

**ESSENTIALLY SMALL RIEMANN SUMS  
FUNGSI TERINTEGRAL HENSTOCK-DUNFORD PADA  $[a,b]$**

Solikhin<sup>1</sup>, Sumanto<sup>2</sup>, Siti Khabibah<sup>3</sup>  
<sup>1,2,3</sup>Jurusan Matematika FSM Universitas Diponegoro  
 Jl. Prof. H. Soedarto, S.H. Semarang 50275  
<sup>1</sup>*solikhin@live.undip.ac.id*, <sup>2</sup>*khabibah\_ku@yahoo.co.id*

**Abstract.** In this paper we study Henstock-Dunford integral on  $[a,b]$ . We discuss some properties of the integrable. We shall define essentially small Riemann sums (ESRS) and show that it is necessary and sufficient condition for function to be Henstock-Dunford integral on  $[a,b]$ .

**Keywords :** Henstock-Dunford integral and Essentially small Riemann sums

**1. PENDAHULUAN**

Generalisasi dari integral Riemann salah satunya yang menarik banyak dikaji adalah integral Henstock. Integral Henstock didefinisikan atas partisi Perron  $\delta$ -fine pada interval tertutup  $[a,b]$ . Integral ini mencakup integral Riemann dan integral Lebesgue yang ekuivalen dengan integral McShane [1, 2].

Integral Henstock telah mengalami perkembangan baik dari segi teori maupun terapannya dalam bidang matematika sendiri atau bidang ilmu lain [3, 4, 5]. Berdasarkan kajian tentang integral Henstock banyak sifat-sifat yang telah diungkap baik dalam ruang real  $R$  [1, 2], ruang Banach [6] maupun ruang Euclide  $R^n$  [7]. Bahkan kajian tentang integral ini juga banyak dikombinasikan dengan integral lain, salah satunya adalah integral Henstock-Dunford [8].

Integral Dunford didefinisikan oleh fungsi terukur lemah pada ruang real  $R$  [6]. Diberikan  $X$  ruang Banach dan  $X^* = \{x^* : X \rightarrow R \text{ linear kontinu}\}$  ruang dualnya (dual pertama) dengan  $X^{**} = \{x^{**} : X^* \rightarrow R \text{ linear kontinu}\}$  dual kedua serta  $[a,b] \subset R$ . Fungsi terukur lemah  $f : [a,b] \rightarrow X$  dikatakan terintegral Dunford pada  $[a,b]$  jika untuk setiap  $x^* \in X^*$  fungsi bernilai real  $x^*f : [a,b] \rightarrow R$  terintegral Lebesgue pada  $[a,b]$  dan untuk setiap himpunan terukur

$A \subset [a,b]$  terdapat vektor  $x_{(f,A)}^{**} \in X^{**}$  sehingga

$$x_{(f,A)}^{**}(x^*) = (H) \int_A x^* f = (H) \int_a^b x^* f \chi_A.$$

Integral Dunford kemudian diperluas ke dalam integral tipe Riemann, yaitu untuk setiap  $x^* \in X^*$  fungsi bernilai real  $x^*f : [a,b] \rightarrow R$  terintegral Henstock. Integral ini dinamakan integral Henstock-Dunford [8]. Integral jenis ini juga berhasil digeneralisasi ke dalam ruang Euclide  $R^n$  [9].

Berdasarkan hasil kajian integral Henstock-Dunford mengenai sifat-sifat sederhana dan fungsi primitifnya [8], dan kajian sifat-sifat lebih lanjut dari integral Henstock-Dunford pada ruang  $R$ , [6, 10] maka berdasarkan [11, 12] akan dikaji sifat Essentially small Riemann sums (ESRS) fungsi terintegral Henstock-Dunford pada  $[a,b]$ .

**2. INTEGRAL HENSTOCK-DUNFORD PADA  $[a,b]$**

Pada tulisan ini, dibahas definisi integral Henstock-Dunford pada  $[a,b]$ , sifat-sifat sederhana, dan fungsi primitifnya yang mengacu pada [8].

**Definisi 2.1 [8]** Diberikan  $X$  ruang Banach dan  $X^*$  ruang dualnya (dual pertama) dengan  $X^{**}$  dual kedua, serta interval tertutup  $[a,b] \subset R$ . Fungsi  $f : [a,b] \rightarrow X$  dikatakan terintegral

Henstock-Dunford pada  $[a, b]$  jika untuk setiap  $x^* \in X^*$  fungsi bernilai real  $x^* f : [a, b] \rightarrow R$  terintegral Henstock pada  $[a, b]$  dan untuk setiap interval tertutup  $A \subset [a, b]$  terdapat vektor  $x_{(f,A)}^{**} \in X^{**}$  sehingga

$$x_{(f,A)}^{**}(x^*) = (H) \int_A x^* f.$$

Selanjutnya vektor  $x_{(f,A)}^{**} \in X^{**}$  di atas disebut nilai integral Henstock-Dunford pada  $A$  atas fungsi  $f$  dan ditulis

$$x_{(f,A)}^{**} = (HD) \int_A f.$$

Jika  $f$  terintegral Henstock-Dunford pada  $[a, b]$ , ditulis  $f \in HD[a, b]$ .

**Teorema 2.2 [8]** Jika  $f \in HD[a, b]$  maka vektor  $x_{(f,A)}^{**} \in X^{**}$  pada Definisi 2.1. adalah tunggal.

**Bukti:**

Diberikan sebarang interval tertutup  $A \subset [a, b]$ . Andaikan terdapat vektor  $x_{1(f,A)}^{**} \in X^{**}$  dan  $x_{2(f,A)}^{**} \in X^{**}$  sehingga

$$x_{1(f,A)}^{**}(x^*) = (H) \int_A x^* f \text{ dan}$$

$$x_{2(f,A)}^{**}(x^*) = (H) \int_A x^* f.$$

Oleh karena itu

$$\begin{aligned} x_{1(f,A)}^{**}(x^*) - x_{2(f,A)}^{**}(x^*) &= (H) \int_A x^* f - (H) \int_A x^* f \\ &= 0, \end{aligned}$$

untuk setiap  $x^* \in X^*$ .

Jadi  $x_{1(f,A)}^{**} = x_{2(f,A)}^{**}$ .

**Teorema 2.3. [8]** Jika  $f \in HD[a, b]$  maka  $f \in HD(A)$  untuk setiap interval tertutup  $A \subset [a, b]$ .

**Bukti:**

Jelas menurut definisi.

Jika  $A = [c, d] \subset [a, b]$  maka simbol  $\alpha(A)$  dalam tulisan ini dimaksudkan sebagai  $\alpha(A) = |d - c|$ , panjang interval tertutup  $A$ .

**Contoh 2.4.** Didefinisikan fungsi  $f : [a, b] \rightarrow X$  oleh

$$f(x) = c,$$

untuk setiap  $x \in [a, b]$  dan suatu konstanta  $c \in X$ , maka  $f$  terintegral Henstock-Dunford pada  $[a, b]$  dengan nilai integralnya adalah  $c\alpha(A)$  untuk setiap interval tertutup  $A \subset [a, b]$ .

Diberikan sebarang bilangan  $\varepsilon > 0$  dan  $x^* \in X^*$  maka dapat ditemukan fungsi positif  $\delta$  pada  $[a, b]$  sehingga jika  $A \subset [a, b]$  interval tertutup dan  $\mathbf{D} = \{(D, x)\}$  sebarang partisi Perron  $\delta$ -fine pada  $A$  berlaku

$$\begin{aligned} & \left| \mathbf{P} \sum (x^* f)(x) \alpha(D) - x_{(f,A)}^{**}(x^*) \right| \\ &= \left| \mathbf{P} \sum x^* c \alpha(D) - x^* c \alpha(A) \right| \\ &= \left| x^* c (\mathbf{D} \sum \alpha(D) - \alpha(A)) \right| = 0 \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Jadi  $x^* f$  terintegral Henstock pada  $[a, b]$  dan untuk setiap interval tertutup  $A \subset [a, b]$  di atas terdapat vektor  $x_{(f,A)}^{**} \in X^{**}$  sehingga

$$\begin{aligned} x_{(f,A)}^{**}(x^*) &= (H) \int_A x^* f \\ &= (H) \int_A x^* (c) \\ &= x^* c \alpha(A) \end{aligned}$$

Jadi  $f \in HD[a, b]$  dan nilai integralnya adalah  $c\alpha(A)$  untuk setiap interval tertutup  $A \subset [a, b]$ .

**Teorema 2.5 (Kriteria Cauchy)** Fungsi  $f \in HD[a, b]$  jika dan hanya jika untuk setiap bilangan  $\varepsilon > 0$  terdapat fungsi positif  $\delta$  pada  $[a, b]$  sehingga jika  $A \subset [a, b]$  interval tertutup dan  $\mathbf{D} = \{(D, x)\}$  dan  $\mathbf{P} = \{(P, y)\}$  masing-masing partisi Perron  $\delta$ -fine pada  $A$  berlaku

$$\left| \mathbf{P} \sum x^* f(x) \alpha(D) - \mathbf{P} \sum x^* f(y) \alpha(P) \right| < \varepsilon$$

untuk setiap  $x^* \in X^*$ .

**Bukti:**

(Syarat Perlu) Diketahui  $f \in HD[a, b]$ .  
 Jadi untuk setiap  $x^* \in X^*$  fungsi  $x^*f$   
 terintegral Henstock pada  $[a, b]$  dan untuk  
 setiap interval tertutup  $A \subset [a, b]$  terdapat  
 vektor  $x_{(f,A)}^{**} \in X^{**}$  sehingga

$$x_{(f,A)}^{**}(x^*) = (H) \int_A x^* f.$$

Diberikan bilangan  $\varepsilon > 0$  sebarang dan  
 $x^* \in X^*$  maka terdapat fungsi positif  $\delta$   
 pada  $[a, b]$  sehingga untuk interval  
 tertutup  $A \subset [a, b]$  dan  $\mathbf{D} = \{(D, x)\}$  dan  
 $\mathbf{P} = \{(P, y)\}$  masing-masing partisi Perron  
 $\delta$ -fine pada  $A$  berlaku

$$\left| x_{(f,A)}^{**}(x^*) - \mathbf{D} \sum x^* f(x) \alpha(D) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dan

$$\left| x_{(f,A)}^{**}(x^*) - \mathbf{P} \sum x^* f(y) \alpha(P) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dengan demikian diperoleh

$$\begin{aligned} & \left| \mathbf{P} \sum x^* f(x) \alpha(D) - \mathbf{P} \sum x^* f(y) \alpha(P) \right| \\ & \leq \left| \mathbf{P} \sum x^* f(x) \alpha(D) - x_{(f,A)}^{**}(x^*) \right| \\ & \quad + \left| x_{(f,A)}^{**}(x^*) - \mathbf{P} \sum x^* f(y) \alpha(P) \right| \\ & < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

(Syarat cukup) Diberikan bilangan  $\varepsilon > 0$   
 sebarang dan  $x^* \in X^*$  maka terdapat fungsi  
 positif  $\delta$  pada  $[a, b]$  sehingga untuk  
 interval tertutup  $A \subset [a, b]$  dan  
 $\mathbf{D} = \{(D, x)\}$  dan  $\mathbf{P} = \{(P, y)\}$  masing-  
 masing partisi Perron  $\delta$ -fine pada  $A$   
 berlaku

$$\left| \mathbf{P} \sum x^* f(x) \alpha(D) - \mathbf{P} \sum x^* f(y) \alpha(P) \right| < \varepsilon.$$

Diambil  $\varepsilon = 1$  terdapat fungsi positif  $\delta_1$   
 pada  $[a, b]$  dengan sifat di atas.

Diambil  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  terdapat fungsi positif  $\delta_2$   
 pada  $[a, b]$  dengan  $\delta_2 \leq \delta_1$  dan memenuhi  
 sifat di atas.

Diambil  $\varepsilon = \frac{1}{n}$  terdapat fungsi positif  $\delta_n$   
 pada  $[a, b]$  dengan  $\delta_n \leq \delta_{n-1} \leq \dots \leq \delta_2 \leq \delta_1$   
 dan memenuhi sifat di atas.

Untuk  $\forall n \in \mathbb{N}$  dan  $x^* \in X^*$  didefinisikan

$$S_n = \mathbf{D}_n \sum x^* f(x) \alpha(D),$$

dengan jumlahan Riemann diambil atas  
 partisi Perron  $\delta_n$ -fine  $\mathbf{D}_n = \{(D, x)\}$  pada  
 $A$ .

Diambil sebarang  $m, n \in \mathbb{N}$  dengan  $m \geq n$ ,  
 maka untuk setiap partisi Perron  $\delta_m$ -fine  
 pada  $A$  merupakan partisi Perron  $\delta_n$ -fine  
 pada  $A$ .

Akibatnya untuk setiap partisi Perron  $\delta_m$ -  
 fine  $\mathbf{D}_m = \{(D, x)\}$  pada  $A$  dan sebarang  
 partisi Perron  $\delta_n$ -fine  $\mathbf{D}_n = \{(D, x)\}$  pada  
 $A$  berlaku

$$\left| S_m - S_n \right| =$$

$$\left| \mathbf{D}_m \sum x^* f(x) \alpha(D) - \mathbf{D}_n \sum x^* f(x) \alpha(D) \right| < \frac{1}{n}$$

Berdasarkan sifat Archimedean [13],  
 diberikan sebarang bilangan  $\varepsilon > 0$  maka  
 terdapat bilangan asli  $n_0$  sehingga  $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Selanjutnya jika  $m, n \geq n_0$  maka diperoleh

$$\left| S_m - S_n \right| < \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Hal ini berarti  $\{S_n\}$  barisan Cauchy di  $R$ .  
 Karena  $R$  lengkap berarti untuk setiap  
 barisan Cauchy di dalamnya adalah  
 konvergen, yaitu untuk setiap  $x^* \in X^*$  dan  
 $A \subset [a, b]$  di atas terdapat bilangan  
 $x_{(f,A)}^{**}(x^*) = S \in R$  sehingga  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ .

Dengan demikian untuk sebarang bilangan  
 $\varepsilon > 0$  di atas terdapat bilangan asli  $n_0^*$  dan  
 jika  $n \geq n_0^*$  berlaku

$$\left| S_n - S \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Diambil

$$\delta(x) = \min \left\{ \delta_{n_0}(x), \delta_{n_0^*}(x) \mid x \in [a, b] \right\}$$

Diperoleh  $\delta$  fungsi positif pada  $[a, b]$ .

Selanjutnya untuk setiap  $\mathbf{P} = \{(P, x)\}$  partisi Perron  $\delta$ -fine pada  $A$  berlaku

$$\begin{aligned} & \left| \mathbf{P} \sum x^* f(x) \alpha(P) - S \right| \\ & \leq \left| \mathbf{P} \sum x^* f(x) \alpha(P) - S_{n_0^*} \right| + \left| S_{n_0^*} - S \right| \\ & < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Hal ini berarti untuk setiap  $x^* \in X^*$  fungsi  $x^* f$  terintegral Henstock pada  $[a, b]$  dan terdapat vektor  $x_{(f,A)}^{**} \in X^{**}$  sehingga

$$x_{(f,A)}^{**}(x^*) = S = (H) \int_A x^* f.$$

Dengan kata lain,  $f \in HD[a, b]$ .

**Definisi 2.6 [8]** Diberikan  $f \in HD[a, b]$  dan  $\mathbf{I}(E)$  koleksi semua interval tertutup di dalam  $[a, b]$ . Fungsi  $F : \mathbf{I}(E) \rightarrow X$  dengan rumus

$$F(A) = x_{(f,A)}^{**} = (HD) \int_A f$$

dan  $F(\emptyset) = 0$ , untuk setiap  $A \in \mathbf{I}(E)$  disebut fungsi primitif-HD fungsi  $f$ .

**Contoh 2.7** Didefinisikan fungsi  $f : [a, b] \rightarrow X$  oleh

$$f(x) = c,$$

untuk setiap  $x \in [a, b]$  dan suatu konstanta  $c \in X$ , maka untuk setiap interval tertutup  $A \subset [a, b]$  fungsi primitif-HD fungsi  $f$  adalah  $F(A) = c\alpha(A)$ .

Berdasarkan Contoh 2.4 telah dibuktikan bahwa fungsi konstan  $f(x) = c$  terintegral Henstock-Dunford pada  $[a, b]$ . Hal ini berarti untuk setiap bilangan  $\varepsilon > 0$  dan  $x^* \in X^*$  terdapat fungsi positif  $\delta$  pada  $[a, b]$  dan jika  $A \subset [a, b]$  interval tertutup terdapat vektor  $x_{(f,A)}^{**} \in X^{**}$  sehingga

$$\begin{aligned} x_{(f,A)}^{**}(x^*) &= (H) \int_A x^* f \\ &= (H) \int_A x^*(c) \\ &= x^* c \alpha(A). \end{aligned}$$

Jadi untuk setiap  $x^* \in X^*$  dan  $A \subset [a, b]$  interval tertutup berlaku

$$x_{(f,A)}^{**}(x^*) = x^* c \alpha(A).$$

Jadi  $F(A) = x_{(f,A)}^{**} = \int_A f = c \alpha(A)$ .

Berdasarkan Definisi 2.6. maka fungsi  $F$  merupakan fungsi aditif.

**Akibat 2.8 [8]** Jika  $f \in HD[a, b]$  dengan  $F$  sebagai primitif-HDnya dan  $E_1, E_2, \dots, E_p$  interval-interval tertutup di dalam  $[a, b]$  yang tidak saling tumpang-

tindih dan  $[a, b] = \bigcup_{i=1}^p E_i$  maka

$$F([a, b]) = \sum_{i=1}^p F(E_i) = \sum_{i=1}^p x_{(f,E_i)}^{**}.$$

**Bukti:**

Karena  $f \in HD(E, \alpha)$  dengan  $F$  sebagai

primitif-HDnya,  $E = \bigcup_{i=1}^p E_i$  dengan

$E_i^0 \cap E_j^0 = \emptyset$  untuk setiap  $i \neq j$  maka diperoleh

$$\begin{aligned} F(E) &= F\left(\bigcup_{i=1}^p E_i\right) \\ &= x_{\left(f, \bigcup_{i=1}^p E_i, \alpha\right)}^{**} \\ &= x_{(f,E_1,\alpha)}^{**} + x_{(f,E_2,\alpha)}^{**} + \dots + x_{(f,E_p,\alpha)}^{**} \\ &= F(E_1) + F(E_2) + \dots + F(E_p) \\ &= \sum_{i=1}^p F(E_i) \\ &= \sum_{i=1}^p x_{(f,E_i,\alpha)}^{**}. \end{aligned}$$

Selanjutnya berdasarkan Definisi 2.1 dan Definisi 2.6 maka integral Henstock-Dunford pada  $[a, b]$  dapat dinyatakan seperti dalam teorema berikut.

**Teorema 2.9 [8]** Fungsi  $f \in HD[a, b]$  jika dan hanya jika terdapat fungsi aditif  $F$  pada  $[a, b]$  sehingga untuk setiap bilangan  $\varepsilon > 0$  dan  $x^* \in X^*$  terdapat fungsi positif  $\delta$  pada  $[a, b]$  dan jika  $A \subset [a, b]$  interval tertutup dan

$\mathbf{D} = \{(D, x)\}$  partisi Perron  $\delta$ -fine pada  $A$  berlaku

$$\left| \sum x^* f(x) \alpha(D) - x^* F(D) \right| < \varepsilon.$$

**Teorema 2.10 (Lemma Henstock)** Fungsi  $f \in HD[a, b]$  dengan fungsi primitif  $F$ , yaitu untuk setiap bilangan  $\varepsilon > 0$  dan  $x^* \in X^*$  terdapat fungsi positif  $\delta$  pada  $[a, b]$  sehingga jika  $A \subset [a, b]$  interval tertutup dan  $\mathbf{D} = \{(D, x)\}$  partisi Perron  $\delta$ -fine pada  $A$  berlaku

$$\left| \sum x^* f(x) \alpha(D) - x^* F(D) \right| < \varepsilon$$

maka untuk setiap jumlahan bagian  $\sum_1$  dari  $\mathbf{D}$  berlaku

$$\left| \sum_1 x^* f(x) \alpha(D) - x^* F(D) \right| < \varepsilon.$$

### 3. ESSENTIALLY SMALL RIEMANN SUMS

Berikut ini akan ditunjukkan bahwa syarat perlu dan cukup suatu fungsi terintegral Henstock-Dunford pada  $[a, b]$ , yaitu memenuhi sifat essentially small Riemann sums pada  $[a, b]$ .

Sifat Essentially small Riemann sums menyatakan bahwa fungsi yang terintegral Henstock-Dunford pada  $[a, b]$  dapat didekati dengan fungsi terintegral Lebesgue pada  $[a, b]$ . Sifat ini memperlemah syarat fungsi terintegral Lebesgue di dalam sifat functionally small Riemann sums yang merupakan fungsi non negatif [11,12].

**Definisi 3.1** Diberikan  $f : [a, b] \rightarrow X$  fungsi terukur pada  $[a, b]$ . Fungsi  $f$  dikatakan mempunyai sifat essentially small Riemann sums pada  $[a, b]$ , ditulis  $f \in ESRS[a, b]$ , jika untuk setiap bilangan  $\varepsilon > 0$ ,  $x^* \in X^*$ , dan interval tertutup  $A \subset [a, b]$  terdapat fungsi  $x^* g$  terintegral Lebesgue pada  $[a, b]$  dan terdapat fungsi positif  $\delta$  pada  $[a, b]$  sehingga jika  $\mathbf{D} = \{(D, x)\}$  partisi Perron  $\delta$ -fine pada  $A$  berlaku

$$\left| \sum_{x^* f(x) \neq x^* g(x)} x^* f(x) \alpha(D) \right| < \varepsilon.$$

**Teorema 3.2** Jika fungsi  $f \in HD[a, b]$  maka  $f \in ESRS[a, b]$ .

**Bukti:**

Diketahui  $f \in HD[a, b]$  berarti untuk setiap bilangan  $\varepsilon > 0$ ,  $x^* \in X^*$ , dan interval tertutup  $A \subset [a, b]$  terdapat fungsi positif  $\delta$  pada  $[a, b]$  sehingga jika  $\mathbf{D} = \{(D, x)\}$  partisi Perron  $\delta$ -fine pada  $A$  berlaku

$$\left| \sum x^* f(x) \alpha(D) - (H) \int_A x^* f \right| < \varepsilon.$$

Menurut Teorema [11] karena  $f \in HD[a, b]$  maka  $f \in FRSRS[a, b]$ , yaitu untuk setiap bilangan  $\varepsilon > 0$ ,  $x^* \in X^*$ , dan interval tertutup  $A \subset [a, b]$  terdapat fungsi non negatif  $x^* h$  terintegral Lebesgue pada  $[a, b]$  dan terdapat fungsi positif  $\delta$  pada  $[a, b]$  sehingga jika  $\mathbf{D} = \{(D, x)\}$  partisi Perron  $\delta$ -fine pada  $A$  berlaku

$$\left| \sum_{|x^* f(x)| > x^* h(x)} x^* f(x) \alpha(D) \right| < \varepsilon.$$

Didefinisikan fungsi  $x^* g$  oleh

$$x^* g(x) = \begin{cases} x^* f(x), & \text{jika } |x^* f(x)| \leq x^* h(x) \\ 0, & \text{jika } |x^* f(x)| > x^* h(x) \end{cases}$$

untuk setiap  $x \in [a, b]$ .

Diperoleh fungsi  $x^* g$  terintegral Lebesgue pada  $[a, b]$ . Akibatnya untuk setiap bilangan  $\varepsilon > 0$ ,  $x^* \in X^*$ , dan interval tertutup  $A \subset [a, b]$  di atas dan sebarang  $\mathbf{D} = \{(D, x)\}$  partisi Perron  $\delta$ -fine pada  $A$  berlaku

$$\left| \sum_{x^* f(x) \neq x^* g(x)} x^* f(x) \alpha(D) \right|$$

$$= \left| \mathbf{P} \sum_{x^* f(x) > x^* h(x)} x^* f(x) \alpha(D) \right| < \varepsilon.$$

Jadi  $f \in ESRS[a, b]$ .

**Teorema 3.3** Jika fungsi  $f \in ESRS[a, b]$  maka  $f \in HD[a, b]$ .

**Bukti:**

Diketahui  $f \in ESRS[a, b]$ , berarti untuk setiap bilangan  $\varepsilon > 0$ ,  $x^* \in X^*$ , dan interval tertutup  $A \subset [a, b]$  terdapat fungsi  $x^* g$  terintegral Lebesgue pada  $[a, b]$  dan terdapat fungsi positif  $\delta_*$  pada  $[a, b]$  sehingga jika  $\mathbf{D}_* = \{(D, x)\}$  partisi Perron  $\delta_*$ -fine pada  $A$  berlaku

$$\left| \mathbf{P}_* \sum_{x^* f(x) \neq x^* g(x)} x^* f(x) \alpha(D) \right| < \varepsilon.$$

Fungsi  $x^* g$  terintegral Lebesgue pada  $[a, b]$  maka terdapat fungsi positif  $\delta^*$  pada  $[a, b]$  sehingga jika  $\mathbf{D}_1^*$  dan  $\mathbf{D}_2^*$  partisi Perron  $\delta^*$ -fine pada  $A$  berlaku

$$\left| \mathbf{P}_1^* \sum x^* f(x) \alpha(D) - \mathbf{D}_2^* \sum x^* f(x) \alpha(D) \right| < \varepsilon$$

untuk setiap  $x^* \in X^*$  dan interval tertutup  $A \subset [a, b]$  di atas.

Diambil fungsi positif  $\delta$  pada  $[a, b]$  dengan

$$\delta(x) = \min \{ \delta_*(x), \delta^*(x) \},$$

untuk setiap  $x \in [a, b]$ .

Akibatnya, untuk sebarang  $\mathbf{D}_1$  dan  $\mathbf{D}_2$  partisi Perron  $\delta$ -fine pada  $A$  berlaku

$$\begin{aligned} & \left| \mathbf{P}_1 \sum x^* f(x) \alpha(D) - \mathbf{D}_2 \sum x^* f(x) \alpha(D) \right| \\ & \leq \left| \mathbf{P}_1 \sum_{x^* f(x) \neq x^* g(x)} x^* f(x) \alpha(D) \right| \\ & \quad + \left| \mathbf{D}_2 \sum_{x^* f(x) \neq x^* g(x)} x^* f(x) \alpha(D) \right| \\ & \quad + \left| \mathbf{P}_1 \sum_{x^* f(x) = x^* g(x)} x^* f(x) \alpha(D) \right| \end{aligned}$$

$$+ \left| \mathbf{D}_2 \sum_{x^* f(x) = x^* g(x)} x^* f(x) \alpha(D) \right|$$

$$< \varepsilon + \varepsilon$$

$$+ \left| \mathbf{P}_1 \sum x^* g(x) \alpha(D) - \mathbf{D}_2 \sum x^* g(x) \alpha(D) \right| < 3\varepsilon.$$

Menurut Kriteria Cauchy,  $f \in HD[a, b]$ .

Jadi  $f \in HD[a, b]$ .

**Akibat 3.4** Fungsi  $f \in HD[a, b]$  jika dan hanya jika  $f \in ESRS[a, b]$ .

Akibat 3.4 merupakan syarat perlu dan cukup suatu fungsi terukur terintegral Henstock-Dunford pada  $[a, b]$ , yaitu memenuhi sifat essentially small Riemann sums pada  $[a, b]$ .

#### 4. PENUTUP

Berdasarkan hasil pembahasan dapat disimpulkan bahwa syarat perlu dan cukup suatu fungsi terukur terintegral Henstock-Dunford pada  $[a, b]$  adalah fungsi tersebut bersifat essentially small Riemann sums pada  $[a, b]$ .

#### 5. DAFTAR PUSTAKA

- [1] Gordon, R.A., (1994), *The Integral of lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*, Mathematical Society, USA.
- [2] Lee P.Y., (1989), *Lanzhou Lectures on Henstock Integration*, World Scientific, Singapore.
- [3] Boccuto, A., Skvortsov, A.V., (2004), Henstock-Kurzweil Type Integration of Riesz-Space-Valued Functions and Applications to Walsh Series, *Real Analysis Echange*, 29(1): 419-439.
- [4] Heikkila, S., (2011), Monotone Convergence Theorems for Henstock-Kurzweil Integrable Functions and Applications, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 377(1): 286-295.
- [5] Indrati, Ch.R., Budi Surodjo, (2000), *Aplikasi Integral Henstock-Kurzweil pada Medan Vektor*, Lembaga Penelitian UGM, Yogyakarta.

- [6] Schwabik, S., Guoju, Ye. (2004), *Topics in Banach Space Integration*, Manuscript in Preparation.
- [7] Indrati, Ch. R. (2002), *Integral Henstock-Kurzweil di dalam Ruang Euclide Berdimensi-n*, Disertasi, Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta.
- [8] Guoju, Ye., Tianqing, An., (2001), On Henstock-Dunford and Henstock-Pettis Integrals, *IJMMS*, 25(7): 467-478.
- [9] Saifullah. (2003), *Integral Henstock-Dunford pada Ruang Euclide  $i^n$* , Tesis, Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta.
- [10] Solikhin, Sumanto, Khabibah, (2013), Locally dan Globally Small Riemann Sums Fungsi Terintegral Henstock-Dunford pada  $[a,b]$ , *Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika*, 9 November 2013, A.8 halaman 55-64, ISBN 978-979-16353-9-4.
- [11] Indrati, Ch.R., dkk. (2003), Convergence Theorems for The Henstock Integral Involving Small Riemann Sums, *Real Analysis Echange*, 29(1): 481-488.
- [12] Solikhin, Sumanto, Khabibah, (2012), Functionally Small Riemann Sums Fungsi Terintegral Henstock-Dunford pada  $[a,b]$ , *Jurnal Sains dan Matematika*, 20(3): -
- [13] Bartle, R. & Sherbert, D. (1982), *Introduction to Real Analysis*, John Wiley & Sons, New York.
-