

PROGRAM LINIER FUZZY PENUH DENGAN ALGORITMA MULTI OBJECTIVE LINEAR PROGRAMMING

Mohamad Ervan S¹, Bambang Irawanto², Sunarsih^{1,2,3}
Jurusan Matematika FSM Universitas Diponegoro
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H. Tembalang Semarang
¹mohomadervan@yahoo.co.id, ²irawanto@yahoo.co.id

Abstract. In the linear programming there is one of the certainty assumptions, where each parameters has been known with certainty, but in this real life, the parameters is often can not be stated with certainty, so that the linear programming developed into fully fuzzy linear programming (FFLP). This paper discusses the problem solving FFLP problem with Multi Objective Linear Programming Algorithm. FFLP problem will be converted to MOLP problem with three objective functions by using a new lexicographic ordering on triangular fuzzy numbers and then it is solved by lexicographic method. The value of the fuzzy optimal solution obtained is used to find the optimal value of fuzzy objective function and then do defuzzification to obtain crisp optimal solutions.

Keywords: Fully Fuzzy Linear Programming, Triangular Fuzzy Numbers, Multi Objective Linear Programming, Lexicographic Method.

1. PENDAHULUAN

Dalam program linier terdapat salah satu asumsi dasar, yaitu asumsi kepastian (pendefinisian yang baik dan tegas), dimana setiap parameter data dalam program linier diketahui secara pasti [1]. Dalam kehidupan sehari-hari, parameter yang ada tidak dapat dinyatakan dengan formula yang tegas sehingga ini bukan asumsi yang realistis. Oleh karena itu, program linier (tegas) dikembangkan menjadi program linier fuzzy penuh. Zadeh mendefinisikan himpunan fuzzy dengan menggunakan apa yang disebutnya fungsi keanggotaan (*membership function*), yang nilainya berada dalam selang tertutup $[0,1]$. Jadi keanggotaan dalam himpunan fuzzy tidak lagi merupakan sesuatu yang tegas (yaitu anggota atau bukan anggota), melainkan sesuatu yang berderajat atau bergradasi secara kontinu [2]. Beberapa metode telah dikembangkan untuk menyelesaikan masalah program linier fuzzy penuh, seperti metode Kumar oleh Amit Kumar, dkk [3]. Tulisan ini akan membahas proses penyelesaian masalah program linier fuzzy penuh dengan menggunakan Algoritma *Multi Objective Linear Programming*. Dengan berdasarkan pada leksikografi baru pada bilangan

segitiga fuzzy, algoritma digunakan untuk memecahkan masalah FFLP dengan mengubah masalah FFLP menjadi setara masalah *Multi Objective Linear Programming* dan kemudian diselesaikan dengan metode leksikograf. Penyelesaian yang diharapkan adalah himpunan bilangan segitiga fuzzy positif yang dinamakan solusi optimal fuzzy dan akan digunakan untuk menghitung penyelesaian solusi optimal fungsi tujuan fuzzy.

2. PEMBAHASAN

2.1 Himpunan Fuzzy

Dibawah ini diberikan pengertian dari himpunan fuzzy

Definisi 2.1. [4] *Himpunan fuzzy di dalam semesta pembicaraan U didefinisikan sebagai himpunan yang mencirikan suatu fungsi keanggotaan $\mu(x)$ yang mengawankan setiap $x \in U$ dengan bilangan real di dalam interval $[0,1]$.*

$\mu : U \rightarrow [0,1]$

dimana nilai $\mu(x)$ menunjukkan tingkat keanggotaan (*membership*) dari x pada U .

Definisi 2.2. [3] *Bilangan fuzzy adalah himpunan fuzzy dalam bilangan real yang memenuhi kondisi normalitas dan konveksitas. Bilangan fuzzy $\tilde{a} = (a_1, a_2, a_3)$*

dinamakan bilangan segitiga fuzzy jika fungsi keanggotaannya diberikan oleh:

$$\mu(x) = \begin{cases} \frac{x - a}{b - a}, & a \leq x < b, \\ 1, & x = b, \\ \frac{c - x}{c - b}, & b < x \leq c, \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases}$$

dengan a, b, c yang sesuai dengan fungsi keanggotaan bilangan segitiga fuzzy. Selanjutnya diberikan $F(R)$ adalah himpunan dari bilangan bilangan fuzzy.

Definisi 2.3. [3] Bilangan segitiga fuzzy (a, b, c) disebut bilangan fuzzy non negatif jika $a \geq 0$.

Definisi 2.4. [3] Dua bilangan segitiga fuzzy (triangular fuzzy number) (a_1, b_1, c_1) dan (a_2, b_2, c_2) dikatakan sama, $(a_1, b_1, c_1) = (a_2, b_2, c_2)$ jika $x_1 = x_2, y_1 = y_2,$ dan $z_1 = z_2$.

Definisi 2.5. [5] Misalkan terdapat dua bilangan segitiga fuzzy (a_1, b_1, c_1) dan (a_2, b_2, c_2) dan terdapat $k \in R$, maka:

- (i) $k \geq 0, k \cdot (a, b, c) = (ka, kb, kc)$,
- (ii) $k \leq 0, k \cdot (a, b, c) = (ka, kb, kc)$,
- (iii) $(a_1, b_1, c_1) + (a_2, b_2, c_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2)$,
- (iv) misal (a, b, c) sebaran bilangan segitiga fuzzy dan (a', b', c')

adalah sebuah bilangan segitiga fuzzy non negatif, maka:

- (v) $(a, b, c) \cdot (a', b', c') = (aa', bb', cc')$
- (vi) $(a, b, c) \cdot (a', b', c') = (aa', bb', cc')$

Definisi 2.6. [3] Fungsi ranking pada bilangan $F(R)$ didefinisikan

sebagai berikut $r(a, b, c) = \frac{a + 2b + c}{4}$, dengan $(a, b, c) \in F(R)$.

Definisi 2.7. [5] Misal (a, b, c) dan (a', b', c') adalah sebarang bilangan segitiga fuzzy. Maka $(a, b, c) < (a', b', c')$ jika dan hanya jika:

- (i) $r(a, b, c) < r(a', b', c')$ atau

(ii) $r(a, b, c) = r(a', b', c')$ dan $(c - a) > (c' - a')$ atau

(iii) $r(a, b, c) = r(a', b', c')$, $(c - a) = (c' - a')$ dan $(b - a) < (b' - a')$.

Jelas bahwa $(a, b, c) = (a', b', c')$ dan $(a + a', b + b', c + c') = (a', b', c')$ jika $a = a', b = b', c = c'$. Dan jika $(a, b, c) = (a', b', c')$ atau $(a, b, c) = (a', b', c')$.

2.2. Algoritma MOLP pada Program Linier Fuzzy Penuh

Sebelumnya diberikan himpunan bilangan bilangan fuzzy triangular $TF(R)$ adalah himpunan bilangan bilangan fuzzy yang bersifat segitiga [5]

Bentuk baku program linier fuzzy penuh, sebagai berikut [5]:

Memaksimumkan (atau meminimumkan)

$$z = \sum_{i=1}^m c_i x_i \quad (2.1)$$

dengan kendala

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.2)$$

dimana: $x_j = [x_j^l, x_j^c, x_j^u]$; $b_i = [b_i^l, b_i^c, b_i^u]$;

$a_{ij} = [a_{ij}^l, a_{ij}^c, a_{ij}^u]$; $a_{ij}^l, a_{ij}^c, a_{ij}^u \in TF(R)$, $TF(R)^+, i = 1, 2, \dots, m$ dan $j = 1, 2, \dots, n$. (2.3)

Perlu diperhatikan bahwa (a, b, c) dan

dapat diubah menjadi bentuk baku dengan menambahkan variabel vektor $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, dimana (a, b, c) merupakan bilangan fuzzy segitiga non negatif. Masing-masing menjadi

$$x_j = [x_j^l, x_j^c, x_j^u] \text{ dan } x_j = [x_j^l, x_j^c, x_j^u]$$

Catatan 2.1 [5] $x^* = ((x^*)^l, (x^*)^c, (x^*)^u)$ dikatakan solusi optimal eksak dari persamaan (2.1-2.1.3) jika memenuhi karakteristik berikut:

(i) $x^* = [x^*]^T$ dimana $(x^*)^+ = [x^*]^+, j = 1, 2, \dots, n$,

(ii) $x^* = b$,

(iii) $x^* = ((x^*)^l, (x^*)^c, (x^*)^u) = \{ (x^*)^l, (x^*)^c, (x^*)^u \}$ dimana $(x^*)^+ = [x^*]^+$

sehingga x^* (dalam masalah meminimumkan x^*).

Catatan 2.2. [5] Jika terdapat sedemikian sehingga $x^* = [x^*]^+$, maka x^* juga merupakan solusi optimal eksak dari persamaan (2.1-2.3) dan dinamakan solusi optimal eksak alternatif.

Langkah-langkah dari algoritma multi objective linear programming,

Langkah 1 [5] Memaksimumkan (meminimumkan) $((c^T x)^l, (c^T x)^c, (c^T x)^u)$ (2.4)

dengan kendala: $(Ax)^l = (b)^l, (Ax)^c = (b)^c, (Ax)^u = (b)^u, TF(R)^+$ (2.5)

Langkah 2 [5] Persamaan (2.4) dikonversi menjadi *Multi Objective Linear Programming (MOLP)* dengan tiga fungsi objektif tegas, yaitu:

Memaksimumkan (meminimumkan) $(c^T x)^c,$ (2.6)

Meminimumkan (memaksimumkan) $((c^T x)^u - (c^T x)^l),$ (2.7)

Memaksimumkan (meminimumkan) $((c^T x)^l + (c^T x)^u),$ (2.8)

dengan kendala: $(Ax)^l = (b)^l, (Ax)^c = (b)^c, (Ax)^u = (b)^u, TF(R)^+$ (2.9)

Langkah 3 [5] Memaksimumkan (meminimumkan) $(c^T x)^c,$ (2.10)

dengan kendala: $(Ax)^l = (b)^l, (Ax)^c = (b)^c, (Ax)^u = (b)^u, TF(R)^+$ (2.11)

Jika diperoleh solusi optimal unik dan berhenti. Jika tidak lanjutkan ke Langkah 4.

Langkah 4 [5] Meminimumkan (memaksimumkan) $((c^T x)^u - (c^T x)^l),$ (2.12)

dengan kendala: $(c^T x)^c = m^*, (Ax)^l = (b)^l, (Ax)^c = (b)^c, (Ax)^u = (b)^u, TF(R)^+$ (2.14)

Jika diperoleh solusi optimal unik dan berhenti. Jika tidak lanjut ke Langkah 5.

Langkah 5 [5] Memaksimumkan (meminimumkan) $((c^T x)^l + (c^T x)^u)$ (2.15)

dengan kendala: $((c^T x)^u - (c^T x)^l) = n^*, (c^T x)^c = m^*, (Ax)^l = (b)^l, (Ax)^c = (b)^c, (Ax)^u = (b)^u, TF(R)^+$ (2.18)

Jadi, solusi optimal diperoleh dengan menyelesaikan Persamaan (2.15-2.18).

dengan m^* adalah nilai optimal dari Persamaan (2.10), n^* adalah nilai optimal dari Persamaan (2.12)

Berdasarkan Teorema 2.1. menunjukkan bahwa solusi optimal dari Persamaan (2.6-2.9), dapat dianggap sebagai solusi optimal dari persamaan (2.4-2.5).

Teorema 2.1. [5] Jika $x^* = ((x^*)^l, (x^*)^c, (x^*)^u)$ merupakan solusi optimal Persamaan (2.10-2.11)-(2.15-2.18) (dan merupakan solusi optimal leksikografi dari Persamaan (2.6-2.9)), maka $x^* = ((x^*)^l, (x^*)^c, (x^*)^u)$ juga merupakan solusi optimal eksak dari Persamaan (2.4-2.5).

Bukti:

Berdasarkan kontradiksi, diberikan $x^* = ((x^*)^l, (x^*)^c, (x^*)^u)$ merupakan solusi optimal dari persamaan (2.10-2.11)-(2.15-2.18), tetapi bukan merupakan solusi optimal eksak dari Persamaan (2.4-2.5). Oleh karena itu, terdapat solusi fisibel dari Persamaan (2.4-2.5), yaitu $x^0 = ((x^0)^l, (x^0)^c, (x^0)^u)$, sehingga $((c^T x^*)^l, (c^T x^*)^c, (c^T x^*)^u) < ((c^T x^0)^l, (c^T x^0)^c, (c^T x^0)^u)$ (dalam kasus meminimumkan $((c^T x^*)^l, (c^T x^*)^c, (c^T x^*)^u) > ((c^T x^0)^l, (c^T x^0)^c, (c^T x^0)^u)$). Dengan memperhatikan definisi 3.1, terdapat tiga kondisi sebagai berikut:

- i. Diberikan $(c^T x^*)^c = (c^T x^0)^c$ (dalam kasus meminimumkan $(c^T x^*)^c < (c^T x^0)^c$). Juga, dengan memperhatikan kendala yang ada $(Ax^0)^l = (b)^l, (Ax^0)^c = (b)^c, (Ax^0)^u = (b)^u, (x^0)^c - (x^0)^l \geq 0, (x^0)^u - (x^0)^c \geq 0, (x^0)^l \geq 0$. Oleh karena $((x^0)^l, (x^0)^c, (x^0)^u)$ merupakan solusi fisibel dari persamaan (3.4.1-3.4.2) dimana nilai objektif dalam $((x^0)^l, (x^0)^c, (x^0)^u)$ lebih besar (atau kecil) dari pada nilai objektif dalam $((x^*)^l, (x^*)^c, (x^*)^u)$. Tetapi, ini kontradiksi.
- ii. Diberikan $(c^T x^*)^c = (c^T x^0)^c$ dan $((c^T x^0)^u - (c^T x^0)^l < (c^T x^*)^u - (c^T x^*)^l)$ (dalam kasus meminimumkan $((c^T x^0)^u - (c^T x^0)^l > (c^T x^*)^u - (c^T x^*)^l)$). Karena $((x^0)^l, (x^0)^c, (x^0)^u)$ merupakan solusi fisibel dari persamaan (3.5.1-3.5.3) dimana nilai objektif dalam $((x^0)^l, (x^0)^c, (x^0)^u)$ lebih kecil (atau besar) dari pada nilai objektif dalam $((x^*)^l, (x^*)^c, (x^*)^u)$. Tetapi, ini kontradiksi.
- iii. Diberikan $(c^T x^*)^c = (c^T x^0)^c, ((c^T x^0)^u - (c^T x^0)^l) = ((c^T x^*)^u - (c^T x^*)^l)$ dan $((c^T x^*)^u + (c^T x^*)^l < (c^T x^0)^u + (c^T x^0)^l)$ (dalam kasus meminimumkan $((c^T x^*)^u + (c^T x^*)^l > (c^T x^0)^u + (c^T x^0)^l)$). Karena $((x^0)^l, (x^0)^c, (x^0)^u)$ merupakan solusi fisibel dari persamaan (2.15-2.18) dimana nilai

objektif dalam $((x^0)^l, (x^0)^c, (x^0)^u)$ lebih besar (atau kecil) dari pada nilai objektif dalam $((x^*)^l, (x^*)^c, (x^*)^u)$.

Tetapi, ini kontradiksi.

Oleh karena itu, $x^* = ((x^*)^l, (x^*)^c, (x^*)^u)$ merupakan solusi optimal eksak dari persamaan (3.2.1-3.2.2).

Contoh 2.1. [6] Diberikan masalah program linier fuzzy penuh, sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \text{Memaksimumkan } & z = (2, 5, 8) \quad (3, \\ & \quad \quad \quad 6.1667, 10) \quad (5, \\ & \quad \quad \quad \quad \quad \quad 11.3333, \\ & \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 15) \\ \text{dengan kendala } & (2, 5, 8) \quad (3, \\ & \quad \quad \quad 6.8333, 10) \quad (5, \\ & \quad \quad \quad 5.1667, 18) \quad (6, \\ & \quad \quad \quad 16.6667, 30), \\ & (4, 10.6667, 12) \\ & (5, 12.1667, 20) \\ & (7, 17.5, 30) \quad (10, \\ & \quad \quad \quad 30, 50), \\ & (3, 5, 7) \quad (5, 15, \\ & \quad \quad \quad 20) \quad (5, 10, 15) \\ & \quad \quad \quad (15, 24.1667, \\ & \quad \quad \quad 30). \end{aligned}$$

Menggunakan langkah 2, masalah program linier fuzzy penuh dapat ditulis:

$$\begin{aligned} \text{Memaksimumkan } & 5(x^c)^c + 6.1667(x^c)^c + 11.3333(x^c)^c, \\ \text{Meminimumkan } & (8(x^u)^u + 10(x^u)^u + 15(x^u)^u) - (2(x^l)^l + \\ & 3(x^l)^l + 5(x^l)^l), \\ \text{Memaksimumkan } & (8(x^u)^u + 10(x^u)^u + 15(x^u)^u) + (2(x^l)^l + \\ & 3(x^l)^l + 5(x^l)^l), \\ \text{dengan kendala: } & 2(x^l)^l + 3(x^l)^l + 5(x^l)^l + (x^l)^l = 6, \\ & 5(x^c)^c + 6.8333(x^c)^c + 5.1667(x^c)^c + (x^c)^c \\ & = 16.6667, \\ & 8(x^u)^u + 10(x^u)^u + 18(x^u)^u + (x^u)^u = 30, \\ & 4(x^l)^l + 5(x^l)^l + 7(x^l)^l + (x^l)^l = 10, \\ & 10.6667(x^c)^c + 12.1667(x^c)^c + 17.5(x^c)^c + \\ & (x^c)^c = 30, \\ & 12(x^u)^u + 20(x^u)^u + 30(x^u)^u + (x^u)^u = 50, \\ & 3(x^l)^l + 5(x^l)^l + 5(x^l)^l + (x^l)^l = 15, \\ & 5(x^c)^c + 15(x^c)^c + 10(x^c)^c + (x^c)^c = \\ & 24.1667, \\ & 7(x^u)^u + 20(x^u)^u + 15(x^u)^u + (x^u)^u = 30, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (x^c)^c - (x^l)^l = 0; (x^c)^c - (x^l)^l = 0; (x^c)^c - \\ & (x^l)^l = 0, \\ & (x^u)^u - (x^c)^c = 0; (x^u)^u - (x^c)^c = 0; (x^u)^u - \\ & (x^c)^c = 0, \\ & (x^l)^l = 0; (x^l)^l = 0; (x^l)^l = 0. \end{aligned}$$

Solusi pada langkah 3 dengan menggunakan aplikasi POM for Windows Version 3.0 adalah $Z_1 = 18.8888$; $((x^l)^l, (x^c)^c, (x^u)^u) = (0, 0, 0)$; $((x^l)^l, (x^c)^c, (x^u)^u) = (0, 0, 1.6667)$; $((x^l)^l, (x^c)^c, (x^u)^u) = (0, 0, 1.6667)$.

Solusi pada langkah 4 dan 5 dengan menggunakan aplikasi POM for Windows Version 3.0 adalah $Z_2 = 19$; $Z_3 = 31$; $((x^l)^l, (x^c)^c, (x^u)^u) = (0, 0, 1.2)$; $((x^l)^l, (x^c)^c, (x^u)^u) = (0, 0, 1.6667)$; $((x^l)^l, (x^c)^c, (x^u)^u) = (0, 0, 1.6667)$.

Nilai optimal dari fungsi tujuan diperoleh dengan mensubstitusikan harga x^* ke dalam z , sehingga solusi optimal dari permasalahan FFLP dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} z &= 2(0) + 3(0) + 5(1.2) = 6, \\ z &= 5(0) + 6.1667(0) + \\ & 11.3333(1.6667) = 18.8892, \\ z &= 8(0) + 10(0) + 15(1.6667) \\ & = 25.0005, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (x^l)^l, (x^c)^c, (x^u)^u \\ & = (6, 18.8892, 25.0005). \end{aligned}$$

Penegasan (*defuzzification*) digunakan untuk mengubah nilai solusi optimal fungsi tujuan fuzzy menjadi nilai solusi optimal fungsi tujuan tegas (*crisp*). Dengan menggunakan fungsi peringkat (*ranking function*) penegasan dari solusi optimal fungsi tujuan $z = (6, 18.8892, 25.0005)$, yaitu sebagai berikut:

$$z = \frac{z^l + 4z^c + z^u}{6} \quad (\text{Definisi 2.6})$$

$$\begin{aligned} Z &= \frac{(6 + 4 \cdot 18.8892 + 25.0005)}{6} = \dots \\ &= 17.194725 \quad 17.2 \end{aligned}$$

3. PENUTUP

Dari pembahasan yang telah diuraikan pada bab sebelumnya, masalah program linier fuzzy penuh (FFLP) dapat diselesaikan dengan menggunakan Algoritma *Multi Objective Linear*

Programming. Berdasarkan pada leksikografi baru pada bilangan fuzzy segitiga, algoritma digunakan untuk memecah masalah FFLP dengan mengubah masalah FFLP menjadi setara masalah pemrograman linier multi obyektif dan diselesaikan dengan metode leksikografi. Penegasan (*deffuzification*) dilakukan untuk mengubah nilai solusi optimal fuzzy menjadi solusi optimal tegas (*crisp*).

4. DAFTAR PUSTAKA

- [1] Hillier, Frederick S dan Gerald J. Liberman, (1990) *Introduction to Operations Research Fifth Edition*. Jakarta: Erlangga.
- [2] Susilo, Frans, (2006), *Himpunan & Logika Kabur serta Aplikasinya*, Yogyakarta: Graha Ilmu.
- [4] Kumar, Amit. Jagdeep Kaur. Pushpinder Singh, (2011), A New Method For Solving Fully Fuzzy Linear Problemming Problem, *International Journal of Applied Mathematics Modelling*, 35 (2) : 817-823.
- [3] Klir, George J. dan Yuan Bo, (1995), *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic – Theory and Applications*. New Jersey: Prentice Hall P T R
- [5] R. Ezzati, E. Khorram, R. Enayati, (2013), A new algorithm to solve fully fuzzy linear programming problems using the MOLP problem, *Appl. Math. Model.* : 1-11.
- [6] Ahmad, Tahir. Mohsin Khan, Izaz Ullah Khan, Normah Maan, (2011), Fully Fuzzy Linear Programming (FFLP) with a Special Ranking Function for Selection of Substitute Activities in Project Management, *International Journal of Applied Science and Technology*, 1(6) : 234-246.
-