

PROGRAM PECAHAN LINEAR

Erlin Dwi Endarwati¹, Siti Khabibah², Farikhin³
^{1,2,3}Jurusan Matematika FSM Universitas Diponegoro
 Jl. Prof. H. Soedarto, S.H. Semarang 50275
¹erlin_endarwati@yahoo.co.id, ²khabibah_ku@yahoo.co.id

Abstract. Linear Fractional Programming (LFP) problem is general form of Linear Programming (LP) problem. LFP problem arise when there is requirement to optimize the efficiency of some activity. The efficiency related to the most productive way to use the scarce resources. Many method have been published to solve LFP problem. In this final project explained two methods, Charnes-Cooper's method and Hasan-Acharjee's method. The both method use a transformation to change LFP problem become LP problem, then solved by simplex method. Finally, it is concluded that there is comparison that the Charnes-Cooper's method can be applied in all of LFP form which the set of feasible solutions is non-empty and bounded, but the formed LP becoming more complex than Hasan-Acharjee's method. Hasan-Acharjee's method cannot be used when the constant of denominator in objective function is zero.

Keywords: LFP, LP, Charnes-Cooper, Hasan-Acharjee, simplex method.

1. PENDAHULUAN

Efisiensi merupakan suatu ukuran yang menunjukkan seberapa jauh sebuah unit sumber daya dapat memanfaatkan sumber-sumber terbatas yang dimiliki (*input*) terhadap hasil (*output*) yang akan diperoleh [5]. Dalam hubungannya dengan organisasi industri, pengetahuan tentang efisiensi ini sangat dibutuhkan. Pada tahun 1960, Bela Martos merumuskan sebuah permasalahan yang disebut Program Pecahan Linear (*Linear Fractional Programming*). Permasalahan Program Pecahan Linear (LFP) muncul ketika ada suatu kebutuhan untuk mengoptimalkan efisiensi dari beberapa aktifitas. Pada tahun-tahun berikutnya beberapa metode dikemukakan untuk menyelesaikan permasalahan LFP ini seperti metode Charnes-Cooper (1962), metode Swarup (1964), metode Harvey M. Wagner-John S. C. Yuan (1968), metode Birtran-Novae (1972), serta metode Hasan-Acharjee (2011)[2]. Pada tulisan ini dibahas dua metode yaitu metode Charnes-Cooper dan metode Hasan-Acharjee. Kedua metode ini menggunakan suatu transformasi untuk mengubah bentuk permasalahan LFP menjadi permasalahan Program Linear (*Linear Programming*) yang kemudian penyelesaiannya dilakukan dengan metode simpleks. Selanjutnya untuk memahami

konsep dasar pada artikel ini digunakan pustaka [3,4,5,6]

2. HASIL DAN PEMBAHASAN

Permasalahan Program Pecahan Linear (LFP) merupakan permasalahan yang fungsi tujuannya berupa perbandingan dua fungsi linear. Program Pecahan Linear (LFP) yang secara umum dirumuskan sebagai berikut.

Diberikan fungsi tujuan

Memaksimalkan / Meminimalkan

$$z = \frac{c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n}{d_1x_1 + d_2x_2 + \dots + d_nx_n} \quad (2.1)$$

dengan kendala :

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

$$0 \leq x_1, x_2, \dots, x_n \quad (2.3)$$

dengan $b_i \geq 0$. Diasumsikan bahwa

$$d_j \neq 0, \quad \text{untuk setiap } j \quad (2.4)$$

$x_j \geq 0$, dengan x_j merupakan sebuah himpunan dari solusi fisibel yang didefinisikan oleh kendala (2.2) – (2.3) dan semua kendala pada sistem (2.2) adalah bebas linear. Tanpa mengurangi keumuman dapat diasumsikan bahwa

$$d_j > 0, \quad (2.4)$$

Definisi 2.1 [7] Vektor $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ disebut *solusi fisibel* dari permasalahan

LFP (2.1) jika vektor memenuhi kendala (2.2) dan (2.3).

Definisi 2.2 [7] Vektor $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ merupakan solusi optimal dari permasalahan maksimal (atau minimal) LFP (2.1) – (2.3), jika vektor merupakan solusi fisibel dari permasalahan maksimalisasi (minimalisasi) LFP (1) – (3), dan menghasilkan nilai maksimal (minimal) dari fungsi tujuan $Z(x)$ menurut himpunan fisibel F .

Definisi 2.3 [7] Permasalahan maksimalisasi (minimalisasi) dari LFP dikatakan dapat diselesaikan, jika himpunan fisibel F -nya tidak kosong, yaitu $F \neq \emptyset$, dan fungsi tujuan $Z(x)$ mempunyai batas atas (batas bawah) yang hingga pada $+\infty$ ($-\infty$).

Hubungan Program Pecahan Linear (LFP) dengan Program Linear (LP)

Pada permasalahan LFP (2.1) – (2.3), jika untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n$, dengan $a_{ij} = 1, 2, \dots, m$, dan $b_i = 1$, bentuk permasalahan LFP tersebut berubah menjadi bentuk permasalahan LP. Ini merupakan alasan mengapa permasalahan LFP (2.1) – (2.3) disebut bentuk umum dari permasalahan LP: Diberikan fungsi tujuan

Memaksimalkan/Meminimalkan
 $Z(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$, (2.5)
 dengan kendala

$$\left. \begin{aligned} x_i &= 1, 2, \dots, n \\ a_{ij}x_j &= b_i + 1, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ x_j &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

$$0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (2.7)$$

Ada beberapa kasus khusus ketika bentuk permasalahan LFP asli diubah ke dalam bentuk permasalahan LP, yaitu:

1. Jika $b_i = 0$, untuk setiap $i = 1, 2, \dots, m$, maka fungsi tujuan $Z(x)$ menjadi bentuk linear :

$$Z(x) = c_1x_1 - c_2x_2 + \dots - c_nx_n = \frac{Z(x)}{1},$$

dalam kasus ini, maksimalisasi (minimalisasi) disubstitusi dengan fungsi linear $\frac{Z(x)}{1}$ pada himpunan fisibel yang sama.

2. Jika $a_{ij} = 0$, untuk setiap $i = 1, 2, \dots, m$, maka fungsi tujuan

$$Z(x) = \frac{Z(x)}{1} = \frac{Z(x)}{1}$$

dapat diubah dengan fungsi $Z(x)$. Pada kasus ini, maksimalisasi (minimalisasi) disubstitusi dari fungsi tujuan baru yaitu $Z(x)$ pada himpunan fisibel yang sama.

3. Jika vektor $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ dan $a_{ij} = (a_{ij}, \dots, a_{ij})$ bergantung linear, terdapat 0 sedemikian sehingga $a_{ij} = 0$, maka fungsi tujuannya menjadi

$$Z(x) = \frac{Z(x)}{1} = \frac{Z(x)}{1} = \frac{Z(x)}{1} + \frac{Z(x)}{1}. \quad (2.8)$$

Hal ini berarti bahwa fungsi tujuan $Z(x)$ dapat dinyatakan dalam fungsi dari $Z(x)$. Maksimalisasi (minimalisasi) fungsi tujuan awal diganti dengan

- Untuk kasus maksimal ada dua cara yaitu dengan memaksimalkan $Z(x)$ jika $a_{ij} - b_i < 0$ atau meminimalkan $Z(x)$ jika $a_{ij} - b_i > 0$.
- Untuk kasus minimal ada dua cara yaitu dengan meminimalkan $Z(x)$ jika $a_{ij} - b_i < 0$ atau memaksimalkan $Z(x)$ jika $a_{ij} - b_i > 0$.

Dalam kasus ini, untuk $a_{ij} - b_i = 0$ didapat $Z(x) = (5)$ yang berarti bahwa $Z(x) = \text{konstan}$.

Metode Charnes-Cooper

Pada tahun 1962, Abraham Charnes dan William Wager Cooper (6) memperlihatkan bahwa semua permasalahan LFP yang himpunan dari solusi fisibelnya yaitu tidak kosong dan terbatas dapat diubah ke dalam bentuk LP. Dari bentuk LFP (2.1) – (2.3), diperkenalkan variabel baru yaitu

$$x_j = \frac{x_j}{t} \quad \text{dan} \quad t = \frac{1}{t}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

dengan

$$Z(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n. \quad (2.9)$$

Menggunakan variabel baru t , dengan $t = 1, 2, \dots, m$, fungsi tujuan (2.1) dapat ditulis sebagai berikut.

Memaksimalkan/Meminimalkan

$$Z(x, t) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n, \quad (2.10)$$

karena $() > 0$ untuk setiap i , maka kendala (2.2) – (2.3) dapat dikalikan dengan $\frac{1}{()}$, menjadi

$$\left. \begin{aligned} & , = 1, 2, \dots, \\ & , = + 1, + \\ 2, \dots, & \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

$$2, \dots, , \quad 0 = 1, 2, \dots, . \quad (2.12)$$

Hubungan antara variabel awal dengan variabel baru akan lengkap jika persamaan (9) juga dikalikan dengan $\frac{1}{()}$, yaitu

$$+ = 1, \quad (2.13)$$

yang kemudian menambahkannya sebagai kendala dari permasalahan LP yang baru dibentuk, kemudian dengan menyelesaikan permasalahan LP (2.10) – (2.13) menggunakan metode simpleks yang sesuai, kemudian menggunakan substitusi

$$= -, = 1, 2, \dots, , \quad (2.14)$$

akan diperoleh solusi optimal untuk permasalahan LFP (2.1) – (2.3).

Lemma 2.4 [7] *Jika $(,)$ merupakan solusi fisibel untuk permasalahan (2.10) – (2.13) dengan $= 1, 2, \dots$, maka > 0 .*

Bukti :

Diketahui $(,)$ merupakan solusi fisibel untuk permasalahan (2.10) – (2.13), diambil sebarang dengan adalah solusi fisibel untuk permasalahan (2.1) – (2.3), $= 1, 2, \dots$. Andaikan $= 0$ maka bentuk (11) – (12) menjadi

$$\left. \begin{aligned} & 0, = 1, 2, \dots, \\ & 0, = + 1, + \\ 2, \dots, & \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

$$0, = 1, 2, \dots, , \quad (2.16)$$

dengan mengalikan setiap kendala- pada (2.15) dengan sebarang bilangan positif dan menambahkannya ke dalam kendala- pada (2.2) serta mengalikan setiap kendala batas- pada (2.16) dengan sebarang bilangan positif dan menambahkannya ke dalam kendala batas- pada (2.3), diperoleh

$$(+) , = 1, 2, \dots,$$

$$(+) , = + 1, + 2, \dots,$$

$$(+) = , = +$$

$$1, + 2, \dots, ,$$

$$(+) 0, = 1, 2, \dots, .$$

Hal ini berarti $(+)$ merupakan solusi fisibel untuk permasalahan (2.1) – (2.3) untuk setiap > 0 , yang berarti himpunan fisibel tidak terbatas. Muncul kontradiksi dengan asumsi awal bahwa himpunan fisibel terbatas. Jadi, pengandaian salah. Karena 0 dan 0 , pastilah > 0 .

Lemma 2.5 [7] *Jika merupakan solusi fisibel untuk permasalahan (2.1) – (2.3), dan didefinisikan*

$$= \text{—————} \text{ dan } = \text{—————},$$

maka $(,)$ merupakan solusi fisibel untuk permasalahan (2.10) – (2.13), dengan $= 1, 2, \dots$.

Bukti:

Diketahui merupakan solusi fisibel untuk permasalahan (2.1) – (2.3), karena $+ > 0$ maka 0 dan > 0 untuk setiap i , dengan $= 1, 2, \dots$. Di sisi lain, jika kendala pada (1) – (3) dibagi dengan $+ ,$ akan diperoleh

$$= 1, 2, \dots,$$

$$= + 1, +$$

$$2, \dots,$$

$$= = + 1, +$$

$$2, \dots, ,$$

$$0, = 1, 2, \dots, ,$$

selanjutnya,

$$+ = \text{—————} +$$

$$\text{—————} = 1.$$

Jadi, $(,)$ merupakan solusi fisibel untuk permasalahan (2.10) – (2.13), dengan $= 1, 2, \dots$.

Teorema 2.6 [7] *Diketahui (2.1) dan (2.10) dapat diselesaikan. Jika adalah solusi optimal dari (2.1), maka $(\text{—————}, \text{—————})$ merupakan solusi optimal untuk (2.10). Begitu juga sebaliknya, jika $(,)$ adalah solusi optimal*

dari (10), maka $x = -$ merupakan solusi optimal dari (2.1), dengan $i = 1, 2, \dots, n$.

Bukti:

Diketahui (2.1) dan (2.10) dapat diselesaikan dan x solusi optimal dari (2.1).

Diberikan pasangan x, y yang merupakan solusi fisibel untuk permasalahan (2.10) – (2.13), maka $x > 0$ dan $x = -$ merupakan solusi fisibel untuk permasalahan (2.1) – (2.3), dengan $i = 1, 2, \dots, n$.

Kasus I. Untuk masalah maksimal.

Pada kasus maksimal, x, y untuk setiap i yang memenuhi kendala (2.2) – (2.3). Untuk i yang memenuhi kendala (2.2) – (2.3), maka

$$(x, y) = \left(\frac{b_i}{a_{ij}}, \frac{b_i}{a_{ij}} \right)$$

memenuhi kendala (2.11) – (2.13),

selanjutnya

$$(x, y) = \left(\frac{b_i}{a_{ij}}, \frac{b_i}{a_{ij}} \right) +$$

$$= \frac{b_i}{a_{ij}}$$

$$= \frac{b_i}{a_{ij}}$$

$$= \frac{b_i}{a_{ij}}$$

$$= \frac{b_i}{a_{ij}}$$

$$= \frac{b_i}{a_{ij}} + \frac{b_i}{a_{ij}} = (x, y)$$

diperoleh $(x, y) = (x, y)$, sehingga (x, y) adalah solusi optimal dari (2.10), dengan $i = 1, 2, \dots, n$. Kemudian misalkan (x, y)

adalah solusi optimal dari (2.10), untuk i yang memenuhi kendala (2.2) – (2.3) maka

$$(x, y) = \left(\frac{b_i}{a_{ij}}, \frac{b_i}{a_{ij}} \right)$$

$$= \frac{b_i}{a_{ij}}$$

$$= \frac{b_i}{a_{ij}}$$

$$= \frac{b_i}{a_{ij}}$$

$$= \frac{b_i}{a_{ij}}$$

$$= \frac{b_i}{a_{ij}} = (x, y)$$

diperoleh $(x, y) = (x, y) = (x, y) = (x, y)$. Jadi, (x, y) merupakan solusi optimal dari

(1), dengan $i = 1, 2, \dots, n$.

Kasus II. Untuk masalah minimal.

Pada kasus minimal, x, y untuk setiap i yang memenuhi kendala (2.2) – (2.3). Untuk i yang memenuhi kendala (2.2) – (2.3), maka

$$(x, y) = \left(\frac{b_i}{a_{ij}}, \frac{b_i}{a_{ij}} \right)$$

memenuhi kendala (2.11) – (2.13), dengan $i = 1, 2, \dots, n$. Selanjutnya, proses

pembuktian analog pada kasus maksimal, sehingga akan diperoleh $(x, y) = (x, y)$

$(x, y) = (x, y)$. Jadi, (x, y) merupakan solusi optimal dari (2.1), dengan $i = 1, 2, \dots, n$.

Metode Hasan-Acharjee

Pada tahun 2011, Mohammad Babul Hasan dan Sumi Acharjee memperkenalkan suatu metode baru untuk menyelesaikan LFP dengan cara mengubah LFP ke bentuk LP tetapi dengan transformasi yang berbeda dengan Charnes-Cooper. Pada metode ini diasumsikan bahwa himpunan solusi fisibel tidak kosong dan terbatas, serta 0 . Pada metode ini digunakan dua transformasi yaitu transformasi pada fungsi tujuan dan transformasi pada kendala.

a. Transformasi pada fungsi tujuan

Untuk transformasi pada fungsi tujuan, pembilang dan penyebut pada (2.1) dikalikan dengan z , menjadi

$$(z, x, y) = \left(\frac{z}{z}, \frac{z}{z}, \frac{z}{z} \right)$$

$$= \frac{z}{z} \left(\frac{z}{z}, \frac{z}{z}, \frac{z}{z} \right)$$

$$= \left(\frac{z}{z}, \frac{z}{z}, \frac{z}{z} \right) + \left(\frac{z}{z}, \frac{z}{z}, \frac{z}{z} \right)$$

$$= \left(\frac{z}{z}, \frac{z}{z}, \frac{z}{z} \right) +$$

$$\text{dengan } \left(\frac{z}{z}, \frac{z}{z}, \frac{z}{z} \right) = \left(\frac{z}{z}, \frac{z}{z}, \frac{z}{z} \right), \text{ dan } \left(\frac{z}{z}, \frac{z}{z}, \frac{z}{z} \right) = \left(\frac{z}{z}, \frac{z}{z}, \frac{z}{z} \right)$$

dilakukan transformasi, fungsi tujuan berubah menjadi

$$(z, x, y) = \left(\frac{z}{z}, \frac{z}{z}, \frac{z}{z} \right) + \left(\frac{z}{z}, \frac{z}{z}, \frac{z}{z} \right)$$

b. Transformasi pada kendala

Untuk transformasi pada kendala, bentuk (2.2) – (2.3) diubah seperti berikut ini

Kasus I. Untuk kendala berbentuk kurang dari sama dengan (x, y) .

$$\begin{array}{r}
 \phantom{} \\
 \hline
 \phantom{} \\
 \hline
 \phantom{} \\
 \hline
 0 \phantom{}
 \end{array}$$

dengan $ \phantom{} $, $ \phantom{} $, $ \phantom{} $, $ \phantom{} $, dan $ \phantom{} $.

Proses transformasi untuk **kasus II** dan **kasus III** yaitu untuk kendala berbentuk lebih dari sama dengan (\geq) dan sama dengan ($=$) analog pada **kasus I**. Jadi setelah dilakukan transformasi, bentuk kendala berubah menjadi

$$\begin{array}{l}
 \phantom{} \\
 \phantom{} \\
 2, \dots, \\
 \phantom{} \\
 0, \phantom{}
 \end{array}$$

dengan menggunakan penyelesaian metode simpleks, dapat diperoleh nilai dari variabel $ \phantom{} $. Untuk memperoleh nilai variabel $ \phantom{} $ yang merupakan solusi optimal untuk masalah LFP (2.1) – (2.3) digunakan:

$$= \frac{ \phantom{} }{1 - \phantom{} }$$

3. PENUTUP

Permasalahan Program Pecahan Linear (LFP) merupakan bentuk umum dari permasalahan Program Linear (LP). Pada tahun 1962, Charnes dan Cooper memperlihatkan bahwa setiap permasalahan LFP yang himpunan dari solusi fisibelnya

tak kosong dan terbatas dapat diubah ke bentuk permasalahan LP. Namun, transformasi ini menyebabkan bertambahnya jumlah kendala dan variabel, sehingga lebih rumit dalam perhitungan simpleksnya. Kemudian pada tahun 2011, Hasan dan Acharjee memperkenalkan sebuah transformasi untuk mengubah permasalahan LFP menjadi LP. Transformasi yang digunakan lebih rumit dibandingkan dengan transformasi Charnes-Cooper, tetapi tidak menyebabkan bertambahnya kendala maupun variabel, sehingga perhitungan simpleksnya lebih mudah. Namun, hanya permasalahan LFP yang konstanta dalam penyebutnya tak nol yang dapat menggunakan transformasi Hasan-Acharjee.

4. DAFTAR PUSTAKA

[1] Marzhi, Ezio, (2006), Some remarks about the transformation of Charnes and Cooper. *Instituto de Matematica Aplicada San Luis, CONICET-UNSL, Argentina.*

[2] Hasan, M.B. dan Sumi A., (2011), Solving LFP by Converting it into a Single LP. *International Journal of Operation Research*, 8(3) : 1-14.

[3] Irawanto, B dan Bayu S. dan Sarwadi, (2004), *Program Linear*. Semarang: Universitas Diponegoro.

[4] Kolman, B dan Robert E.B., (1995), *Elementary Linear Programming with Application*. United States: Academic Press.

[5] Puryani dan Agus R., (2012), *Penelitian Operasional*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

[6] R.Gunawan S., (2009). *Aljabar Linier Dasar*. Yogyakarta: ANDI.

[7] Bajalinov, E.B., (2003), *Linear-Fractional Programming: Theory, Methods, Applications and Software*. Boston: Kluwer Academic Publisher.