ENDOMORFISMA *RIGID* DAN *COMPATIBLE* PADA RING DERET PANGKAT TERGENERALISASI MIRING

Ahmad Faisol
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung
E-mail: faisol_mathunila@yahoo.co.id

Abstract. Given a ring *R*, a strictly ordered monoid $(S,\cdot,\leq)$ and monoid homomorphism $\omega : S \to End(R)$. Constructed the set of all function from *S* to *R* whose support is artinian and narrow, with pointwise addition and the skew convolution multiplication, it becomes a ring called the skew generalized power series rings (SGPSR) and denoted by $R[[S,\omega,\leq]]$. A ring *R* is called reduced if it contains no nonzero nilpotent elements, reversible if for all $r,s \in R$, $rs = 0$ implies $sr = 0$. Let $\mu : R \to R$ be a ring endomorphism, if for $r \in R$, $r\mu(r) = 0$ implies $r = 0$, then μ is called rigid. If for all $r,s \in R$, = 0 if and only if ( ) = 0, then μ is called compatible. In this paper we will discuss about the constructing of SGPSR homomorphism. Beside that, we also discuss about rigid and compatible endomorphism on SGPSR $R[[S,\omega,\leq]]$.

Keywords: SGPSR, homomorphism, endomorphism, rigid, compatible.

1. PENDAHULUAN

Suatu relasi biner "≤" pada himpunan tak kosong *S* disebut relasi urutan parsial jika memenuhi sifat refleksif, anti simetris, dan transitif. Suatu urutan parsial ≤ dikatakan total jika sebarang dua anggota yang berbeda pada *S* dapat diperbandingkan. Jika tidak, maka urutan parsial ≤ dikatakan trivial. Himpunan tak kosong *S* yang dilengkapi dengan suatu urutan parsial disebut himpunan terurut. Untuk selanjutnya notasi $(S,\leq)$ menyatakan *S* himpunan terurut terhadap urutan parsial ≤ (Adkins [1]).

Himpunan $(S,\leq)$ dikatakan Artin jika setiap barisan turun tegas dari anggota-anggota *S* selalu berhingga, dikatakan Noether jika setiap barisan naik tegas dari anggota-anggota *S* selalu berhingga, sedangkan dikatakan *narrow* jika setiap himpunan bagian S yang terurut trivial berhingga. Jika himpunan $(S,\leq)$ Artin dan *narrow*, maka sebarang himpunan bagian *X* ⊂ *S* juga Artin dan *narrow* (Ribenboim [2]).

Himpunan tak kosong *S* dengan operasi biner yang asosiatif disebut semigrup. Jika semigrup *S* mempunyai elemen identitas, maka *S* disebut monoid (Howie [3]).

Himpunan $(S,\leq)$ dikatakan monoid terurut jika *S* monoid dan "≤" relasi urutan *compatible* yakni jika $(\forall s,s',t \in S)(s \leq s' \Rightarrow st \leq s't)$ dan $(S,\leq)$ dikatakan monoid terurut tegas jika urutannya *compatible* tegas, yakni jika $(\forall s,s',t \in S)(s < s' \Rightarrow st < s't)$. (Elliot dan Ribenboim [4]).

Konstruksi RDPTM pertama kali dipublikasikan oleh R. Mazurek dan M. Ziembowski [5]. Ring ini merupakan perumuman dari ring deret pangkat tergeneralisasi yang dikonstruksi oleh Ribenboim [2]. Pada perkembangannya, pembahasan tentang RDPTM oleh R. Mazurek dan M. Ziembowski diawali dengan membahas syarat perlu dan cukup RDPTM merupakan ring uniserial [5]. Pada tahun 2008 dibahas tentang karakterisasi RDPTM sebagai ring Von Neumann [6]. Pada tahun 2010 dibahas tentang *weak dimension* dan sifat distributif kanan dari RDPTM, serta karakterisasi RDPTM sebagai ring duo, Bézout dan distributif [7]. Selain R. Mazurek dan M. Ziembowski, Renyu Zhao [8] membahas tentang karakterisasi RDPTM sebagai ring-

APP kiri, sedangkan A. R. Nasr [9] membahas tentang RDPTM yang dapat dibalik.

Pada publikasi-publikasi sebelumnya, belum ada pembahasan mendalam tentang homomorfisma RDPTM, sehingga memberikan motivasi untuk membahas tentang konstruksi homomorfisma RDPTM. Selain itu, pada makalah ini juga akan dibahas tentang endomorfisma RDPTM yang *compatible* dan *rigid*. Sifat-sifat dasar tentang endomorfisma ring yang *compatible* dan *rigid* dapat dilihat pada makalah yang dibahas oleh E. Hashemi dan A. Moussavi [10].

2. HOMOMORFISMA RDPTM

Pada bagian ini akan dibahas tentang homomorfisma RDPTM yang dikonstruksi oleh M. Ziembowski [11]. Pada bagian ini juga dibuktikkan beberapa lemma terkait homomorfisma RDPTM.

Misalkan R_1 dan R_2 ring, $(S_1,\leq_1)$ dan $(S_2,\leq_2)$ monoid terurut tegas, dan misalkan $\alpha: S_1 \to End(R_1)$ dan $\beta: S_2 \to End(R_2)$ homomorfisma monoid. Didefinisikan suatu homomorfisma monoid $\sigma: S_1 \to S_2$ sedemikian sehingga untuk setiap himpunan bagian $X \subset S_1$ yang Artin dan *narrow*, $\sigma(X) \subset S_2$ juga Artin dan *narrow*. Selanjutnya didefinisikan suatu homomorfisma ring $\mu: R_1 \to R_2$ sedemikian sehingga untuk setiap $s \in S_1$ diagram berikut komutatif :

$$\begin{array}{ccc} R_1 & \xrightarrow{\mu} & R_2 \\ {\scriptstyle \alpha_s}\downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \beta_{\sigma(s)}} \\ R_1 & \xrightarrow{\mu} & R_2 \end{array}$$

Untuk sebarang $f \in R_1[[S_1,\alpha,\leq_1]]$, misalkan $\overline{f}: S_2 \to R_2$ suatu pemetaan yang didefinisikan oleh :

$$\overline{f}(t) = \begin{cases} \mu \circ f \circ \sigma^{-1}(t) & \text{jika } t \in \sigma(S_1) \\ 0 & \text{selainnya} \end{cases} \qquad (2.1)$$

karena $\text{supp}(\overline{f}) \subseteq \sigma(\text{supp}(f))$, maka $\text{supp}(\overline{f})$ Artin dan *narrow*. Dengan kata lain $\overline{f} \in R_2[[S_2,\beta,\leq_2]]$. Oleh karena itu, dapat didefinisikan suatu pemetaan $\tau: R_1[[S_1,\alpha,\leq_1]] \to R_2[[S_2,\beta,\leq_2]]$ dengan $\tau(f) = \overline{f}$.

Lemma 2.1 [11] *Pemetaan* $\tau: R_1[[S_1,\alpha,\leq_1]] \to R_2[[S_2,\beta,\leq_2]]$ *dengan* $\tau(f) = \overline{f}$ *merupakan suatu homomorfisma ring.*

Bukti:

(i) Ambil sebarang $f, g \in R_1[[S_1,\alpha,\leq_1]]$, akan ditunjukkan $\tau(f+g) = \tau(f) + \tau(g)$.

$$\begin{aligned} \tau(f+g) &= \overline{f+g} \\ &= \mu \circ (f+g) \circ \sigma^{-1}(t) \qquad ; t \in \sigma(S_1) \\ &= \mu\left((f+g)\left(\sigma^{-1}(t)\right)\right) \\ &= \mu\left(f\left(\sigma^{-1}(t)\right) + g\left(\sigma^{-1}(t)\right)\right) \\ &= \mu\left(f\left(\sigma^{-1}(t)\right)\right) + \mu\left(g\left(\sigma^{-1}(t)\right)\right) \\ &= \left(\mu \circ f \circ \sigma^{-1}(t)\right) + \left(\mu \circ g \circ \sigma^{-1}(t)\right) \\ &= \overline{f} + \overline{g} \\ &= \tau(f) + \tau(g) \end{aligned}$$

(ii) Ambil sebarang $f, g \in R_1[[S_1,\alpha,\leq_1]]$, akan ditunjukkan ( ) = ( ) ( ).

$$\begin{aligned} \tau(fg) &= \overline{fg} \\ &= \mu \circ (fg) \circ \sigma^{-1}(t) \qquad ; t \in \sigma(S_1) \\ &= \mu\left((fg)\left(\sigma^{-1}(t)\right)\right) \\ &= \mu\left(\sum_{uv=\sigma^{-1}(t)} f(u)\alpha_u\left(g(v)\right)\right) \end{aligned}$$

$$= \sum_{uv=\sigma^{-1}(t)} \mu\big(f(u)\alpha_u(g(v))\big)$$
$$= \sum_{uv=\sigma^{-1}(t)} \mu(f(u))\,\mu\big(\alpha_u(g(v))\big)$$
$$= \sum_{uv=\sigma^{-1}(t)} \mu(f(u))\,\beta_{\sigma(u)}\big(\mu(g(v))\big)$$
$$= \sum_{\sigma(u)\sigma(v)=t} \mu(f(u))\,\beta_{\sigma(u)}\big(\mu(g(v))\big)$$
$$= \sum_{xy=t} \mu\Big(f\big(\sigma^{-1}(x)\big)\Big)\,\beta_x\Big(\mu\Big(g\big(\sigma^{-1}(y)\big)\Big)\Big)$$
$$= \sum_{xy=t} \big(\mu \circ f \circ \sigma^{-1}(x)\big)\,\beta_x\big(\mu \circ g \circ \sigma^{-1}(y)\big)$$
$$= \sum_{xy=t} \bar{f}(x)\,\beta_x\big(\bar{g}(y)\big)$$
$$= \bar{f}\,\bar{g}$$
$$= \tau(f)\,\tau(g)$$

Dari (i) dan (ii), maka terbukti bahwa pemetaan $\tau : R_1[[S_1,\alpha,\leq_1]] \to R_2[[S_2,\beta,\leq_2]]$ merupakan suatu homomorfisma RDPTM.

Lemma 2.2 [11]
Misalkan $\tau : R_1[[S_1,\alpha,\leq_1]] \to R_2[[S_2,\beta,\leq_2]]$ *suatu homomorfisma RDPTM. Jika* $\mu : R_1 \to R_2$ *monomorfisma, maka* $\tau : R_1[[S_1,\alpha,\leq_1]] \to R_2[[S_2,\beta,\leq_2]]$ *juga monomorfisma.*

Bukti :
Ambil sebarang $f, g \in R_1[[S_1,\alpha,\leq_1]]$, akan ditunjukkan τ injektif. Andaikan $\tau(f) = \tau(g)$, maka berdasarkan (1) jelas bahwa $\mu \circ f \circ \sigma^{-1}(t) = \mu \circ g \circ \sigma^{-1}(t)$ untuk setiap $t \in \sigma(S_1)$. Dengan kata lain $\mu\Big(f\big(\sigma^{-1}(t)\big)\Big) = \mu\Big(g\big(\sigma^{-1}(t)\big)\Big)$. Karena μ merupakan monomorfisma, maka $f\big(\sigma^{-1}(t)\big) = g\big(\sigma^{-1}(t)\big)$. Jadi diperoleh $f = g$, dengan kata lain terbukti τ injektif atau τ merupakan monomorfisma.

3. RDPTM *τ-RIGID* dan *τ-COMPATIBLE*

Misalkan R suatu ring. R dikatakan tereduksi jika tidak memuat elemen nilpoten tak nol, dikatakan dapat dibalik jika untuk setiap $r_1, r_2 \in R$, maka $r_1 r_2 = 0$ mengakibatkan $r_2 r_1 = 0$. Dan R dikatakan semikomutatif jika $r_1 r_2 = 0$, maka $r_1 R r_2 = 0$ untuk setiap $r_1, r_2 \in R$. Lebih lanjut, setiap ring tereduksi adalah dapat dibalik dan setiap ring dapat dibalik adalah semikomutatif tetapi secara umum tidak berlaku sebaliknya (Marks, Mazurek dan Ziembowski [12]).

Misalkan $\mu : R \to R$ dan $\pi : R \to R$ endomorfisma ring. Jika untuk $r \in R$, $r\mu(r) = 0$ mengakibatkan $r = 0$, maka μ dikatakan *rigid*. Suatu ring R dikatakan ring $\mu - rigid$ jika terdapat suatu μ endomorfisma *rigid* dari ring *R*. Sifat-sifat dari ring $\mu - rigid$ dapat dilihat dalam Krempa [13]. Sebarang endomorfisma *rigid* dari suatu ring adalah monomorfisma dan ring $\mu - rigid$ adalah tereduksi. Suatu ring R dikatakan $\mu - compatible$ jika untuk setiap $r_1, r_2 \in R$, $r_1 r_2 = 0$ jika dan hanya jika $r_1 \mu(r_2) = 0$. Lebih lanjut, ring R dikatakan $\pi - compatible$ jika untuk setiap $r_1, r_2 \in R$, $r_1 r_2 = 0$ jika dan hanya jika $r_1 \pi(r_2) = 0$. Jika R $\mu - compatible$ sekaligus $\pi - compatible$, maka R dikatakan $(\mu,\pi) - compatible$. Suatu ring R adalah $\mu - rigid$ jika dan hanya jika R adalah $(\mu,\pi) - compatible$ dan tereduksi (Hashemi dan Moussavi [10]).

Lemma 3.1 *Misalkan* τ *endomorfisma RDPTM* $R[[S,\omega,\leq]]$*, maka berlaku :*

(i) *Jika* τ *rigid, maka* $R[[S,\omega,\leq]]$ *tereduksi.*
(ii) *Jika* $R[[S,\omega,\leq]]$ *tereduksi, maka* $R[[S,\omega,\leq]]$ *dapat dibalik.*
(iii) *Jika* τ *rigid, maka* $R[[S,\omega,\leq]]$ *dapat dibalik.*

(iv) *Jika τ rigid, maka untuk sebarang $f, g \in R[[S,\omega,\leq]]$, $f\tau(g)=0$ jika dan hanya jika $g\tau(f)=0$.*

Bukti:

(i) Ambil sebarang $f \in R[[S,\omega,\leq]]$ dan misalkan $ff=0$. Karena τ endomorfisma, maka $\tau(ff)=\tau(f)\tau(f)=0$. Selanjutnya diperoleh $f\tau(f)\tau(f)\tau^2(f)=f\tau(f)\tau\left(f\tau(f)\right)=0$. Karena τ *rigid*, maka $f\tau(f)=0$ yang berakibat $f=0$.
Jadi terbukti bahwa jika τ *rigid*, maka $R[[S,\omega,\leq]]$ tereduksi.

(ii) Ambil sebarang $f, g \in R[[S,\omega,\leq]]$. Misalkan $fg=0$, maka $g(fg)f=(gf)(gf)=0$. Karena $R[[S,\omega,\leq]]$ tereduksi, akibatnya $gf=0$.
Jadi terbukti bahwa jika $R[[S,\omega,\leq]]$ tereduksi, maka $R[[S,\omega,\leq]]$ dapat dibalik.

(iii) Ambil sebarang $f \in R[[S,\omega,\leq]]$. Misalkan $fg=0$, maka $\tau(fg)=\tau(f)\tau(g)=0$. Selanjutnya diperoleh $\tau(g)\tau(f)\tau(g)\tau(f)=\tau(gf)\tau(gf)=0$, yang berakibat
$gf\tau(gf)\tau(gf)\tau^2(gf)=gf\tau(gf)\tau\left(gf\tau(gf)\right)=0$
Karena τ *rigid*, maka $gf\tau(gf)=0$ yang juga berakibat $gf=0$.
Jadi terbukti bahwa jika τ *rigid*, maka $R[[S,\omega,\leq]]$ dapat dibalik.

(iv) Ambil sebarang $f, g \in R[[S,\omega,\leq]]$, akan ditunjukkan $f\tau(g)=0$ jika dan hanya jika $g\tau(f)=0$. Misalkan $f\tau(g)=0$, maka $gf\tau(g)\tau(f)=gf\tau(gf)=0$. Karena τ *rigid*, maka $gf=0$. Selanjutnya, dari (iii) diperoleh $fg=0$. Akibatnya $\tau(fg)=0$ dan
$g\tau(fg)\tau^2(f)=g\tau(f)\tau(g)\tau^2(f)=g\tau(f)\tau(g\tau(f))=0$
Karena τ *rigid*, maka $g\tau(f)=0$.
Di sisi lain, jika $g\tau(f)=0$, maka $fg\tau(f)\tau(g)=fg\tau(fg)=0$. Karena τ *rigid*, maka $fg=0$. Selanjutnya, dari (iii) diperoleh $gf=0$. Akibatnya $\tau(gf)=0$ dan
$f\tau(gf)\tau^2(g)=f\tau(g)\tau(f)\tau^2(g)=0f\tau(g)\tau(f\tau(g))=0$
Karena τ *rigid*, maka $f\tau(g)=0$.
Jadi terbukti bahwa, jika τ endomorfisma RDPTM $R[[S,\omega,\leq]]$ *rigid*, maka untuk sebarang $f, g \in R[[S,\omega,\leq]]$, $f\tau(g)=0$ jika dan hanya jika $g\tau(f)=0$.

Proposisi 3.2 *Diberikan τ-rigid endomorfisma RDPTM $R[[S,\omega,\leq]]$. τ compatible jika dan hanya jika untuk setiap $f, g \in R[[S,\omega,\leq]]$, berakibat $\tau(f)g=0$ jika dan hanya jika $fg=0$.*

Bukti:

Ambil sebarang $f, g \in R[[S,\omega,\leq]]$. Misalkan $\tau(f)g=0$, maka diperoleh $\tau(g)\tau(f)gf=\tau(gf)gf=0$.
Akibatnya
$\tau\left(\tau(gf)gf\right)=\tau^2(gf)\tau(gf)=\tau(gf)\tau^2(gf)=\tau(gf)\tau\left(\tau(gf)\right)=0$
Selanjutnya, karena τ *rigid*, maka $\tau(gf)=0$ yang berakibat $gf\tau(gf)=0$. Dan karena τ *rigid*, maka $gf=0$. Oleh karena itu, berdasarkan Lemma 3.1 (iii) diperoleh $fg=0$.
Di lain pihak, jika $fg=0$, maka $\tau(f)g=0$. Karena τ dapat dibalik, maka diperoleh $g\tau(f)=0$ .Akibatnya,
$\tau(f)g\tau(f)\tau(f)=\tau(f)g\tau^2(f)\tau(g)=\tau(f)g\tau\left(\tau(f)g\right)=0$
Karena τ *rigid*, maka $\tau(f)g=0$.
Jadi terbukti bahwa, jika τ *rigid*, maka τ *compatible* jika dan hanya jika untuk setiap $f, g \in R[[S,\omega,\leq]]$, $\tau(f)g=0$ jika dan hanya jika $fg=0$.

Proposisi 3.3 *Diberikan τ-rigid endomorfisma RDPTM $R[[S,\omega,\leq]]$. Pernyataan berikut ini ekuivalen :*

(a) τ adalah rigid.

(b) τ compatible dan $R[[S,\omega,\leq]]$ tereduksi.

(c) Untuk setiap $f \in R[[S,\omega,\leq]]$*, jika* $\tau(f)f = 0$*, maka* $f = 0$.

Bukti :

$(a) \Rightarrow (b)$ Jika $f\tau(g) = 0$, maka $g\tau(f) = 0$. Akibatnya diperoleh $fg\tau(f)\tau(g) = fg\tau(fg) = 0$. Karena τ *rigid*, maka $fg = 0$. Di lain pihak, jika $fg = 0$, maka $\tau(fg) = 0$. Akibatnya diperoleh

$\tau(f)\tau(g) = g\tau(f)\tau(g)\tau^2(f) = g\tau(f)\tau(g\tau(f)) = 0$

Karena τ *rigid*, maka $g\tau(f) = 0$ yang berakibat $f\tau(g) = 0$. Jadi terbukti jika τ adalah *rigid*, maka τ *compatible*.

Selanjutnya, dari Lemma 3.1 (i) jelas $R[[S,\omega,\leq]]$ tereduksi.

Jadi terbukti jika τ *rigid*, maka τ *compatible* dan $R[[S,\omega,\leq]]$ tereduksi.

$(b) \Rightarrow (c)$ Jika $\tau(f)f = 0$, maka $f\tau(f)f = f\tau(f)f\tau(f) = (f\tau(f))^2 = 0$. Akibatnya $f\tau(f) = 0$. Karena τ *compatible*, maka diperoleh $ff = 0$. Dan karena $R[[S,\omega,\leq]]$ tereduksi, berakibat $f = 0$.

Jadi terbukti jika τ *compatible* dan $R[[S,\omega,\leq]]$ *tereduksi*, maka untuk setiap $f \in R[[S,\omega,\leq]]$, jika $\tau(f)f = 0$, maka $f = 0$.

$(c) \Rightarrow (a)$ Jika $f\tau(f) = 0$, maka $\tau(f\tau(f)) = \tau(f)\tau^2(f) = 0$. Akibatnya

$\tau(f)\tau(f)\tau^2(f)f = \tau^2(f)\tau(f)\tau(f)f = \tau(\tau(f)f)\tau(f)f = 0$

Oleh karena itu, diperoleh $\tau(f)f = 0$ yang juga berakibat $f = 0$.

Jadi terbukti jika untuk setiap $f \in R[[S,\omega,\leq]]$, $\tau(f)f = 0 \rightarrow f = 0$, maka τ *rigid*.

4. DAFTAR PUSTAKA

[1] W.A. Adkins, S.H. Weintraub, (1992), *Algebra An Approach Via Module Theory*, Springer-Verlag, New York

[2] P. Ribenboim, (1990), Generalized Power Series Rings, *In Lattice, Semigroups and Universal Algebra, Plenum Press, New York*, 271-277.

[3] J.M. Howie, (1976), An Introduction to Semigroup Theory, *Academic Press Inc., London.*

[4] G.A. Elliot, P. Ribenboim, (1990), Fields of Generalized Power Series, *Arch. Math.* 54 : 365-371.

[5] R. Mazurek, M. Ziembowski, (2007), Uniserial rings of skew generalized power series, *J. Algebra* 318 : 737–764.

[6] R. Mazurek, M. Ziembowski, (2008), On von Neumann regular rings of skew generalized power series, *Comm. Algebra* 36 (5) : 1855–1868.

[7] R. Mazurek, M. Ziembowski, (2010), Weak dimension and right distributivity of skew generalized power series rings, *Journal of the Mathematical Society of Japan*.

[8] R. Zhao, (2010), *Left app-rings of skew generalized power series.*

[9] A. R. Nasr-Isfahani, (2010), *Reversible skew generalized power series rings.*

[10] E. Hashemi, A. Moussavi, (2005), Polynomial extensions of quasi-Baer rings, *Acta Math. Hungarica*, 107(3) : 207–224.

[11] M. Ziembowski, (2010), *Right Gaussian rings and related topics*, University of Edinburgh.

[12] G. Marks, R. Mazurek, M. Ziembowski, (2010), A unified approach to various generalizations of Armendariz rings, *Bull. Austral. Math. Soc.* 81 : 361–397.

[13] J. Krempa, (1996), Some examples of reduce rings, *Algebra Colloq.*, 3 : 289–300.