

HIMPUNAN BILANGAN BULAT NON NEGATIF PADA SEMIRING LOKAL DAN SEMIRING FAKTOR

Meryta Febrilian Fatimah¹, Nikken Prima Puspita², Farikhin³
^{1,2,3}Jurusan Matematika FSM Universitas Diponegoro
 Jl. Prof. H. Soedarto, S.H. Semarang 50275

Abstract. Let commutative Semiring S . Ideal on Semiring S defined in the same way with the Ideal on the ring. On Semiring there are special Ideals such as π -ideal, π -maximal Ideal and π -ideal. Semiring with a unique π -maximal Ideal is called local Semiring. In This paper we will discussed that from non negative integer we can determined a local Semiring and quotient Semiring.

Keywords : Commutative Semiring, π -ideal, π -maximal Ideal, π -ideal, local Semiring, quotient Semiring

1. PENDAHULUAN

Konsep Semiring diperkenalkan oleh H. S. Vandiver pada tahun 1935. [1] telah membahas tentang salah satu Ideal pada Semiring yaitu Ideal subtraktif. Penelitian terus berkembang hingga pada tahun 2008 [2, 3] penelitian yang menghasilkan konsep tentang Ideal pada Semiring komutatif, Semiring lokal dan Semiring faktor.

Dalam Struktur Aljabar yang dapat dipelajari pada [4, 5, 6] telah diketahui bahwa himpunan bilangan bulat $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ terhadap operasi penjumlahan (+) dan perkalian (\cdot) merupakan Ring. Sedangkan himpunan bilangan bulat non negatif $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ terhadap operasi penjumlahan (+) dan perkalian (\cdot) merupakan Semiring. Pada tulisan ini akan dihubungkan bagaimana konsep semiring yang telah dikemukakan oleh Reza Ebrahimi Atani dan Shahabaddin Ebrahimi Atani kedalam himpunan bilangan bulat non negatif $(\mathbb{N}, +, \cdot)$.

2. PEMBAHASAN

2.1 Ideal atas Semiring Komutatif

Untuk dapat memahami tentang konsep semiring lokal dan semiring faktor, terlebih dahulu dipelajari mengenai ideal yang ada pada semiring sebagai mana diberikan dalam bagian berikut.

Definisi 2.1 [2] Diberikan Semiring $(R, +, \cdot)$. Himpunan tak kosong I dari

Semiring R disebut Ideal jika $a \in I, b \in R$ dan $a \cdot b \in I$ berlaku $a + b \in I$ dan $a \cdot b \in I$.

Berdasarkan Definisi 2.1 untuk setiap $(R, +, \cdot)$, himpunan $(I, +, \cdot)$ adalah Ideal pada $(R, +, \cdot)$ [2]. Himpunan I dapat ditulis dengan notasi $\langle k \rangle$.

Definisi 2.2 [2] Diberikan Semiring $(R, +, \cdot)$. Ideal subtraktif (k -ideal) I adalah Ideal di R dengan syarat untuk setiap $a \in I, b \in R$ dengan $a + b \in I$, maka $a \cdot b \in I$.

Berdasarkan Definisi 2.4 untuk setiap $(R, +, \cdot)$, himpunan $(I, +, \cdot)$ merupakan k -ideal pada $(R, +, \cdot)$. Himpunan $\{0\}$ merupakan k -ideal pada $(R, +, \cdot)$.

Berikut diberikan definisi dari k -closure.

Definisi 2.3 [2] Diberikan Semiring $(R, +, \cdot)$ dan Ideal I atas R . Himpunan k -closure I ($cl(I)$) didefinisikan sebagai

$$cl(I) = \{ a \in R \mid a + b = c, a \in I, b, c \in R \}$$

Berikut ini diberikan sifat terkait k -closure I merupakan Ideal di R .

Sifat 2.4 [2] Diberikan Semiring $(R, +, \cdot)$ dan I Ideal di R . Himpunan $cl(I)$ merupakan Ideal di R .

Bukti :

Diberikan himpunan

$$cl(I) = \{ a \in R \mid a + b = c, a \in I, b, c \in R \}.$$

Dibuktikan $cl(I)$ adalah Ideal di R .

- a. Himpunan (0) , sebab terdapat 0 sehingga $0 + 0 = 0$ untuk suatu 0 , jadi $0 \in (0)$. Terbukti bahwa himpunan (0) .
- b. Himpunan (0) , sebab untuk setiap (0) , maka dari definisi (0) yaitu untuk dengan $+ =$ untuk suatu $,$.
- c. Diambil sebarang $,$ (0) , sehingga $+ = ,$ untuk suatu $,$ dan $+ " = "$, untuk suatu $"$, " diperoleh
- $$+ + + " = + "$$
- untuk suatu $,$ $"$, $"$. Oleh karena I Ideal, maka $+ "$ dan $+ "$. Jadi $+ + =$ untuk suatu $= + "$, $= + "$. Hal ini berakibat $+ (0)$. Untuk setiap diperoleh $. + . =$. dan karena $,$ dan adalah Ideal, maka $,$. Berakibat bahwa (0) .

Dari (a) – (c) terbukti bahwa (0) Ideal di R .

Beberapa sifat-sifat yang terkait dengan himpunan k -closure dijelaskan sebagai berikut :

Sifat 2.5 [2] Diberikan Semiring $(, +,)$ dan I Ideal di $.$ Himpunan (0) memenuhi

- i. (0) ,
- ii. $(0) = (0)$

Bukti :

- i. Dibuktikan (0)
Diambil sebarang $.$ Berdasarkan Definisi 2.3 jelas bahwa (0) .
- ii. Dibuktikan $(0) = (0)$, yaitu $(0) (0)$ dan $(0) (0)$.
a. Jelas bahwa $(0) (0)$, sebab untuk setiap (0) dan dari bagian (i) diketahui (0) , terbukti bahwa (0) .
b. Dibuktikan $(0) (0)$
Diketahui (0) yaitu $+ = ,$ untuk suatu $,$ (0) . Berdasarkan Definisi 2.3 diperoleh

$$+ =$$

$$+ + + = + +$$

(sifat komutatif penjumlahan) dari Definisi 2.3 terbukti bahwa (0) .

Dari (a) dan (b) terbukti bahwa $(0) = (0)$.

Pada Sifat 2.5 dijelaskan bahwa (0) . Berikut diberikan syarat perlu dan cukup agar terpenuhi sifat $= (0)$.

Sifat 2.6 [2] Diberikan Semiring $(, +,)$ dan I Ideal di R . Ideal I adalah k -ideal jika dan hanya jika $= (0)$.

Bukti dapat dilihat pada [2].

Sama halnya dengan Ring, pada Semiring juga dikenal Ideal maksimal dan Ideal Prima [2]. Berikut diberikan definisinya.

Definisi 2.7 [2] Diberikan Semiring $(, +,)$. Ideal I dari R dikatakan maksimal jika terdapat J Ideal di R dengan berakibat $=$ atau $=$.

Berdasarkan Definisi 2.7 himpunan 2 merupakan Ideal maksimal pada Semiring $(, +,)$. Diberikan definisi $-$ ideal maksimal sebagai berikut.

Definisi 2.8 [2] Diberikan Semiring $(, +,)$. Ideal I dari R dikatakan k - ideal maksimal jika terdapat J k -ideal di R dengan berakibat $=$ atau $=$.

Berdasarkan Definisi 2.8 himpunan 2 yang merupakan $-$ ideal pada Semiring $(, +,)$ merupakan $-$ ideal maksimal. Selanjutnya di dalam Semiring terdapat konsep Ideal partisi dinotasikan dengan Q -Ideal.

Definisi 2.9 [7] Diberikan Semiring $(, +,)$ dan I Ideal pada R . Ideal I disebut Ideal partisi (Q -ideal) asalkan

- i. himpunan sedemikian sehingga $= \{ + | \}$,
- ii. untuk setiap $,$ $,$ berlaku $(+) (+) =$ untuk $.$

Berdasarkan Definisi 2.9 diberikan contoh sebagai berikut.

Contoh 2.10

Diberikan Semiring $(, +,)$ dan 0 . Himpunan $= \{ | \}$

merupakan Q -ideal pada $(R, +, \cdot)$. Diketahui bahwa himpunan

$$I = \{ x \in R \mid x + 1 = 0 \}$$

merupakan Ideal di $(R, +, \cdot)$. Ideal adalah Q -ideal pada $(R, +, \cdot)$, sebab terdapat $0 \in I$ dan $-1 \in I$ dimana $0 = \{ x \in R \mid 0 = x \}$ sedemikian sehingga

(i.) untuk setiap $x \in I$ dapat dibentuk himpunan, $x + 1 = \{ x + 1 \mid x \in I \}$. Ditunjukkan bahwa $x + 1 = \{ x + 1 \mid x \in I \}$.

a. Himpunan $x + 1$, paling tidak terdapat $0 = \{ x \in R \mid 0 = x \}$ sehingga $x + 1 = \{ 0 + 1 \mid 0 \in I \} = \{ 1 \}$.

b. Himpunan $x + 1$, sebab untuk setiap $x \in I$ dan $1 \in I$ dengan menggunakan sifat tertutup terhadap operasi penjumlahan di $(R, +, \cdot)$ diperoleh $x + 1 \in I$.

c. Ditunjukkan bahwa himpunan $\{ x + 1 \mid x \in I \}$. Diambil sebarang $x + 1 \in \{ x + 1 \mid x \in I \}$, karena $x \in I$, dan berlaku operasi tertutup terhadap penjumlahan di $(R, +)$. Sehingga diperoleh $x + 1 \in I$. Terbukti himpunan $\{ x + 1 \mid x \in I \}$.

d. Ditunjukkan bahwa himpunan $\{ x + 1 \mid x \in I \}$. Diambil sebarang $x + 1 \in \{ x + 1 \mid x \in I \}$, ditunjukkan bahwa $\{ x + 1 \mid x \in I \}$.

i. Jika $0 \in I$ maka untuk setiap $x \in I$ dengan $0 = \{ x \in R \mid 0 = x \}$ diperoleh $0 + 1 = 1 \in I$ dan $-1 \in I$ diperoleh

$$\begin{aligned} &= 0 + 1 = 1 \\ &= 1 + (-1) = 0 \end{aligned}$$

Oleh karena $\{ x + 1 \mid x \in I \}$, untuk $0 \in I$ diperoleh $0 + 1 = 1 \in I$.

ii. Jika $1 \in I$, maka terdapat $1 = 0 + 1$ sedemikian sehingga $1 = 0 + 1$ untuk suatu $0 \in I$ untuk $1 \in I$ untuk $1 \in I$, $1 = 0 + 1$ untuk $0 \in I$.

Oleh karena $\{ x + 1 \mid x \in I \}$, untuk $0 \in I$ diperoleh $0 + 1 = 1 \in I$.

iii. Jika $-1 \in I$, maka terdapat $(-1) + 1 = 0 \in I$ sedemikian sehingga $0 = (-1) + 1$ untuk $-1 \in I$ dan $1 \in I$.

Oleh karena $(-1) + 1 = 0 \in I$, berakibat $\{ (-1) + 1 \mid -1 \in I \} = \{ 0 \mid -1 \in I \}$ sehingga $0 = (-1) + 1 \in I$.

Dari (i) - (iii) terbukti bahwa $\{ x + 1 \mid x \in I \}$.

Dari (a) - (d) terbukti bahwa $\{ x + 1 \mid x \in I \}$.

(ii.) Untuk setiap $x \in I$, $x + 1 \in I$ untuk $x \in I$. Diambil sebarang $x \in I$, dengan $(x + 1) + (-1) = x \in I$, dibuktikan $x \in I$. Andaikan $x \in I$, maka dari sifat tertutup penjumlahan di $(R, +)$, $x + (-1) = x - 1 \in I$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} (x + 1) + (-1) &= (x - 1) \\ (x - 1) + 1 &= x \end{aligned}$$

Kontradiksi dengan $(x + 1) \in I$ dan $(x - 1) \in I$. Pengandaian salah, maka haruslah $x \notin I$.

Dari (i) dan (ii) terbukti bahwa himpunan $\{ x + 1 \mid x \in I \}$ merupakan Q -ideal di $(R, +, \cdot)$.

2.2 Semiring Lokal
Diberikan Semiring $(R, +, \cdot)$ dengan elemen satuan 1 . Setiap $x \in R$ dengan 0 disebut semi-unit di R jika terdapat $y \in R$ sedemikian sehingga $1 + x = 0$.

. Ideal merupakan ideal pada Semiring $(R, +, \cdot)$ jika dan hanya jika $I \cdot 1 = I$.

Lemma 2.11 [2] Diberikan Semiring $(R, +, \cdot)$ dengan elemen satuan dan k -ideal I di R , pernyataan berikut dipenuhi.

- (i.) Jika a adalah semi-unit di R dengan $a \in I$, maka $a^{-1} \in I$.
- (ii.) Untuk setiap I, J , maka $(I \cap J)$ adalah k -ideal dari R .

Bukti dapat dilihat pada [2].

Berikut ini diberikan lemma tentang k -ideal maksimal pada Semiring $(R, +, \cdot)$.

Lemma 2.12 [2] Diberikan Semiring $(R, +, \cdot)$ dengan elemen satuan. Paling tidak terdapat satu k -ideal maksimal di R .

Bukti :

Dibentuk himpunan $\Delta = \{ I \mid I \text{ adalah } k\text{-ideal di } R \}$. Himpunan Δ tak kosong, sebab himpunan $\{0\}$ adalah k -ideal di R , jadi $\{0\} \in \Delta$. Himpunan Δ merupakan himpunan terurut parsial terhadap relasi inklusi, yaitu $I \subseteq J$ untuk setiap $I, J \in \Delta$.

[4]. Akibatnya, pasangan (Δ, \subseteq) merupakan himpunan terurut parsial. Dengan menggunakan Lemma Zorn jika dibentuk rantai naik di Δ yaitu $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$ yang merupakan Ideal-Ideal di R , maka terdapat dengan tunggal sehingga $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i \in \Delta$.

Dengan kata lain $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i$ adalah k -ideal maksimal di R .

Selanjutnya, diberikan definisi Semiring lokal sebagai berikut.

Definisi 2.13 [2] Diberikan Semiring $(R, +, \cdot)$. Semiring R disebut Semiring lokal asalkan R memiliki k -ideal maksimal yang tunggal.

Berikut ini diberikan Teorema yang berkaitan dengan k -ideal maksimal pada sebuah Semiring yang dibangun oleh elemen-elemen yang berhingga.

Teorema 2.14 [1] Diberikan Semiring $(R, +, \cdot)$ dengan $1 \in R$, \dots , merupakan Semiring yang dibangun secara berhingga. Jika A merupakan k -ideal di R , maka A termuat dalam suatu k -ideal maksimal di R .

Bukti :

Diketahui merupakan k -ideal di $(R, +, \cdot)$. Dibentuk himpunan

$$\Delta = \{ I \mid I \text{ adalah } k\text{-ideal di } R \}$$

Himpunan Δ , sebab paling tidak terdapat $\{0\}$ yang merupakan k -ideal di R . Pasangan (Δ, \subseteq) merupakan poset dan dari definisi himpunan Δ , untuk setiap $T_i \in \Delta$ diperoleh $T_1 \subseteq T_2 \subseteq T_3 \dots$ sehingga himpunan akan memuat batas atas paling tidak adalah R . Kemudian dimisalkan merupakan gabungan semua k -Ideal di R yang memuat A , dinotasikan dengan $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} T_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} T_i$ dan untuk setiap $T_i \in \Delta$. Ditunjukkan merupakan k -ideal di R . Himpunan merupakan k -ideal di R , sebab memenuhi aturan berikut:

1. Himpunan Ideal di R , sebab jika diambil sebarang $I, J \in \Delta$, $I + J = I \cup J$ artinya bahwa paling tidak terdapat Ideal I, J sedemikian sehingga $I + J = I \cup J$ dan $I \cup J \in \Delta$. Untuk setiap $J, K \in \Delta$, maka terdapat dua kasus yang mungkin yaitu atau .
 - a. Kasus 1, untuk $I \subseteq J$. Untuk setiap $x \in I + J$, $x \in I$ dan $x \in J$ dan $I + J = I \cup J$ dan untuk setiap $x \in I + J$ berlaku $x \in I \cup J$.
 - b. Kasus 2, untuk $I \not\subseteq J$. Untuk setiap $x \in I + J$, $x \in I$ dan $x \in J$ dan untuk setiap $x \in I + J$ berlaku $x \in I \cup J$.
 Dari (a) dan (b) karena $I, J \in \Delta$, maka terbukti bahwa Ideal di R .
2. Himpunan k -ideal di R , sebab jika diambil sebarang $I, J \in \Delta$, $I + J = I \cup J$ artinya bahwa paling tidak terdapat k -ideal I, J sedemikian sehingga $I + J = I \cup J$ dan $I \cup J \in \Delta$. Untuk setiap $I, J \in \Delta$, maka atau .
 - a. Kasus 1, untuk $I \subseteq J$. Untuk setiap $x \in I + J$, $x \in I$ dan $x \in J$ dan $I + J = I \cup J$ dan $I \cup J \in \Delta$ dan $I + J = I \cup J$ ideal di R , maka $I + J \in \Delta$.
 - b. Kasus 2, untuk $I \not\subseteq J$. Untuk setiap $x \in I + J$, $x \in I$ dan $x \in J$ dan $I + J = I \cup J$ dan $I \cup J \in \Delta$ dan $I + J = I \cup J$ ideal di R , maka $I + J \in \Delta$.

Dari (a) dan (b) karena Δ , Δ ,
 maka terbukti bahwa Δ -ideal di R .
 Dari (1) dan (2) diketahui bahwa
 merupakan Δ -ideal di R . Ditunjukkan
 bahwa Δ . Diketahui Δ dan
 Δ . Oleh karena Δ , maka $1 \notin \Delta$. Hal ini
 berakibat $1 \notin \Delta$, sehingga Δ . Jadi
 terbukti bahwa Δ merupakan batas atas di
 dan Δ -ideal yang memuat di R .
 Dengan kata lain Δ merupakan Δ -ideal
 maksimal di R dan Δ .
 Selanjutnya, diberikan akibat dari Teorema
 2.14 sebagai berikut.

Akibat 2.15 [1] *Diberikan Semiring*
(, +,) dengan elemen satuan 1. Setiap k-
ideal di R termuat dalam suatu k-ideal
maksimal di R.

Bukti dapat dilihat di [1].

Lemma 2.16 [2] *Diberikan Semiring*
(, +,) dengan elemen satuan 1 dan
 . Elemen a merupakan semi-unit di R
jika dan hanya jika a tidak termuat pada
setiap k-ideal maksimal di R.

Bukti :

() Diketahui Δ merupakan semi-unit di
 R . Dibuktikan bahwa untuk sebarang
 Δ adalah Δ -ideal maksimal di R , maka
 Δ . Diambil sebarang Δ adalah Δ -ideal
 maksimal di R dan Δ , Δ .
 Andaikan Δ , karena Δ merupakan Δ -
 ideal di R . Dari Lemma 2.11 (i)
 diperoleh $\Delta = \Delta$, kontradiksi dengan
 Δ . Pengandaian salah, haruslah

() Diketahui Δ dan Δ merupakan Δ -
 ideal maksimal di R . Dibuktikan bahwa
 Δ merupakan semi-unit di R . Diambil
 sebarang Δ dan Δ , andaikan
 bukan semi-unit di R maka tidak ada
 Δ , sedemikian sehingga $1 + \Delta = \Delta$.
 Berdasarkan Definisi 2.3, berakibat
 $1 \in \Delta$ (), sebab tidak ada Δ ,
 sedemikian sehingga $1 + \Delta = \Delta$. Dari
 Lemma 2.11 (ii) diketahui bahwa ()
 merupakan Δ -ideal di R . Oleh karena untuk
 suatu Δ -ideal maksimal di R dari
 Teorema 2.14 haruslah () atau
 () sehingga Δ .
 Kontradiksi, dari yang diketahui

pengandaian salah haruslah Δ merupakan
 semi-unit di R .
 Berikut diberikan Teorema pada Semiring
 lokal.

Teorema 2.17 [2] *Diberikan Semiring*
(, +,) dengan elemen satuan 1. Semiring
R dikatakan Semiring lokal jika dan hanya
jika himpunan dari semua elemen non-
semi unit di R adalah k-ideal.

Bukti :

() Dari yang diketahui R dikatakan
 Semiring lokal asalkan terdapat dengan
 tunggal P sebagai k -ideal maksimal [2].
 Terbukti bahwa P yang merupakan k -ideal
 maksimal mempunyai elemen-elemen
 dimana untuk setiap Δ , Δ bukan
 merupakan semi-unit.

() Diberikan himpunan
 $\Delta = \{ \Delta \mid \Delta - \Delta \}$ yang
 merupakan k -ideal di R , maka I adalah k -
 ideal maksimal [2]. Oleh karena $1 \notin \Delta$ dan
 1 adalah semi-unit di R , maka $1 \notin \Delta$ atau
 Δ . Semiring R paling tidak memuat
 satu k -ideal maksimal [2], misalkan J
 adalah k -ideal maksimal di R , sehingga J
 memuat elemen-elemen yang bukan unit.
 Hal ini berakibat Δ dan Δ .
 Oleh karena I adalah k -ideal maksimal dan
 Δ , jadi haruslah $\Delta = \Delta$.

2.3 Semiring Faktor

Untuk setiap Ideal I yang merupakan
 Q -ideal di R dapat dibentuk himpunan

$$\Delta = \{ \Delta + \Delta \mid \Delta \}$$

Pada himpunan Δ didefinisikan operasi
 penjumlahan () dan operasi perkalian
 () dengan definisi (+)
 $(\Delta + \Delta) = \Delta + \Delta$ dimana Δ adalah
 elemen tunggal sedemikian sehingga
 $\Delta + \Delta = \Delta + \Delta$ dan
 $(\Delta + \Delta) (\Delta + \Delta) = \Delta + \Delta$
 dimana Δ adalah elemen tunggal
 sedemikian sehingga $\Delta + \Delta = \Delta + \Delta$.
 Selanjutnya pada teorema berikut
 ditunjukkan bahwa Δ terhadap operasi
 Δ dan Δ membentuk struktur Semiring.

Teorema 2.18 [2] *Diberikan Semiring*
(, +,) dan I adalah Q-ideal di R.
Himpunan Δ merupakan Semiring

terhadap operasi penjumlahan () dan perkalian ().

Bukti dapat dilihat pada [2].

2.4 Himpunan Bilangan Bulat Non Negatif pada Semiring Lokal dan Semiring Faktor

Penelitian yang dihasilkan oleh [2] telah dikemukakan pada Bagian 2.1, 2.2 dan 2.3. Pada bagian ini akan dijelaskan bagaimana dari himpunan bilangan bulat non negatif diperoleh sebuah semiring faktor dan semiring lokal sebagaimana dijelaskan dalam sifat berikut.

Sifat 2.19 [2] *Semiring* (, +,) merupakan *Semiring lokal dengan k-ideal maksimal* {2,3}

Bukti :

Diketahui bahwa {2,3} merupakan yang dibangun oleh 2 dan 3 atau {2,3} = {2 + 3 | , } merupakan k-ideal maksimal tunggal di (, +,).

1. Himpunan {2,3} . Oleh karena 0 maka paling tidak ada 0 = 2 · 0 + 3 · 0 {2,3} berakibat {2,3} .
2. Himpunan {2,3} . Diambil sebarang = 2 + 3 {2,3} , karena , dan berlaku sifat tertutup terhadap operasi perkalian serta penjumlahan di (, +,) berakibat 2 , 3 sehingga diperoleh 2 + 3 = . Jadi, terbukti bahwa himpunan {2,3} .

3. Dibuktikan bahwa himpunan {2,3} merupakan Ideal di . Diambil sebarang , (2,3) dengan = 2 + 3 dan = 2 + 3 dimana , , , , diperoleh

$$\begin{aligned}
 + &= (2 + 3) + (2 + 3) \\
 &= 2 + 2 + 3 + 3 \\
 &= 2(+) + 3(+)
 \end{aligned}$$

(sifat komutatif di (, +))

Oleh karena sifat tertutup yang berlaku di (, +) dimana untuk setiap , , , berlaku + = dan + = , maka

$$2(+) + 3(+) = 2 + 3$$

Untuk setiap diperoleh

$$\begin{aligned}
 &= (2 + 3) \\
 &= 2 + 3 \quad \text{(sifat distributif kanan di (, +,))} \\
 &= 2() + 3()
 \end{aligned}$$

karena untuk setiap , , berlaku , berakibat

$$2() + 3() \in \{2,3\}$$

Jadi, terbukti bahwa himpunan {2,3} merupakan Ideal pada (, +,).

4. Dibuktikan bahwa himpunan {2,3} merupakan k-ideal di . Diambil sebarang {2,3} dengan = 2 + 3 dimana , dan + {2,3} . Diketahui + {2,3} atau + = untuk suatu = 2 + 3 {2,3} dengan , . Dari sifat penjumlahan di diperoleh + = 2 + 3 + = 2 + 3

haruslah merupakan bilangan bulat yang dibangun oleh dua dan tiga atau = 2 + 3 dengan , . Dengan kata lain terbukti bahwa {2,3} atau himpunan {2,3} merupakan k-ideal di .

5. Dibuktikan bahwa himpunan {2,3} merupakan Semiring lokal yaitu himpunan dari semua elemen non-semi unit di adalah k-ideal. Dari yang diketahui himpunan {2,3} merupakan k-ideal di , dibuktikan bahwa jika semi unit di maka {2,3} . Diketahui bahwa elemen semi unit di adalah elemen satuan 1, 1 {2,3} , sebab untuk setiap , tidak ada yang memenuhi 2 + 3 = 1. Jadi, 1 {2,3} dan {2,3} merupakan k-ideal di . Terbukti bahwa himpunan {2,3} merupakan Semiring lokal.

Dari (1) – (5) terbukti bahwa himpunan {2,3} = {2 + 3 | , } merupakan -ideal maksimal di .

Sifat 2.20 Diberikan Semiring (, +,) dan Ideal . Dari himpunan dan dapat dibentuk Semiring faktor

$$= \{ + | \}$$

dengan

$$= \{ \quad | 0 \quad - 1 \}.$$

Bukti :

Berdasarkan Contoh 2.10 telah ditunjukkan bahwa merupakan dengan $= \{ \quad | 0 \quad - 1 \}$. Hal ini berakibat bahwa dapat dibentuk Semiring faktor $= \{ + \quad | \quad \}$ (Teorema 2.18).

3. PENUTUP

Pembahasan yang telah diuraikan menjelaskan bahwa himpunan bilanganbulat non negatif () merupakan Semiring komutatif terhadap operasi penjumlahan dan perkalian dan dinotasikan dengan (, +,). Semiring (, +,) merupakan Semiring lokal dimana hanya mempunyai satu -ideal maksimal tunggal yaitu Ideal $\{2,3\}$. Himpunan merupakan -ideal di Semiring (, +,) dengan $= \{ \quad | 0 \quad - 1 \}$, sehingga dapat dibentuk Semiring faktor

4. DAFTAR PUSTAKA

[1] Sen, M. K. and M. R. Adhikari, (1993), On Maximal k -ideals of Semirings. *Proceedings of The American Mathematical Society*. 118(3) :699-703.

[2] Atani, Reza Ebrahimi and Shahabaddin Ebrahimi Atani, (2008), Ideal Theory in Commutative Semirings. *Buletinul Academiei De Stiinte. Republicii Moldova*. 57 (2) : 14-23.

[3] Atani, Reza Ebrahimi, (2013), Generalizations of Prime Ideals of Semirings. *Azerbaijan Journal of Mathematics*. 3(1) : 76-83.

[4] Fraleigh, John B., (2003), *A First Course in Abstract Algebra Seventh Edition*. United States of America : Addison Wesley Publishing Company, Inc.

[5] Gilbert, Linda and Jimmie Gilbert, (2009), *Elements of Modern Algebra Seventh Edition*. United States of America :Cengage Learning.

[6] Howie, John M., (1995), *Fundamentals of Semigroup Theory*.Skotlandia : Clarendon Press.

[7] Allen, Paul J., (1969), A Fundamental Theorem of Homomorphisms for Semirings. *Proceedings of the American Mathematical Society*. 21 (2) : 412-416.