccal module generally still true on this neutrosophic struture.

Keywords : commutative neutrosophic group, ring with unity, neutrosophic element, neutrosophic module, neutrosophic submodule.

1. PENDAHULUAN

Untuk mempelajari neutrosofik modul dan sifat-sifat yang berlaku di dalamnya, terlebih dahulu diperlukan konsep ring dengan unsur satuan beserta sifat-sifatnya secara umum. Menurut [1], modul adalah suatu struktur aljabar dari suatu himpunan tidak kosong atas sebuah ring yang dilengkapi dengan dua buah operasi biner, berupa operasi penjumlahan dan operasi perkalian dengan skalar, di mana himpunan ini merupakan grup komutatif terhadap operasi penjumlahan dan dilengkapi dengan tindakan perkalian skalar. Aksioma-aksioma yang berlaku pada modul serupa dengan aksioma-aksioma yang berlaku pada ruang vektor.

Sebagai awal dalam pembahasan modul, ditinjau ring yang mempunyai unsur satuan. Berangkat dari ring ini didefinisikan modul atas ring yang dapat dibedakan menjadi dua, yaitu modul kiri dan modul kanan. Berikut ini diberikan definisi dari modul kiri atas ring.

Definisi 1. 1 [1] *Misalkan* $= (\; , +, \cdot)$ *ring dengan unsur satuan 1. Modul kiri atas ring atau -modul kiri adalah grup komutatif* $= (\; , +)$ *yang dilengkapi dengan tindakan* $\cdot \quad \times \quad \to$ *melalui pengaitan* $(\; , \;) \to$ *, untuk setiap pasang* $(\; , \;) \quad \times$ *dan memenuhi aksioma-aksioma berikut :*

a. $(\; + \;) = \; +$
b. $(\; + \;) = \; +$
c. $(\;) = (\;)$
d. $1 \; =$

untuk setiap , dan , .

Sedangkan pengertian untuk modul kanan dapat didefinisikan dengan cara yang serupa, perbedaannya terletak pada tindakan ring terhadap himpunan -nya. Jika pada modul kiri berlaku tindakan $\cdot \quad \times \quad \to$ melalui pengaitan $(\; , \;) \to$ atau beraksi dari kiri dalam operasi perkalian skalar terhadap , maka pada modul kanan berlaku sebaliknya, tindakan $\cdot \quad \times \quad \to$ melalui pengaitan $(\; , \;) \to$ yaitu beraksi dari kanan dalam operasi perkalian skalar terhadap .

Dalam hal merupakan ring komutatif, pengertian modul kiri dan modul kanan tidak harus sama, ini karena elemen dari belum tentu sama dengan elemen dari . Selanjutnya jika merupakan modul kiri dan sekaligus modul kanan, maka dikatakan modul atas .

Berikut ini diberikan beberapa contoh modul atas suatu ring.

Contoh 1.2 Diberikan $= (\ , +, \cdot)$ sebarang ring dengan dan berturut-turut adalah ideal kiri dan ideal kanan di , maka dan berturut-turut merupakan -modul kiri dan -modul kanan terhadap operasi perkalian ring .

Contoh 1.3 Pandang daerah bilangan bulat $= (\ , +, \cdot)$, maka sebarang grup komutatif $= (\ , +)$ merupakan -modul terhadap operasi (tindakan) :

$$= \begin{cases} + \ + \ + \ , & \text{untuk} \ > 0 \\ 0, & \text{untuk} \ = 0 \\ - \ (- \ ) \ , & \text{untuk} \ < 0 \end{cases}$$

Selain struktur ring dan modul klasik, konsep lain yang dikaji dalam artikel ini adalah unsur neutrosofik yang merupakan kunci dari pembentukan struktur neutrosofik atas sebarang ring klasik. Pada [2] dan [3] diperkenalkan unsur neutrosofik, sebagai sebuah unsur yang bersifat idempoten terhadap operasi perkalian dan dapat dipandang sebagai indeterminate. Unsur ini memegang peranan penting dalam pembentukan unsur-unsur himpunan dari struktur neutrosofiknya.

Unsur neutrosofik dinotasikan dengan adalah suatu indeterminate yang bersifat idempoten terhadap operasi perkalian, yaitu $\cdot \ = \ = \ $. Berikut ini diberikan definisi neutrosofik grup sebagai awal pembentukan struktur neutrosofik lanjut, khususnya neutrosofik modul.

Definisi 1.4 [4] *Misalkan* $= (\ , \ )$ *sebarang grup, neutrosofik grup yang dibangun oleh dan dibawah operasi dinotasikan dengan* $(\ ) = \{ \ \ , \ \}$.

Neutrosofik grup $(\ ) = \{ \ \ , \ \}$ tidak lain adalah himpunan yang elemennya berupa , dengan , dan suatu unsur neutrosofik.

Berikut ini diberikan contoh dari neutrosofik grup.

Contoh 1.5 Misalkan $= \ = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, maka terhadap operasi penjumlahan modulo 5, $(\ , + \ )$ merupakan grup. Neutrosofik grup

$$(\ ) = \{ \ \ , + \ \}$$
$$= \{ \ + \ \ | \ , \ \ \}$$

merupakan grup dibawah operasi "+ ".

2. PEMBAHASAN

2.1 Neutrosofik Ring dan Aspek Terkait

Definisi dan sifat-sifat yang diberikan pada bagian ini diambil dari [5]

Definisi 2.1 [5] *Misalkan* $= (\ , +, \cdot)$ *sebarang ring, maka himpunan*

$$= \{ \ + \ \ | \ , \ \ \}$$

dinamakan neutrosofik ring yang dibangun oleh dan dibawah operasi dari .

Selanjutnya diberikan contoh terkait dengan neutrosofik ring ini.

Contoh 2.2 Himpunan , , , dan berturut-turut merupakan neutrosofik ring bilangan bulat, bilangan rasional, bilangan real, dan bilangan kompleks.

Berikut ini diberikan beberapa sifat penting neutrosofik ring, seperti dituangkan dalam teorema berikut.

Teorema 2.3 [5] *Setiap neutrosofik ring merupakan ring dan senantiasa memuat himpunan bagian sejati berupa ring.*

Bukti teorema ini diberikan oleh referensi [5], sedangkan bukti untuk bagian keduanya langsung dari kenyataan bahwa ring $\subset$.

Selanjutnya sebagaimana dalam teori ring klasik dipunyai konsep homomorfisma ring, berikut ini diberikan pengertian homomorfisma neutrosofik ring.

Definisi 2.4 [5] *Misalkan dan ' adalah dua neutrosofik ring. Pemetaan* $\Phi \ \ \rightarrow \ '$ *disebut homomorfisma neutrosofik ring jika dipenuhi kondisi-kondisi berikut :*

a. $\Phi \ \ \rightarrow \ '$ *suatu homomorfisma ring*
b. $\Phi(\ ) =$

Contoh 2.5 Diberikan neutrosofik ring maka pemetaan $\Phi \ \ \rightarrow$ yang didefinisikan dengan $\Phi(\ ) =$ untuk setiap , maka $\Phi \ \ \rightarrow$ suatu homomorfisma neutrosofik ring atau disebut endomorfisma neutrosofik ring.

Selanjutnya dari ring neutrosofik , secara khusus ditinjau neutrosofik grup komutattif ($,+$) dan dibentuk homomorfisma-homomorfisma neutrosofik grup dari ($,+$) ke dirinya sendiri atau endomorfisma neutrosofik grup. Jika semua endomorfisma neutrosofik grup Φ $\rightarrow$ dihimpun kedalam himpunan

End ( ) = Hom (,) = {Φ | Φ $\rightarrow$ homomor isma}

maka dipunyai hasil berikut ini.

Teorema 2.6 *Misalkan* ($,+$) *suatu neutrosofik grup dan* End ( ) *adalah himpunan semua endomorfisma neutrosofik grup pada* ($,+$). *Jika pada himpunan* End ( ) *didefinisikan operasi penjumlahan dan perkalian dengan*

$(\Phi + \Psi)(\ ) = \Phi(\ ) + \Psi(\ )$ *dan*

$(\Phi \cdot \Psi)(\ ) = \Phi\ \Psi(\ )$,

untuk setiap Φ, Ψ End ( ) *dan* , *maka* (End ( ), $+,\cdot$) *merupakan neutrosofik ring.*

Bukti **:** serupa dengan pembuktian untuk ring klasik. <

2.2 Neutrosofik Modul dan Sifat-Sifatnya

Pembahasan neutrosofik modul, tidak terlepas dari struktur neutrosofik grup komutatif sebagai dasar pembentukannya dan ring klasik. Pada penelitian ini ring yang ditinjau sebagai dasar pembentukan modul adalah ring komutatatif dengan unsur satuan. Secara formal pengertian tentang neutrosofik modul baik kiri maupun kanan diberikan oleh definisi-definisi berikut.

Definisi 2.7 [6] *Misalkan* = ($,+,\cdot$) *ring dengan unsur satuan 1. Suatu -modul kiri neutrosofik adalah neutrosofik grup komutatif* ($,+$) *yang dilengkapi dengan operasi perkalian skalar* $\cdot$ $\times$ $\rightarrow$ *dan memenuhi kondisi-kondisi berikut :*

a. (+) = +

b. (+) = +

c. ( ) = ( )

d. 1 =

untuk setiap , *dan* , .

Sedangkan untuk pengertian neutrosofik modul kanan dapat didefinisikan dengan cara yang serupa, perbedaannya terletak pada tindakan ring terhadap himpunan -nya sehingga dipunyai definisi berikut.

Definisi 2.8 [6] *Misalkan* = ($,+,\cdot$) *ring dengan unsur satuan 1. Suatu -modul kanan neutrosofik adalah neutrosofik grup komutatif* ($,+$) *yang dilengkapi dengan operasi perkalian skalar* $\cdot$ $\times$ $\rightarrow$ *dan memenuhi kondisi-kondisi berikut :*

a. (+) = +

b. (+) = +

c. ( ) = ( )

d. 1 =

untuk setiap , *dan* , .

Dalam hal merupakan ring komutatif, pengertian modul kiri dan modul kanan adalah sama. Selanjutnya jika merupakan neutrosofik modul kiri dan sekaligus neutrosofik modul kanan, maka dikatakan neutrosofik modul atas atau disebut juga neutrosofik -modul.

Untuk lebih memperjelas definisi tentang modul, berikut ini diberikan beberapa contoh neutrosofik modul atas suatu ring.

Contoh 2.9 Pandang ring bilangan bulat = ($,+,\cdot$) dan neutrosofik grup komutatif ($,+$). Didefinisikan pemetaan $\times$ $\rightarrow$ dengan (,) = , untuk setiap dan , maka merupakan neutrosofik -modul.

Seperti halnya berlaku pada modul klasik, berikut ini diberikan definisi neutrosofik submodul dari suatu neutrosofik modul.

Definisi 2.10 *Misalkan suatu neutrosofik -modul dan himpunan bagian tidak kosong dari* , *dikatakan neutrosofik sub-modul dari jika dipenuhi kondisi-kondisi berikut ini :*

a. merupakan neutrosofik sub-grup dari (, +)
b. merupakan neutrosofik -modul terhadap operasi perkalian skalar yang sama yang berlaku pada .

Atau dengan perkataan lain, merupakan neutrosofik submodul dari jika dipenuhi :

a. (, +) merupakan neutrosofik grup komutatif terhadap operasi "+", yaitu merupakan neutrosofik subgrup dari (, +)
b. Untuk setiap dan berlaku .

Untuk menelaah apakah suatu himpunan merupakan neutrosofik submodul, diberikan teorema berikut.

Teorema 2.11 *Misalkan suatu neutrosofik -modul dan himpunan bagian tidak kosong dari , merupakan neutrosofik submodul dari jika dan hanya jika memenuhi sifat :*

a. untuk setiap , berlaku −
b. untuk setiap dan berlaku

Bukti :

(⇒) Misalkan merupakan neutrosofik submodul dari maka merupakan neutrosofik subgrup dari . Dengan demikian untuk sebarang , berlaku − . Selanjutnya karena operasi perkalian skalar yang berlaku pada juga berlaku pada maka untuk sebarang dan berlaku .

(⇐) Misalkan kedua kondisi diatas dipenuhi. Karena untuk setiap , berlaku − , maka merupakan neutrosofik subgrup komutatif dari . Selanjutnya karena untuk setiap dan , maka operasi perkalian skalar yang berlaku di juga berlaku di . Terakhir karena merupakan himpunan bagian yang tidak kosong dari dan operasi perkalian skalar yang berlaku di juga berlaku di , maka aksima-aksioma neutrosofik modul di juga berlaku di . <

Misalkan suatu neutrosofik -modul dan , adalah neutrosofik submodul dari . Didefinisikan jumlahan dari neutrosofik submodul dan sebagai himpunan + = { + | dan }.

Seperti halnya berlaku pada struktur grup, pada neutrosofik modul dapat diperlihatkan bahwa irisan dan jumlahan dua neutrosofik submodul juga membentuk neutrosofik submodul.

Lemma 2.12 *Misalkan suatu neutrosofik -modul. Jika dan adalah neutrosofik submodul dari , maka berlaku*

a. ∩ *merupakan neutrosofik submodul dari*
b. + *merupakan neutrosofik submodul dari*

Bukti :

a. Karena dan masing-masing merupakan neutrosofik submodul di maka ∩ senantiasa bukan merupakan himpunan kosong. Selanjutnya diambil sebarang dan , ∩ maka , dan , . Karena dan merupakan neutrosofik submodul dari , maka diperoleh − dan − serta berakibat − ∩ . Sekali lagi karena dan merupakan neutrosofik submodul di maka berlaku dan . Hal ini memberikan ∩ . Dengan demikian terbukti bahwa ∩ merupakan neutrosofik submodul di .
b. Dengan argumen yang serupa karena dan $_2$ merupakan neutrosofik submodul di maka $_1$ + $_2$ bukan merupakan himpunan kosong. Selanjutnya diambil sebarang dan + , + $_1$ + $_2$. Karena $_1$ dan $_2$ merupakan neutrosofik submodul dari , maka berlaku

$-$ $_1$ dan $-$ $_2$. Dengan demikian diperoleh (+) $-$ (+) = ($-$) + ($-$) $_1$ + $_2$. Selanjutnya karena $_1$ dan $_2$ merupakan neutrosofik submodul di maka berlaku $_1$ dan $_2$. Akibatnya (+) = + $_1$ + $_2$. Jadi terbukti bahwa $_1$ + $_2$ merupakan neutrosofik submodul dari .
<

Berdasarkan lema tersebut, dapat digeneralisasi bahwa irisan serta jumlahan tak berhingga banyak neutrosofik submodul juga merupakan neutrosofik submodul, seperti diberikan oleh teorema berikut.

Teorema 3.7 *Misalkan suatu neutrosofik -modul. Jika merupakan neutrosofik submodul dari untuk setiap* Λ *maka berlaku*

.
Λ

.
Λ

***Bukti* :** Dilakukan dengan cara serupa seperti pada pembuktian Lema 3.6
<

Pada bagian berikut diperlihatkan bahwa gabungan dua buah neutrosofik submodul pada umumnya bukan merupakan neutrosofik submodul, sebagaimana diberikan pada contoh berikut ini.

Contoh 3.8 Dari Contoh 3.3 pandang neutrosofik modul yang lebih khusus, yaitu neutrosofik modul [ ] atas ring = (, +,·). Sekarang tinjau himpunan bagian

$$[\ ] = \sum_{0}^{\infty} \quad |$$

dari [ ]. Dapat diperlihatkan bahwa [ ] adalah neutrosofik -submodul dari [ ]. Untuk itu diambil sebarang ( ), ( ) [ ], dengan

$$(\ ) = \sum_{0}^{\infty} \quad \text{dan} \quad (\ ) = \sum_{0}^{\infty} \text{, dengan ,}$$

maka diperoleh

$$(\ ) - (\ ) = \sum_{0}^{\infty} - \sum_{0}^{\infty}$$

$$= \sum_{0}^{\infty} (\ - \ )$$

dengan $-$. Hal ini memperlihatkan bahwa ( ) $-$ ( ) [ ].

Selanjutnya untuk sebarang dan ( ) [ ], dengan

$$(\ ) = \sum_{0}^{\infty} \text{, dengan}$$

diperoleh

$$(\ ) = \sum_{0}^{\infty} = \sum_{0}^{\infty} (\ \ )$$

dengan . Hal ini memperlihatkan ( ) [ ]. Dengan demikian benar bahwa [ ] merupakan neutrosofik -submodul dari [ ].

Sekarang ditinjau dua neutrosofik -submodul 2 [ ] dan 5 [ ] dari [ ], maka 2 [ ] 5 [ ] bukan merupakan neutrosofik -submodul dari [ ], karena untuk 5 5 [ ] dan 2 2 [ ] berlaku
$5 - 2 = 3 \notin 2$ [ ] 5 [ ].

Penjelasan ini memperlihatkan bahwa operasi gabungan antara dua buah neutrosofik submodul bukan merupakan submodul.

3. PENUTUP

Dari penjelasan pada bagian-bagian sebelumnya telah memberikan gambaran bahwa antara neutrosofik modul dan modul klasik sebagai struktur padanannya, terdapat beberapa keterkaitan, diantaranya struktur atau sub-strukturnya mempunyai kemiripan definisi, tetapi dari sifat-sifat yang berlaku pada umumnya tidak selamanya bersesuaian antara kedua struktur tersebut, meskipun sejauh pembahasan ini masih belum ditemukan ketidak sesuaiannya.

Dari hasil pembahasan sejauh ini dapat disimpulkan bahwa sifat-sifat yang berlaku pada modul klasik masih berlaku pada struktur neutrosofik modul. Terutama yang berkaitan dengan aspek neutrosofik submodul-nya. Telah diperlihatkan bahwa irisan dan jumlahan antara neutrosofik-neutrosofik submodul merupakan neutrosofik submodul, akan tetapi tidak demikian halnya dengan operasi gabungan antara neutrosofik submodul.

4. UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Fakultas Sains dan Matematika (FSM) Universitas Diponegoro yang telah memberikan bantuan finansial, melalui program Penelitian Pembinaan dengan dana DIPA PNBP FSM Universitas Diponegoro Tahun 2014 dengan kontrak pelaksanaan penelitian No. 82C/UN7.3.8/PL/2014.

5. DAFTAR PUSTAKA

[1] Wisbauer, Robert, (1991), *Foundations of Modul & Ring Theory*, Gordon & Research Science Publishers, Reading.

[2] *Proceedings of The First International Conference on Neutrosophy, Neutroshopic Logic, Neutroshophic Set, Neutroshopic Probability and Statistics*, (2001), University of New Mexico, Gallup.

[3] Smarandache, Florentin, (2003), *A Unifying Field in Logics : Neutroshopic Logic. Neutroshopy, Neutroshophic Set, Neutroshopic Probability*, American Research Press, Rehoboth, New Mexico

[4] Kandasamy, W. B. V & Florentin Smarandache, (2006), S*ome Neutroshopic Algebraic Structures and Neutroshopic N – Algebraic Structures*, Hexis, Phoenix – Arizona.

[5] Kandasamy, W. B. V & Florentin Smarandache, (2006), *Neutroshopic Rings*, Hexis, Phoenix – Arizona

[6] Agboola A.A.A, Akinola A. D. & Oyebola O. Y., (2011), Neutrosophic Rings I, *International J. Math. Combin*, 4 : 1–14