PELABELAN GRACEFUL SISI-GANJIL PADA GRAF *WEB* W(2,n)

Putri Dentya Rizky[1], Lucia Ratnasari[2], Djuwandi[3]
[1,2,3]Jurusan Matematika FSM Universitas Diponegoro
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H. Semarang 50275

Abstract. Let G = (*V(G),E( )*) be a graph with vertex set ( ) and edge set ( ). Assume that graph G have edge. Graceful edge-odd labeling is a bijective map ( ) → {1, 3, 5,…,2 – 1} that resulting map $^+$: ( ) → {0,1,2,…,2 −1} with ( ) = ∑{ ( ) | ( )} (|2 |) such as obtained different edge label. Graph G ia called Graceful edge-odd labeling if there is graceful edge-odd labeling on G. Let and $'$ are two cycle graph with vertex set ( ) = { , ,…, } and $'$ = { , ,…, }. Graph (, 1) is obtained by conected every vertex from to $'$ such as we have edge , ,…, . Graph Web W(2,n) is a graph obtained by adding a pendant edge on each outer cycle vertex from graph (, 1). In this paper we will discussed about Graceful edge-odd labeling on Web (2,) graph and we have that Web W(2,) graph is graceful edge odd graph for n odd.

Keywords : graceful, graceful edge-odd, graceful edge-odd labeling.

1. PENDAHULUAN

Pelabelan graf merupakan kajian menarik yang terus mengalami perkembangan hampir selama lima puluh tahun terakhir. Pada survei [1] yang dilakukan oleh Gallian tercatat lebih dari 1700 artikel mengenai pelabelan graf. Sejak Alex Rosa menemukan pelabelan graf graceful banyak peneliti yang tertarik mengkonstruksi pelabelan graceful dan variasinya. Pada 1991, Gnanajothi memperkenalkan pelabelan graf graceful ganjil. Vaidya melanjutkan penelitian tentang pelabelan graceful dan graceful ganjil pada beberapa graf [2]. Kemudian pada 2009 diperkenalkan pelabelan graceful sisi-ganjil yang berkaitan dengan graf pohon [3]. Pada 2013 diperkenalkan pelabelan graceful sisi-ganjil yang berkaitan dengan graf sikel [4]. Termotivasi dari [4] penulis mengkaji pelabelan graceful sisi ganjil pada graf Web W(2,n). Pada tulisan ini pengertian dan definisi-definisi yang berkaitan dengan graf menggunakan referensi [5]. Graf yang dibahas adalah graf sederhana, berhingga dan tak berarah.

2. PELABELAN *GRACEFUL* SISI GANJIL PADA GRAF GP(n,1)

Sebelum membahas tentang pelabelan graceful sisi ganjil pada graf Web W(2,n) terlebih dahulu dibahas pelabelan graceful sisi ganjil pada graf GP(n,1).

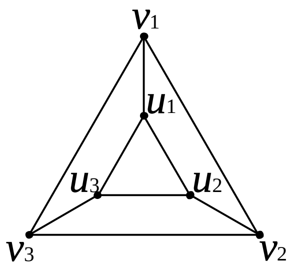
Definisi 2.1 [3] *Sebuah graf dengan titik dan sisi dikatakan memiliki pelabelan graceful sisi-ganjil jika terdapat pemetaan bijektif dari ( ) ke {1,3,5,…,2 −1} sehingga menginduksi pemetaan* $^+$ *dari ( ) ke {0,1,2,…,2 −1} diberikan oleh* ( ) = ∑{ ( ) | ( )} (|2 |) *dan label setiap titiknya berbeda. Graf dikatakan graf graceful sisi ganjil jika terdapat pelabelan graceful sisi-ganjil pada graf .*

Definisi 2.2 [3] *Diberikan dua graf sikel yang sama yaitu dan* $'$ *dengan himpunan titik* ( ) = { , ,…, } *dan*

$' = \{ \;,\; ,\dots,\; \}$. *Graf* $(\;,1)$ *diperoleh dengan menghubungkan setiap titik dari dan ′ sehingga membentuk sisi baru* $\;,\; ,\dots,\;$.

Himpunan titik $(\;,1) = \{ \;,\; | = 1\dots \}$ dan himpunan sisi $(\;,1) = \{ \;,\;,\;,\; \}$. Banyaknya titik $| \;(\;,1) | = 2$ dan banyaknya sisi $| \;(\;,1) | = 3$.

Contoh 2.1
Diberikan graf sikel dengan himpunan titik $(\;) = \{ \;,\;,\; \}$ dan ′ dengan himpunan titik $' = \{ \;,\;,\; \}$ maka diperoleh graf GP(3,1) seperti pada Gambar 2.1 berikut:

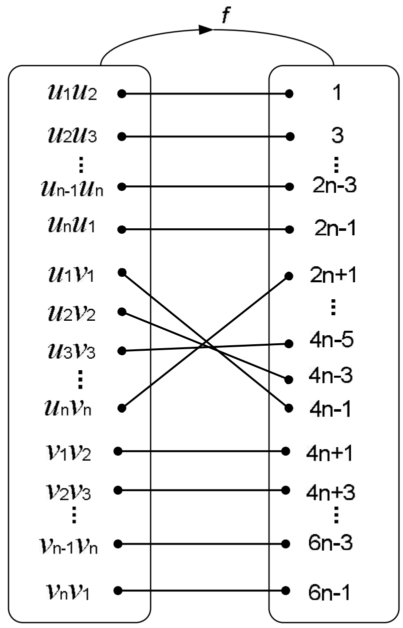


Gambar 2.1 Graf (3,1)

Teorema 2.1 *Graf* $(\;,1)$ *merupakan graf graceful sisi-ganjil.*
Bukti :
Diberikan himpunan titik $(\;(\;,1))$ adalah $\{ \;,\; = 1\dots \}$ dan himpunan sisi $(\;(\;,1)) = \{ \;,\;,\;,\;,\; \}$. Pelabelan graf $(\;,1)$ dilakukan dengan melabeli sisi sikel terdalam $\;,\; ,\dots,\;,$ dengan bilangan ganjil searah jarum jam. Kemudian melabeli sisi-sisi yang menghubungkan titik dan dimulai dari sisi $\;,\; ,\dots,\;,$. Pelabelan dilanjutkan dengan melabeli sisi sikel terluar graf $(\;,1)$ searah jarum jam dimulai dari $\;,\; ,\dots,\;,$.
Didefinisikan pelabelan sisi pada graf $(\;,1)$ sebagai berikut :

$(\;) = 2 \; - 1 \quad ,$
$= 1\dots \; - 1$
$(\;) = 2 \; - 1$
$(\;) = 4 \; - 2 \; + 1 \quad , \; =$
$1\dots \; - 1$
$(\;) = 2 \; + 1$
$(\;) = 4 \; + 2 \; - 1 \quad , \; =$
$1\dots \; - 1$
$(\;) = 6 \; - 1$

Pelabelan sisi merupakan pemetaan bijektif dari $(\;) \to \{1, 3, 5, \dots, 6 \; - 1\}$ seperti ditunjukkan pada Gambar 2.2 berikut.

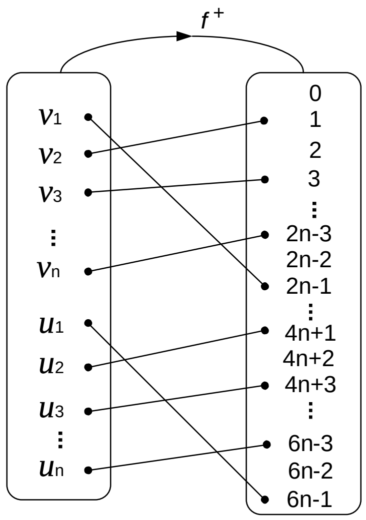


Gambar 2.2 Pemetaan Bijektif pada Graf $(\;,1)$

Pelabelan sisi mengakibatkan pelabelan titik sebagai berikut

$(\;) = (14 \; - 1) \quad |6 \; |$
$(\;) \; =(12 \; + 2 \; - 3) \quad |6 \; |$
$, \; = 2, 3, \dots$
$(\;) = (6 \; - 1) \quad |6 \; |$
$(\;) = (4 \; + 2 \; - 3) \quad |6 \; | ,$
$= 2, 3, \dots$

Pelabelan titik merupakan pemetaan injektif dari $(\;) \to \{1,3,5,\dots,6 \; - 1\}$ seperti ditunjukkan pada Gambar 2.3 berikut



Gambar 2.3 Pemetaan Injektif pada Graf (, 1)

sehingga, himpunan label sisi dari graf (, 1)) adalah

(((, 1)))

={ ( ),

( ), ( ), ( ), ( )}

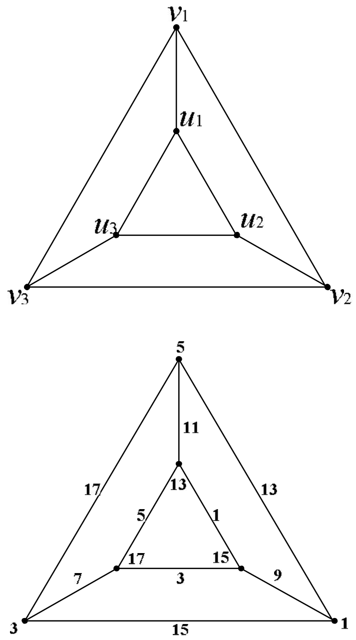
= { 1, 3, 5, … , 6 − 1}

Label titik ( ) : ( ) → {14 − 1, 12 + 1, 12 + 3, … , 14 − 3} dan label titik ( ) : ( ) → {6 − 1, 4 + 1, 4 + 3, … , 6 − 3} dengan hasilnya ganjil. Dengan demikian, himpunan label sisi dan label titik berbeda. Jadi, merupakan *graceful* sisi-ganjil. Graf (, 1) merupakan graf *graceful* sisi-ganjil. ■

Diberikan contoh berikut dengan = 3, untuk memperlihatkan bentuk pola yang terjadi pada pelabelan *graceful* sisi-ganjil pada graf (, 1).

Contoh 2.2

Diberikan graf (3,1) dengan = 3. Diketahui bahwa himpunan titik ((3,1))= { , , , , , } dan himpunan sisi ((3,1)) ={ , , , , , , , }.

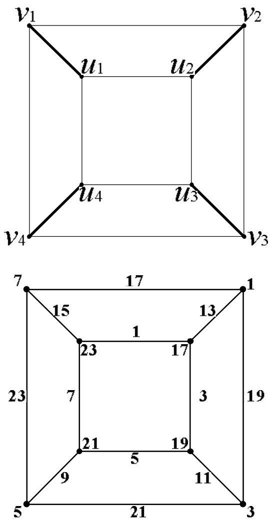


Gambar 2.4 Pelabelan *Graceful* Sisi-Ganjil pada Graf (3,1)

Dari Gambar 2.4 dapat dilihat bahwa pelabelan sisi graf (3,1) merupakan pemetaan bijektif sedangkan untuk pelabelan titik graf (3,1) semuanya berbeda. Jadi, merupakan pelabelan *graceful* sisi-ganjil. Dengan demikian, graf (3,1) merupakan graf *graceful* sisi-ganjil.

Contoh 2.3

Diberikan graf (4,1) dengan = 4. Diketahui bahwa himpunan titik ((4,1))= { , , , , , , , } dan himpunan sisi ((4,1)) ={ , , , , , , , , , , }.



Gambar 2.5 Pelabelan *Graceful* Sisi-Ganjil pada Graf (4,1)

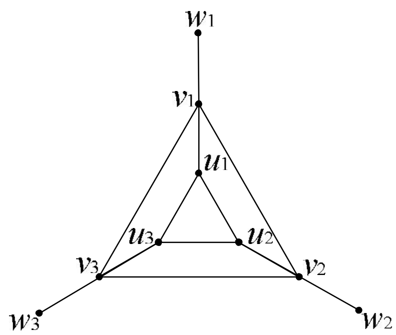
Dari Gambar 2.5 dapat dilihat bahwa pelabelan sisi graf (4,1) merupakan pemetaan bijektif sedangkan untuk pelabelan titik graf (4,1) semuanya berbeda. Jadi, merupakan pelabelan *graceful* sisi-ganjil. Dengan demikian, graf (4,1) merupakan graf *graceful* sisi-ganjil.

3. PELABELAN *GRACEFUL* SISI-GANJIL PADA GRAF *WEB* (,)

Definisi 3.1 [5] *Graf Web (,) merupakan graf yang diperoleh dengan menambahkan sebuah sisi pendant di setiap titik sikel terluar dari graf (, 1).*

Himpunan titik (,) = { , , | = 1 ... } dan himpunan sisi ((,)) = { , , , , , }. Banyaknya titik | (,) | = 3 dan banyaknya sisi | ((,))| = 4 .

Contoh 3.1



Gambar 3.1 Graf *Web* (,)

Teorema 3.1 *Graf (,) merupakan graf graceful sisi-ganjil untuk ganjil.*

Bukti :

Diberikan himpunan titik ((,)) = { , , | = 1 ... } dan himpunan sisi E((,)) = { , , , , , }. Pelabelan graf *Web* (,) dilakukan dengan melabeli sisi sikel terdalam , ,..., , dengan bilangan ganjil searah jarum jam. Kemudian melabeli sisi-sisi yang menghubungkan titik dan berlawanan arah jarum jam dimulai dari sisi , ,..., , . Pelabelan dilanjutkan dengan melabeli sisi sikel terluar graf (, 1) searah jarum jam dimulai dari , ,..., , . Terakhir, melabeli sisi *pendant* searah jarum jam dimulai dari sisi , ,..., , .

Didefinisikan pelabelan sisi pada Graf (,) sebagai berikut :

( ) = 2 − 1 , = 1 ... − 1

( ) = 2 − 1

( ) = 4 − 2 + 1 , = 1 ... − 1

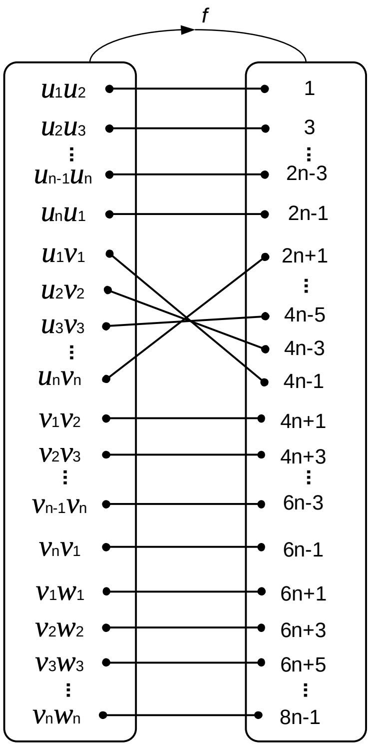
( ) = 2 + 1

( ) = 4 + 2 − 1 , = 1 ... − 1

( ) = 6 − 1

$(\quad) = 6 \quad + 2 \quad - 1$, $=$ $1 \ldots$

Pelabelan sisi merupakan pemetaan bijektif dari $(\ ) \rightarrow \{1,3,5,\ldots,8 \quad - 1\}$ seperti ditunjukkan pada Gambar 3.2



Gambar 3.2 Pemetaan Bijektif pada Graf $(\ ,\ )$

Pelabelan sisi menginduksi pelabelan titik sebagai berikut

$(\quad) = (6 \quad - 1) \qquad |8 \quad|$

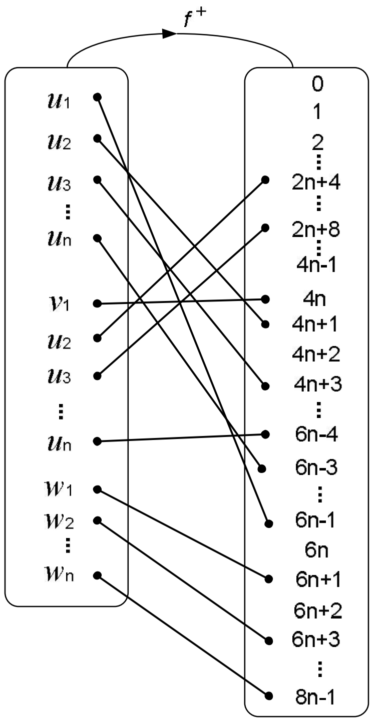
$(\quad) = (4 \quad + 2 \quad - 3) \qquad |8 \quad|$, $= 2, 3, \ldots$

$(\quad) = (20 \quad) \qquad |8 \quad|$

$(\quad) = \quad (18 \quad + 4 \quad - 4) \qquad |8 \quad|$, $= 2, 3, \ldots$

$(\quad) = (6 \quad + 2 \quad - 1) \qquad |8 \quad|$, $= 1, 2, \ldots$

Pelabelan titik merupakan pemetaan injektif dari $(\ ) \rightarrow \{1,3,5,\ldots,8 \quad - 1\}$ seperti ditunjukkan pada Gambar 3.3



Gambar 3.3 Pemetaan Injektif pada Graf $(\ ,\ )$

Sehingga, himpunan label sisi dan himpunan label titik dari graf $(\ ,\ )$ adalah

$(E(\ (\ ,\ ))$ $=$ $\{\ (\quad),\ (\quad),\ (\quad),\ (\quad),\ (\quad),\ (\quad)\}$

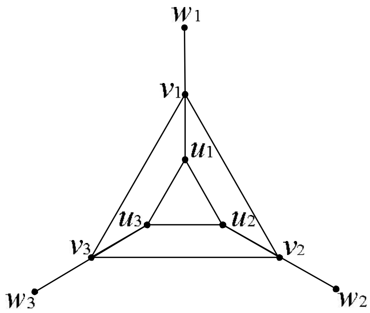
$= \{1, 3, \ldots, 2 \quad - 3, 2 \quad - 1, 4 \quad - 1, 4 \quad - 3, \ldots, 2 \quad + 1, 4 \quad + 1, \ldots, 4 \quad + 3, \ldots, 6 \quad - 3, 6 \quad - 1, 6 \quad + 1, 6 \quad + 3, \ldots, 8 \quad - 3\}$ dengan hasilnya ganjil.

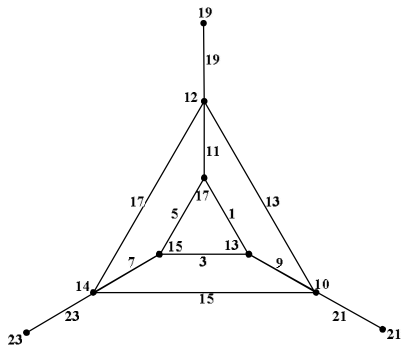
Label titik $(\ ) : (\ ) \rightarrow \{6 \quad - 1, 4 \quad + 1, 4 \quad + 3, \ldots, 6 \quad - 3\}$, dan label titik $(\ ) : (\ ) \rightarrow \{6 \quad + 1, 6 \quad + 3, \ldots, 8 \quad - 1\}$ dengan hasilnya ganjil. Label titik $(\ ) : (\ ) \rightarrow \{4 \ , 2 \quad + 4, 2 \quad + 8, \ldots, 6 \quad - 8, 6 \quad - 4\}$ dengan hasilnya genap. Dengan demikian himpunan label sisi dan label titik berbeda dan himpunan label sisi adalah berbeda. Jadi, f merupakan pelabelan *graceful* sisi-ganjil. Graf $(\ ,\ )$ merupakan graf *graceful* sisi-ganjil untuk ganjil. ■

Diberikan contoh berikut dengan = 3, dan = 5 untuk memperlihatkan bentuk pola yang terjadi pada pelabelan *graceful* sisi-ganjil pada graf graf (,).

Contoh 3.2

Diberikan graf (,) dengan = 3. Diketahui bahwa himpunan titik V((,))= { , , , , , , , , } dan himpunan sisi ((,)) ={ , , , , , , , , ,}.



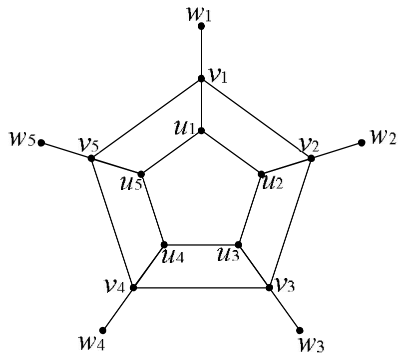


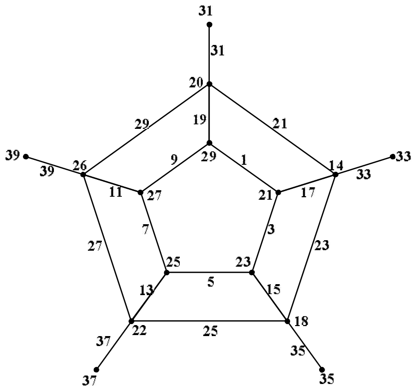
Gambar 3.4 Pelabelan *Graceful* Sisi-Ganjil pada Graf (,)

Dari Gambar 3.4 dapat dilihat bahwa pelabelan sisi graf *Web* (,) merupakan pemetaan bijektif sedangkan untuk pelabelan titik graf *Web* (,) semuanya berbeda. Jadi, merupakan pelabelan *graceful* sisi-ganjil. Dengan demikian, graf *Web* (,) merupakan graf *graceful* sisi-ganjil untuk n ganjil .

Contoh 3.3

Diberikan graf (,) dengan = 5. Diketahui bahwa himpunan titik V((,))= { , , , , , , , , , , , , , , } dan himpunan sisi ((,)) ={ , , , , , , , , , , , , , , }.





Gambar 3.5 Pelabelan *Graceful* Sisi-Ganjil pada Graf (,)

Dari Gambar 3.5 dapat dilihat bahwa pelabelan sisi graf *Web* (,) merupakan pemetaan bijektif sedangkan untuk pelabelan titik graf *Web* (,) semuanya berbeda. Jadi, merupakan pelabelan *graceful* sisi-ganjil. Dengan demikian, graf *Web* (,) merupakan graf *graceful* sisi-ganjil untuk n ganjil.

Berikut diberikan contoh pelabelan graceful sisi-ganjil dari definisi pelabelan pada Teorema 3.1 untuk genap. Graf (,) untuk genap label titik ( ) dengan = {2, 3, … , } berada pada himpunan {2 + 4, … , 4 − 4, 4 , 4 +

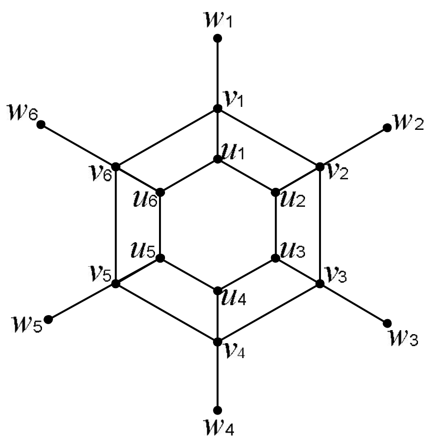
4, … , 6 − 4}. Sedangkan label titik ( ) memiliki pola pelabelan :

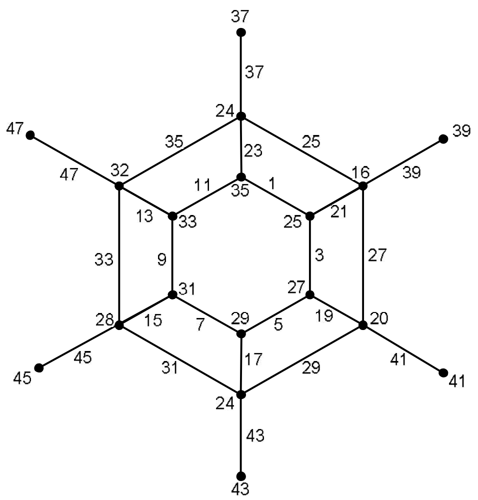
( ) = *4n*

Dengan demikian label titik ( ) akan memiliki label titik yang sama dengan label titik ( ), karena 4 berada dalam himpunan {2 + 4, … , 4 − 4, 4 , 4 + 4, … , 6 − 4} yang merupakan himpunan dari hasil label titik ( ). Jadi, menurut cara pelabelan pada bukti Teorema 3.1 Pelabelan pada graf (,) bukan merupakan pelabelan *graceful* sisi-ganjil

Contoh 3.4

Diberikan Graf (,).





Gambar 3.6 Pelabelan pada Graf (,)

Pada Gambar 3.6 dapat dilihat bahwa graf (,), terdapat pelabelan titik yang sama yaitu ( ) dengan ( ). Dengan menggunakan pelabelan pada bukti Teorema 3.1 graf (,) bukan merupakan *graceful* sisi-ganjil untuk *n* = 6.

Sesuai Teorema 3.1 graf graf (,) untuk ganjil merupakan graf *graceful* sisi-ganjil, sedangkan graf (,) untuk genap menurut bukti pada Teorema 3.1 belum tentu graf tersebut merupakan graf *graceful* sisi-ganjil.

3. PENUTUP

Berdasarkan pembahasan dapat disimpulkan bahwa Graf P(,1) merupakan graf graceful sisi-ganjil dan Graf *Web W(2,n)* untuk n ganjil merupakan graf graceful sisi-ganjil. Sedangkan Graf *Web W(2,n)* untuk n genap, dengan menggunakan pelabelan yang didefinisikan pada bukti Teorema 3.1 belum tentu merupakan graf graceful sisi-ganjil sehingga diperlukan penelitian lebih lanjut.

4. DAFTAR PUSTAKA

[1] Gallian, J.A., (2013), A Dynamic Survey of Graph Labelings. *The Electronic Journal of Combinatorics*. Vol.5, No.DS6.

[2] S K Vaidya and N H Shah, (2013), “Graceful and odd graceful labeling of some graphs”. *International Journal of Mathematics and Soft Computing*. 3(1) : 61-68.

[3] Solairaju A. dan Chitra K., (2009), “Edge-odd Graceful Graphs”. Electronics Notes in Discrete Math. 33:15-20.

[4] Singhun S., (2013), Graphs with Edge-Odd Graceful Labelings, *International Mathematical Forum*. 8 (12) : 577-582.

[5] Wilson, J. Robin and John J. Watkins, (1990), Graphs An Introductory Approach, New York: University Course Graphs, Network and Design.