ANALISIS KESTABILAN MODEL DINAMIK ALIRAN FLUIDA DUA FASE PADA SUMUR PANAS BUMI

R. Heri SU[1], Widowati[2], R. Heru Tj[3], L. Niswah[3]
[1,2,3,4]Jurusan Matematika FSM Universitas Diponegoro
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H. Semarang 50275

Abstract. In this paper is discussed about the analysis of the stability of fluid flow dynamical model of two phases on the geothermal wells. The form of the model is non-linear differential equation. To analyze the local stability around the equilibrium point, first, the non linear models of is linearized around the equilibrium point using Taylor series. Further, from linearized model, we find a Jacobian matrix, where all of the real eigen values of the Jacobian matrix are zeros. So that the behviour of the dynamical system obtained around the equilibrium point is stable.

Keywords : Dynamical Models, equilibrium point, the Jacobian matrix, stable

1. PENDAHULUAN

Pengembangan panas bumi sebagai sumber energi alternative semakin meningkat . Kebijakan Energi Nasional (Perpres No. 5 th 2006) menargetkan kontribusi energi panas bumi dalam bauran energi nasional sebesar 5 % pada tahun 2025 atau sekitar 9500 Mega Watt (MW [1]). Sistim panas bumi di Indonesia umumnya merupakan sistim hidrothermal yang mempunyai temperatur tinggi (>225^{o}C), hanya beberapa diantaranya yang mempunyai temperatur sedang (150-225^{o}C). Berdasarkan pada jenis fluida produksi dan jenis kandungan fluida utamanya, sistim hidrotermal dibedakan menjadi dua, yaitu sistim satu fasa atau sistim dua fasa.

Pada aliran satu fase, data tentang penurunan tekanan pada kontraksi dan pembesaran saluran telah banyak terdapat dalam pustaka, bahkan sudah ditabelkan untuk berbagai harga koefisien kontraksi. Namun pada aliran dua-fase, karena permasalahannya lebih kompleks, datanya masih terbatas dan model-model teori untuk menghitung penurunan tekanan seringkali berhasil baik hanya pada kasus-kasus tertentu.

Selama fluida panas bumi dua fasa [2, 3, 5] mengalir dalam pipa salur dari kepala sumur hingga separator dapat terjadi kehilangan temperatur dan tekanan. Perubahan parameter tersebut mempengaruhi parameter aliran fluida panas bumi dua fasa yang lain seperti kecepatan fuida, kualitas uap (friksi), dan entalpi fluida sebagai suatu perilaku aliran di dalam pipa salur. Perubahan tekanan yang terjadi dalam pipa salur diakibatkan oleh pengaruh gaya gesek (friksi), gaya gravitasi, dan percepatan (akselarasi). Sedangkan perubahan temperatur terjadi karena adanya proses kehilangan panas yang disebabkan oleh adanya perbedaan temperatur yang cukup besar dengan lingkungan sekitar jalur pemipaan. Berdasarkan latar belakang di atas, permasalahan yang akan dibahas dalam paper ini adalah bagaimana menganalisa kestabilan dari model aliran fluida dua fasa pada sumur panas bumi.

2. PEMBAHASAN

2.1 Model Dinamik Aliran Fluida Dua Fase

Model dinamik yang dikaji pada bagian ini merupakan model pengangkutan(*transport*) momentum yang diperoleh dari perubahan tekanan pada aliran fluida dalam sumur bor panas bumi. Perhitungan perubahan tekanan dalam hal ini diasumsikan bahwa aliran homogeny [3, 5]. Dari perubahan tekanan ini dapat diperoleh persamaan gradien tekanan yang biasanya digunakan untuk setiap fluida yang mengalir pada sudut kemiringan pipa tertentu. Persamaan gradien ini dinyatakan dalam tiga komponen, yaitu adanya perubahan energi potensial, gesekan pada dinding pipa, dan perubahan energi kinetik, seperti dibawah ini

$$\left(\frac{dP}{dz}\right)_{total} = \left(\frac{dP}{dz}\right)_g + \left(\frac{dP}{dz}\right)_f + \left(\frac{dP}{dz}\right)_a \quad (2.1)$$

Pada sumur yang berbentuk vertikal atau mendekati-vertikal, perubahan energi potensial didefinisikan sebagai berikut.

$$\left(\frac{dp}{dz}\right)_g = \rho g \sin\alpha \quad (2.2)$$

Dalam kasus aliran dua fasa, densitas (massa jenis) pada aliran berupa campuran dan juga sumur berbentuk vertikal $(\sin\alpha = 1)$, maka Persamaan (2.2) dapat ditulis menjadi.

$$\left(\frac{dp}{dz}\right)_g = \rho_m g, \quad (2.3)$$

dengan,

g: percepatan grafitasi bumi (m/s^2)

$\rho_m = \rho_g f_g + \rho_L(1 - f_g)$,

ρ_m: densitas campuran (kg/m^3),

ρ_g: densitas gas (kg/m^3),

ρ_L: densitas liquid (cairan) (kg/m^3),

f_g: fraksi volume uap *in-situ* (tak berdimensi).

Perubahan tekanan (*pressure drop*) karena adanya gesekan (friksi) pada dinding pipa/sumur secara umum didefinisikan oleh

$$\left(\frac{dp}{dz}\right)_f = \frac{\rho f v^2}{2d} \quad (2.4)$$

dengan,

ρ : densitas (massa jenis) uap/cairan (kg/m^3),

f: faktor gesek Moody (tak berdimensi),

v: kecepatan uap/cairan (m/s^2),

d: diameter tabung (m).

untuk massa jenis, faktor gesek, dan kecepatan pada aliran dua fasa berupa campuran, Persamaan (2.4) dapat ditulis menjadi,

$$\left(\frac{dp}{dz}\right)_f = \frac{\rho_m f_m {v_m}^2}{2d} \quad (2.5)$$

Selanjutnya, perubahan tekanan yang dikarenakan adanya percepatan pada aliran fluida dua fasa dapat ditulis seperti di bawah ini

$$\left(\frac{dp}{dz}\right)_a = \rho_m v_m \frac{dv_m}{dz} \quad (2.6)$$

Penurunan tekanan total merupakan penjumlahan dari penurunan tekanan gesekan dan penurunan tekanan gravitasi serta penurunan tekanan percepatan, sehingga diperoleh persamaan gradien tekanan total sebagai berikut.

$$-\frac{dp}{dz} = \rho_m g + \frac{\rho_m f_m {v_m}^2}{2d} + \rho_m v_m \frac{dv_m}{dz} \quad (2.7)$$

dengan,

p: tekanan (Pa),

z: kedalaman sumur (m).

Gradien tekanan pada arah tegak adalah negatif artinya tekanan berkurang selama ke atas. Selanjutnya definisikan $k = \frac{dv_m}{dz}$, sehingga dapat diperoleh model sistem dinamik darialiran fluida yang merupakan sistem persamaan differensial non linear seperti di bawah ini

$$-\frac{dp}{dz} = \rho_m g + \frac{\rho_m f_m {v_m}^2}{2d} + \rho_m v_m k,$$
$$\frac{dv_m}{dz} = k. \quad (2.8)$$

2.2 Titik Kesetimbangan Model

Pada bagian ini akan diselidiki kestabilan lokal [6] dari system dinamik aliran fluida (2.8) disekitar titik kesetimbangan. Dalam hali ni, misalkan (p^*, v_m^*) merupakan titik kesetimbangan dari sistem dinamik (2.8). Titik kesetimbangan diperoleh jika sudah tidak terjadi lagi perubahan [7] tekanan maupun kecepatan, hal ini berarti memenuhi $\frac{dp}{dz} = 0$ dan $\frac{dv_m}{dz} = 0$, sehingga Persamaan (2.8) pada titik (p^*, v_m^*) menjadi

$$-\frac{dp}{dz} = \rho_m g + \frac{\rho_m f_m {v^*_m}^2}{2d} + \rho_m v^*_m k = 0$$
$$\frac{dv_m}{dz} = k = 0 \quad (2.9)$$

Dari Persamaan (2.9) diperoleh titik kesetimbangan, dengan $k = 0$, sehingga memenuhi

$$\rho_m g + \frac{\rho_m f_m {v^*_m}^2}{2d} + \rho_m v^*_m k = 0$$
$$\rho_m g + \frac{\rho_m f_m {v^*_m}^2}{2d} + 0 = 0$$

$$\frac{\rho_m f_m v^*{}_m{}^2}{2d} = -\rho_m g$$

karena arah arus ke atas, yang berarti berlawanan dengan grafitasi bumi, sehingga percepatan vertikal adalah $-g$ dan dapat diperoleh

$$\frac{\rho_m f_m v^*{}_m{}^2}{2d} = -\rho_m(-g)$$

$$\frac{\rho_m f_m v^*{}_m{}^2}{2d} = \rho_m g$$

$$v_m^{*2} = \frac{\rho_m g 2d}{\rho_m f_m}$$

$$v_m^* = \pm\sqrt{\frac{2gd}{f_m}} \qquad (2.10)$$

Dari Persamaan (2.10), diperoleh dua titik kesetimbangan (p^*, v_m^*) yaitu $\left(0, \sqrt{\frac{2gd}{f_m}}\right)$ dan $\left(0, -\sqrt{\frac{2gd}{f_m}}\right)$.

Selanjutnya akan dianalisa perilaku dinamik dari Persamaan non linear (2.8) di sekitar titik kesetimbangan $\left(0, \sqrt{\frac{2gd}{f_m}}\right)$ dan $\left(0, -\sqrt{\frac{2gd}{f_m}}\right)$. Untuk keperluan ini, sistem dinamik non linear tersebut, terlebih dahulud ilinearkan di titik kesetimbangan tersebut dengan menggunakan deret Taylor.

Definisikan ,

$$\frac{dp}{dz} = f_1(p, v_m) = \rho_m g + \frac{\rho_m f_m v_m{}^2}{2d} + \rho_m v_m k$$

$$\frac{dv_m}{dz} = f_2(p, v_m) = k$$

2.3 Analisis Kestabilan

Pelinearan dari system dinamik non linear pada Persamaan (2.8) dengan menggunakan deret Taylor pada titik kesetimbangan (p^*, v_m^*) adalah

$$f_1(p, v_m) = f_1(p^*, v_m^*) + \frac{\partial f_1}{\partial p}(p^*, v_m^*)(p - p^*) + \frac{\partial f_1}{\partial v_m}(p^*, v_m^*)(v_m - v_m^*)$$

$$f_2(p, v_m) = f_2(p^*, v_m^*) + \frac{\partial f_2}{\partial p}(p^*, v_m^*)(p - p^*) + \frac{\partial f_2}{\partial v_m}(p^*, v_m^*)(v_m - v_m^*)$$

Perlu diperhatikan bahwa titik (p^*, v_m^*) merupakan titik kesetimbangan dari Persamaan (2.8), sehingga memenuhi

$$f_1(p^*, v_m^*) = 0$$

$$f_2(p^*, v_m^*) = 0$$

Selanjutnya dapat diperoleh

$$f_1(p, v_m) = \frac{\partial f_1}{\partial p}(p^*, v_m^*)(p - p^*) + \frac{\partial f_1}{\partial v_m}(p^*, v_m^*)(v_m - v_m^*)$$

$$f_2(p, v_m) = \frac{\partial f_2}{\partial p}(p^*, v_m^*)(p - p^*) + \frac{\partial f_2}{\partial v_m}(p^*, v_m^*)(v_m - v_m^*)$$

(2.11)

Dengan demikian linierisasi dari Persamaan (2.11) adalah

$$\frac{dp}{dz} = \frac{\partial f_1}{\partial p}(p^*, v_m^*)(p - p^*) + \frac{\partial f_1}{\partial v_m}(p^*, v_m^*)(v_m - v_m^*)$$

$$\frac{dv_m}{dz} = \frac{\partial f_2}{\partial p}(p^*, v_m^*)(p - p^*) + \frac{\partial f_2}{\partial v_m}(p^*, v_m^*)(v_m - v_m^*)$$

Kemudian persamaan (2.11) dapat ditulis menjadi

$$f_1(p^*, v_m^*) = \rho_m g + \frac{\rho_m f_m v_m^{*2}}{2d} + \rho_m v_m^* k = 0$$

$$f_2(p^*, v_m^*) = k = 0 \qquad (2.12)$$

Perhatikan turunan parsial dari persamaan (2.12) sebagai berikut

$$\frac{\partial f_1}{\partial p}(p^*, v_m^*) = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial v_m}(p^*, v_m^*) = \frac{2\rho_m f_m v_m^*}{2d} + \rho_m k = \frac{\rho_m f_m v_m^*}{d} + \rho_m k$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial p}(p^*, v_m^*) = 0 \qquad (2.13)$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (2.13) ke Persamaan (2.11) maka diperoleh

$$\frac{dp}{dz} = \left(\frac{\rho_m f_m v_m^*}{d} + \rho_m k\right)(v_m - v_m^*)$$

$$\frac{dv_m}{dz} = 0$$

Dari linierisasi di atas, diperoleh matriks Jacobian pada titik kesetimbangan (p^*, v_m^*) yaitu

$$J(p^*, v_m^*) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\rho_m f_m v_m^*}{d} + \rho_m k \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian akan dilanjutkan analisa kestabilan dari sistem nonlinear disekitar titik kesetimbangan $\left(0, \sqrt{\frac{2gd}{f_m}}\right)$, dapat diperoleh persamaan terlinearisasi dalam bentuk persamaan matriks seperti di bawah ini

$$\begin{bmatrix} \frac{dp}{dz} \\ \frac{dv_m}{dz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \rho_m\left(\frac{f_m\sqrt{\frac{2gd}{f_m}}}{d} + k\right) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ v_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\rho_m\left(2g + k\sqrt{\frac{2gd}{f_m}}\right) \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (2.15)$$

Sehingga matriks Jacobian untuk Sistem

(2.15) adalah sebagai berikut

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \rho_m \left(\frac{f_m \sqrt{\frac{2gd}{f_m}}}{d} + k \right) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Persamaan karakteristik dapat dicari dengan det $A - \lambda I = 0$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \rho_m \left(\frac{f_m \sqrt{\frac{2gd}{f_m}}}{d} + k \right) \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\lambda^2 = 0$, nilai eigennya adalah $\lambda = 0$.

Dari hasil tersebut berarti diperoleh bahwa semua bagian real nilai eigen dari matriks Jacobian adalah nol, ini mengindikasikan bahwa sistem dinamik di sekitar titik kesetimbangan $\left(0, \sqrt{\frac{2gd}{f_m}}\right)$ adalah stabil. Sedangkan untuk titik kesetimbangan $\left(0, -\sqrt{\frac{2gd}{f_m}}\right)$, dapat diperoleh persamaan terlinearisasi dalam bentuk persamaan matriks sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} \frac{dp}{dz} \\ \frac{dv_m}{dz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \rho_m \left(\frac{-f_m \sqrt{\frac{2gd}{f_m}}}{d} + k \right) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ v_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\rho_m \left(2g - k\sqrt{\frac{2gd}{f_m}} \right) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Sehingga matriks Jacobian untuk sistem (2.16) adalahsebagai berikut

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \rho_m \left(\frac{-f_m \sqrt{\frac{2gd}{f_m}}}{d} + k \right) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Persamaan karakteristik dapat dicari dengan det $A - \lambda I = 0$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \rho_m \left(\frac{-f_m \sqrt{\frac{2gd}{f_m}}}{d} + k \right) \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\lambda^2 = 0$

Nilai eigen pada titik kesetimbangan kedua $\left(0, -\sqrt{\frac{2gd}{f_m}}\right)$ ini adalah $\lambda = 0$. Dari hasil ini, diperoleh bahwa semua bagian real nilai eigen dari matriks Jacobian adalah nol, hal ini mengindikasikan bahwa system dinamik di sekitar titik kesetimbangan $\left(0, -\sqrt{\frac{2gd}{f_m}}\right)$ adalah stabil.

3 PENUTUP

Dari hasil pembahasan tentang model dinamik aliran fluida dua fase pada sumur panas bumi yang berbentuk persamaan diferensial orde satu non linear, diperoleh dua titik kesetimbangan. Analisis kestabilan lokal dikaji di sekitar titik kesetimbangan melalui model terlinearisasi yang mana pelinearan dilakukan dengan menggunakan deret Taylor. Selanjutnya dari model linear ini diperoleh matriks Jacobian berordo dua dan didapat dua akar kembar dari persamaan karakteristik yang merupakan nilai eigen. Nilai eigen ini samadengan nol. Dari sini mengindikasikan bahwa perilaku dinamik di sekitar masing-masing dua titik kesetimbangan adalah stabil.

4 UCAPAN TERIMA KASIH

Paper ini merupakan bagian dari hasil penelitian Penulis berdasarkan surat perjanjian kontrak penelitian No. 1552A/UN7.3.8/PL/2013 tanggal 13 Mei 2013. Terima kasih kami sampaikan kepada Dekan FMIPA Universitas Diponegoro yang telah mendukung penelitian ini.

5 DAFTAR PUSTAKA

[1] Direktorat Inventarisasi Sumber Daya Mineral, (2004), Buku Potensi Panas Bumi di Indonesia.

[2] De Zeeuw, J.Q., (2012), *Modeling Two-Phase Fluid and Heat Flow in Geothermal Wells*, thesis, Department of Applied Earth Sciences, Delft University of Technology, Netherlands.

[3] Hasan, A.R. dan Kabir, C.S., (2010), Modeling Two-Phase Fluid And Heat Flows In Geothermal Wells, *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 71:77-86.

[4] Acuña., J.A and Arcedera, B.A., (2006), Two-phase flow behavior and spinner data analysis in geothermal wells, *Proceedings Thirtieth Workshop on Geothermal Reservoir Engineering Stanford University*, Stanford, California.

[5] Hasan, A.R., Kabir, C.S., (2010), Simplified two-phase flow modeling in wellbores, *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 72:42-49.

[6] Alligood, K.T, Sauer, T.D, & Yorke, J.A., (1993), *Chaos an Introduction to Dynamical Systems*, Springer.

[7] Widowati dan Sutimin, (2013), P*emodelan Matematika: Analisis dan Aplikasinya*, penerbit UNDP Press Semarang.