

MODEL DINAMIKA PENYEBARAN DBD DENGAN MENERAPKAN TIGA STRATEGI PENGENDALIANNYA

Kartono¹, Djuwandi², Farikhin³
^{1,2,3}Jurusan Matematika FSM Universitas Diponegoro
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H. Semarang 50275
e-mail:kartonoundip@gmail.com

Abstract. The information of the dynamic of dengue fever is needed to build the model of its controlling strategy. Therefore, this research is aimed to develop a mathematical model such that the effectiveness of several controlling strategy for example 3M campaign, treatment to the infected people, and the applying of insecticide can be evaluated. This mathematical model is constructed by classifying the human population into three class that are Susceptible (S), Infected (I) and Removed (R) while the vector population (*aedes aegypti* mosquito) is assumed belongs to the Infected (I) class. The effectiveness of the controlling strategy is analyzed using maximum Pontryagin principle. The result of this analysis shows that the 3M campaign affects the size of the suspect population.

Keywords: mathematical model, Dengue Fever, controlling.

1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Demam Berdarah Dengue (DBD) merupakan salah satu penyakit yang menimbulkan wabah dan menyebabkan kematian pada anak-anak dan dewasa. Penyakit yang ditularkan oleh nyamuk *Aedes aegypti* ini masih menjadi salah satu masalah utama kesehatan masyarakat di Indonesia karena angka kematian penderitanya cenderung meningkat dari tahun ke tahun. Kejadian Luar Biasa (KLB) penyakit DBD yang semula terjadi setiap 5 tahun, kini semakin sering terjadi.

Banyak upaya untuk memberantas perkembangan penyakit ini telah dilakukan, yang mengarah pada pembatasan gerak dan populasi nyamuk sebagai vektor DBD pada manusia, diantaranya program yang paling sering dikampanyekan yaitu program 3M (menguras, menutup dan mengubur). , pengobatan pada individu terinfeksi, pemberantasan populasi vektor dengan insektisida. Upaya-upaya yang dilakukan ini belum tampak membuahkan hasil yang maksimal terhadap penurunan jumlah penderita DBD di Indonesia. Penerapan ketiga strategi pengendalian penyebaran

DBD tersebut perlu dikaji, sehingga dapat diketahui efektifitasnya.

Fenomena ini sangat menarik untuk dikaji, terutama terkait dengan data yang menunjukkan bahwa jumlah kematiannya cukup banyak. Pengetahuan akan dinamika epidemik DBD pada populasi manusia sangat penting bagi masyarakat yang membutuhkan pelayanan kesehatan yang prima dan Departemen Kesehatan untuk menyusun perencanaan strategi pengendalian penyebarannya agar dapat menekan angka kematiannya.

1.2 Studi Pustaka

Saat ini strategi pemberantasan DBD antara lain dengan memberantas *Aedes aegypti* sebelum musim penularan untuk membatasi penyebaran DBD dan mencegah KLB. Pemberantasan tersebut dilakukan dengan penggerakan masyarakat untuk Pemberantasan Sarang Nyamuk (PSN), pengasapan masal di kelurahan endemis tinggi dan tempat umum (sekolah, rumah sakit, puskesmas, mesjid, gereja, kantor-kantor) walaupun kurang efektif membunuh nyamuknya, serta pemeriksaan jentik berkala [1]. Sementara itu, menjaga kebersihan serta kampanye 3M (menutup, menguras, dan mengubur) rupanya belum

memperan untuk mengurangi secara signifikan penyebaran DBD.

Model matematika secara umum untuk penyebaran penyakit menular telah dijelaskan dalam [2]. Model epidemik Kermack-McKendrick memakai asumsi sederhana tentang laju penyebaran dan penyembuhan penyakit sering menjadi acuan untuk mengembangkan model epidemik. Dalam modelnya, populasi total (N) dibagi menjadi empat kelas yaitu *Susceptible* ($S(t)$) merupakan jumlah individu yang rentan terinfeksi dan mudah ditulari penyakit, *Exposed* ($E(t)$) yang artinya individu yang terpapar virus, *Infectious* ($I(t)$) adalah jumlah individu yang terinfeksi dan *Recovered* ($R(t)$) menotasikan jumlah individu yang telah sembuh dari penyakit. Model matematika ini kemudian disebut model *SEIR* [3].

Model ini dikembangkan untuk wabah SARS, dengan menambahkan kelas *Karantina* ($Q(t)$) dan *Isolasi* ($J(t)$), karena secara umum cara untuk mengendalikan penyebaran penyakit ini dengan diterapkannya program karantina dan isolasi. Model ini mencerminkan sifat-sifat penyakit menular SARS, yang memberikan deskripsi dasar dari dinamika penularan SARS, sehingga dapat dipakai untuk memprediksi terjadinya epidemik dan mendesain strategi pengendaliannya [4]. [5] telah mengidentifikasi strategi pengendalian terbaik untuk wabah SARS, pandemik influenza menurut model dinamik *SIR*. Model pengendalian yang serupa adalah model strategi pengendalian penyebaran virus dengue di Singapura oleh [6].

Pada tahun 2008, Kartono *et al* mulai melakukan kajian dan penelitian yang terkait dengan model dinamik penyebaran penyakit influenza. Kajian-kajian ini yang mendasari ketertarikan pada penelitian epidemiologis tentang dinamika penyebaran virus flu burung. Penelitian dilanjutkan dengan mengkonstruksi model dinamika penyebaran virus yang dinyatakan dalam bentuk sistem persamaan diferensial orde satu dengan pembagian

kelas *SIR* pada populasi manusia, sedangkan populasi unggas diasumsikan konstan tanpa adanya pembagian kelas. Dalam penelitian ini, densitas populasi unggas yang terinfeksi dan frekwensi kontak langsung dengan unggas yang terinfeksi merupakan faktor penting yang menentukan terjangkitnya manusia. Oleh karena itu, strategi pengendalian penyebaran virus dari unggas terinfeksi ke manusia suspek dapat dilakukan dengan pembasmian unggas-unggas yang terinfeksi. Implementasi strategi pengendalian ini berdampak merugikan para peternak atau pemilik unggas [7].

1.3 Metode Penelitian

Penelitian ini dilakukan dengan mengkonstruksi model matematika strategi pengendalian epidemik DBD, yang mempertimbangkan beberapa strategi pengendalian penyebaran penyakitnya pada populasi manusia. Pemodelan dilakukan dengan membagi populasi manusia menjadi 3 kelas (*Susceptible*, *Infected*, *Removed*), sedangkan populasi vektor diasumsikan sebagai vektor *Infected*. Pemodelan ini memodifikasi model-model matematika penyebaran penyakit yang telah dikembangkan oleh [4,5,7,9,10].

Pendekatan penyelesaian masalah dalam penelitian ini melalui pendekatan pemodelan matematika. Luaran yang diharapkan adalah model dinamika penyebaran DBD dengan menerapkan beberapa strategi pengendalian. Langkah-langkah pengembangan yang dilakukan adalah

1. Membagi populasi manusia (*host*) ke dalam kelas-kelas: *Susceptible* ($S(t)$) adalah jumlah individu yang mudah terinfeksi dan mudah ditulari penyakit, *Infectious* ($I(t)$) adalah jumlah individu yang terinfeksi dan *Recovered* ($R(t)$) menotasikan jumlah individu yang telah sembuh dari penyakit dan bisa menjadi suspek, sedangkan populasi vektor dalam kelas *Infected* ($V(t)$).
2. Menentukan titik-titik ekuilibrium,

3. Menganalisis efektifitas penerapan strategi pengendalian menurut prinsip Maximum Pontryagin.

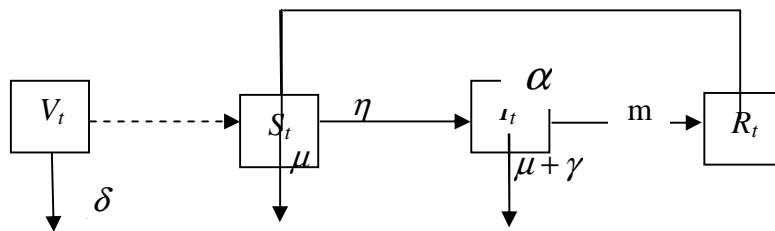
2. HASIL DAN PEMBAHASAN

2.1 Pemodelan Matematika dinamika penyebaran DBD

Sebagai langkah awal di dalam pemodelan, notasi S_t , I_t , R_t didefinisikan masing-masing menyatakan jumlah individu yang suspect, terinfeksi (infected) dan sembuh (recovered) dalam total populasi N_t pada waktu t . Klas

populasi vektor diasumsikan sebagai klas *infected*, yang dinotasikan dengan V_t . Dinamika transfer klas-klas tersebut digambarkan dalam Gambar.1.

Model dinamika penyebaran DBD dikonstruksi berdasarkan tiga perlakuan pengendalian yaitu u_1 ; melaksanakan kampanye pengendalian 3M, u_2 : pengobatan pada individu terinfeksi, u_3 : pemberantasan populasi vektor dengan insektisida



Gambar 2.1 Dinamika transfer antar klas

Misalkan pada waktu t , A adalah total manusia yang ada dan diantara mereka ada u_1 ($0 \leq u_1 \leq 1$) bagian yang mendapatkan perlakuan kontrol 3M. Pemodelan ini mengasumsikan μ adalah laju kematian alami dari semua klas manusia dan γ adalah laju kematian tambahan dari klas populasi terinfeksi karena penyakit. Misalkan m adalah laju recovery alami dari klas populasi terinfeksi dan diantara para *recover* alami tersebut ada τ_1 bagian menjadi klas *recover* dan bagian sisanya menjadi *suspect* lagi. Kontrol

u_2 ($0 \leq u_2 \leq 1$) adalah kontrol perlakuan yang diterapkan pada populasi manusia terinfeksi dan karena perlakuan ini, bu_2I bagian dari populasi *recover* dari penyakit itu terinfeksi dan diantara mereka τ_2 bagian masuk dalam klas *recover* yang tidak dapat menjadi *suspect* untuk penyakit itu sebanyak αR dimana sisanya menjadi *suspect* kembali penyakit itu. Misalkan η merupakan parameter laju transmisi dari manusia *suspect* menjadi manusia terinfeksi, r adalah laju

pertumbuhan *malthusian* untuk populasi vektor dan δ merupakan laju kematian alami vector. Kami menerapkan kontrol insektisida u_3 ($0 \leq u_3 \leq 1$) pada vektor dan $\tau_3 u_3 V$ bagian dari populasi vektor menjadi korban dari pererapan kontrol u_3 .

Berdasarkan asumsi-asumsi tersebut, formulasi model epidemik DBD dapat dinyatakan oleh sistem persamaan diferensial biasa non linier orde satu sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= (1 - u_1)A - \mu S - \eta SV + \alpha R + m(1 - \tau_1)I + bu_2(1 - \tau_2)I \\ \frac{dI}{dt} &= \eta SV - (\mu + m + \gamma + bu_2)I \quad (2.1) \\ \frac{dR}{dt} &= -(\alpha + \mu)R + (m\tau_1 + bu_2\tau_2)I \\ \frac{dV}{dt} &= rV - \tau_3 u_3 V = (r - \tau_3 u_3) V \end{aligned}$$

Dengan kondisi awal : $S(0) > 0$, $I(0) > 0$, $R(0) > 0$, $V(0) > 0$.

Selanjutnya berdasarkan Sistem (2.1), kita mencari titik-titik kesetimbangan (ekuilibrium) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} = 0 &\Rightarrow (1 - u_1)A - \mu S - \eta SV + \alpha R + \\ &m(1 - \tau_1)I + bu_2(1 - \tau_2)I = 0 \\ \frac{dI}{dt} = 0 &\Rightarrow \eta SV - (\mu + m + \gamma + bu_2)I = \\ &0 \\ \frac{dR}{dt} = 0 &\Rightarrow -(\alpha + \mu)R + (m\tau_1 + bu_2\tau_2)I \\ &= 0 \\ \frac{dV}{dt} = 0 &\Rightarrow (r - \tau_3 u_3)V = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Dengan menyelesaikan Sistem (2.2) maka diperoleh titik ekuilibrium

$$S^* = \frac{(1 - u_1)A}{\mu}, \quad I^* = 0, \quad R^* = 0, \quad V^* = 0 \quad (2.3)$$

Titik ekuilibrium (3) disebut ekuilibrium bebas penyakit, dan jika penerapan kontrol u_1 pada hampir semua manusia maka populasi manusia suspect hampir tidak ada. Mengingat dalam kondisi awal telah diasumsikan bahwa $V(0) > 0$ maka agar tidak terjadi pertumbuhan ukuran populasi vektor haruslah $r = \tau_3 u_3$, namun jika $r < \tau_3 u_3$ maka ukuran populasi vektor semakin mengecil dan akibatnya interaksi SV juga mengecil. Interaksi SV ini menjadi indikator terjadinya manusia akan terinfeksi atau tidak, Bila frekwensi interaksi η semakin membesar maka tingkat incidensi terinfeksi seseorang semakin membesar.

Berdasarkan analisis ini dapat diinterpretasikan bahwa dengan penerapan kontrol u_3 sedemikian sehingga jika $r < \tau_3 u_3$ maka akan memperkecil ukuran populasi vektor, namun perlu juga dievaluasi terakit efek samping dari penggunaan insektisidanya. Oleh karena itu analisis ini dilanjutkan dengan mencari model kontrol optimal

2.2 Mengkonstruksi model kontrol optimal.

Dalam mengkonstruksi model kontrol optimal ini perlu memperhatikan biaya dari penerapan ketiga perlakuan pengendalian

$\{u_1, u_2, u_3\}$ dan efek-efek samping jika ada dan harus diupayakan meminimumkannya. Oleh karena itu, tujuannya tidak hanya meminimumkan jumlah manusia yang terinfeksi melalui penerapan pengendali optimal tetapi juga meminimumkan total biaya sistemik yang digunakan untuk penerapan strategi pengendalian tersebut dan efek-efek samping dari parameter-parameter kontrol selama berlangsungnya proses penerapan strategi pengendalian tersebut. Jadi fungsi tujuan dari masalah kontrol optimal ini diformulasika sebagai berikut:

$$J = \min_{u_1, u_2, u_3} \int_0^{t_1} (B_1 I + B_2 u_1^2 + B_3 u_2^2 + B_4 u_3^2) dt \quad (2.4)$$

bergantung pada Sistem (2.1)

Tujuannya adalah mendapatkan pengendali (u_1^*, u_2^*, u_3^*) sedemikian sehingga

$$J(u_1^*, u_2^*, u_3^*) = \min_{u_1, u_2, u_3} J(u_1, u_2, u_3) \quad (2.5)$$

Di sini, B_1 adalah konstanta bobot yang bersesuaian dengan manusia terinfeksi. Kuadrat dari variabel pengendali untuk memperhatikan kerugian yang diakibatkan oleh efek samping dari variabel pengendali itu dan B_2, B_3, B_4 masing-masing konstanta positif yang disesuaikan dengan kuadrat pengendali untuk menyeimbangkan ukuran suku-sukunya.

Selanjutnya masalah kontrol optimal (2.4) diselesaikan berdasarkan Sistem (2.1) dengan mengawali membentuk fungsi Lagrangian:

$$L = B_1 I + B_2 u_1^2 + B_3 u_2^2 + B_4 u_3^2 \quad (2.6)$$

Untuk meminimalkan fungsi Lagrangian L , bentuk Hamiltonian dari masalah tersebut adalah

$$H = L + \lambda_1(t) \frac{dS}{dt} + \lambda_2(t) \frac{dI}{dt} + \lambda_3(t) \frac{dR}{dt} + \lambda_4(t) \frac{dV}{dt} \quad (2.7)$$

Dimana $\lambda_i(t)$, untuk $i = 1, 2, 3, 4$ dikenal sebagai variabel adjoint yang ditentukan dengan menyelesaikan sistem persamaan diferensial:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial S} = \lambda_1(\mu + \eta V) - \lambda_2 \eta V \\ \dot{\lambda}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial I} = -B_1 - \lambda_1(m(1 - \tau_1) + b_2 u_2(1 - \tau_2)) \\ &+ \lambda_2(\mu + m + \gamma + b u_2) - \lambda_3(m\tau_1 + b_2 u_2 \tau_3) \\ \dot{\lambda}_3 &= -\frac{\partial H}{\partial R} = -\lambda_1 \alpha + \lambda_3(\alpha + \mu) \\ \dot{\lambda}_4 &= -\frac{\partial H}{\partial V} = \lambda_1 \eta S - \lambda_2 \eta S - \lambda_4(r - \tau_3 u_3) \end{aligned} \quad (2.8)$$

yang memenuhi kondisi transversalitas

$$\dot{\lambda}_i(t) = 0, \text{ untuk } i = 1, 2, 3, 4 \quad (2.9)$$

Dengan menyelesaikan Sistem (2.8) maka diperoleh solusi $\lambda_1^*(t), \lambda_2^*(t), \lambda_3^*(t), \lambda_4^*(t)$ dan nilai optimal S^*, I^*, R^*, V^* .

Menurut [9], bahwa berdasarkan nilai-nilai optimal tersebut, terdapat pengendali optimal $\{u_1^*(t), u_2^*(t), u_3^*(t)\}$ untuk $t \in [0, t_1]$ sedemikian sehingga

$$J(I(t), u_1^*(t), u_2^*(t), u_3^*(t)) = \min_{u_1, u_2, u_3} J(I(t), u_1(t), u_2(t), u_3(t))$$

yang bergantung pada Sistem (2.1).

Di sini semua variabel pengendali $\{u_1(t), u_2(t), u_3(t)\}$ konvek karena semua variabel pengendali dan keadaan non negative, sehingga pengendali optimal terbatas dan karenanya menjamin eksistensi pengendali optimal $\{u_1^*(t), u_2^*(t), u_3^*(t)\}$ yang meminimalkan (2.4) untuk $t \in [0, t_1]$ berdasarkan Sistem (1).

Selanjutnya dicari pengendali optimal yang meminimalkan J dengan prinsip maximal Pontryagin:

Kondisi optimal diperoleh melalui

$$\frac{\partial H}{\partial u_1} = 0 \Rightarrow 2B_2 u_1 - \lambda_1 A = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial u_2} = 0 &\Rightarrow 2B_3 u_2 + \lambda_1 b(1 - \tau_2)I - \lambda_2 bI \\ &+ \lambda_3 b \tau_2 I = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_3} = 0 \Rightarrow 2B_4 u_3 - \lambda_4 \tau_3 V = 0$$

Dari sini didapatkan solusi optimal

$$\begin{aligned} u_1^* &= \frac{\lambda_1^* A}{2B_2} \\ u_2^* &= \frac{bI^*(\lambda_2^* - \lambda_1^* - \lambda_3^* \tau_3) + \lambda_1^* \tau_2}{2B_3} \\ u_3^* &= \frac{\lambda_4^* \tau_3 V^*}{2B_4} \end{aligned}$$

Ketiga pengendali optimal ini meminimalkan fungsi J yang diberikan (2.4). Ketiga pengendali optimal ini linier terhadap ukuran populasi masing-masing klas. Strategi pengendalian u_1 (kampanye 3M) linier terhadap ukuran populasi suspect, strategi pengendalian u_2 (pengobatan) linier terhadap ukuran populasi klas terinfeksi, dan strategi pengendalian u_3 (insektisida) linier terhadap ukuran populasi klas vektor.

3. PENUTUP

Dalam penelitian ini telah berhasil dikonstruksi dan dianalisis model dinamik penyebaran DBD, dengan memperhatikan tiga strategi pengendalian. Model tersebut memperlihatkan satu ekuilibrium bebas penyakit. Dalam kondisi kesetimbangan bebas penyakit, peran kontrol u_1 (kampanye 3M) sangat menentukan ukuran populasi manusia suspect. Dalam kontrol optimal, penerapan ketiga pengendali linier terhadap masing-masing klas populasi dimana strategi itu diterapkan.

4. UCAPAN TERIMA KASIH

Terima kasih kepada Dekan FSM UNDIP yang telah memberi kesempatan dan dana untuk pelaksanaan penelitian ini melalui DIPA PNBPMIPM UNDIP 2013.

5. DAFTAR PUSTAKA

- [1] Kartono, Rita R, Heri.S, Beta. N, Asep Y W, Eko A.S., (2012), *Pengembangan Sistem Informasi Deteksi Dini Kejadian Luar Biasa DBD berbasis Karakteristik Wilayah di Kota Semarang*, Laporan Penelitian Tematik FSM UNDIP Semarang (unpublished)

- [2] Kapur, J. N., (2000), *Mathematical Models in Biologi and Medicine*, New Delhi:Affiliated East-West PressPrivate Limited.
- [3] Brauer, F., (2005), *Modelling Epidemics*, Canada: MITACS.
- [4] Gumel, AB, S Ruan, Troy Day, (2004), *Modelling strategies for controlling SARS Outbreaks*, Canada: The Royal Society (doi:10.1098/rspb.2004.2800)
- [5] Handel.A, Ira.M. Longini, Rustom Antia, (2007), What is the Best Control Strategy for Multiple Infectious Disease Outbreaks?, *Proceeding of the Royal Society*, 274 : 833-837 (doi:10.1098/rspb.2006.0015)
- [6] Burattini, M.N, M.Chen, A.Chow, F.A.B.Coutino, K.T.Goh, L.F.Lopez, S.Ma, E.Massad, (2008), *Modelling the Control Strategies Against Dengue in Singapore*, *Epidemiol.Infect*, 136, the United Kingdom: Cambridge University Press, pp.309-319 (doi:10.1017/S09050268807008667) .
- [7] Kartono, Widowati, R. Heri SU., (2010), Study the Dynamics of Human Infection by Avian influenza: Case Study in the Central Java Province of Indonesia, *Proceeding of IndoMS International Conference on Mathematics and Its Applications (IICMA) 2009*, Yogyakarta:IndoMS, ISBN 978-602-96426-0-5, pp. 391-396
- [8] Derouich.M, A. Boutayeb, (2008), An Avian Influenza Mathematical Model, *Applied Mathematical Sciences*, 2(36) : 749-1760
- [9] Iacoviello, D, N. Stasio, (2013), Optimal Control for SIRC Epidemic outbreak, *Comput. Methods Programs Biomed*,<http://dx.doi.org/10.1016/j.compbi.2013.01.006>
- [10] Kar.T.K, Jana.S., (2013), *Application of three control optimally in a vector-borne disease- a mathematical study*, *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat* 18 (2868-2884).
-