

# PENYELESAIAN MODEL DISTRIBUSI SUHU BUMI DI SEKITAR SUMUR PANAS BUMI DENGAN METODE KOEFISIEN TAK TENTU

Lutfiyatun Niswah<sup>1</sup>, Widowati<sup>2</sup>, Djuwandi<sup>3</sup>  
<sup>1,2,3</sup>Jurusan Matematika FSM Universitas Diponegoro  
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H. Semarang 50275  
<sup>1</sup>elnieswah@gmail.com, <sup>2</sup>wiwied\_mathundip@yahoo.com

**Abstract.** Mathematical model in this paper describes the formation temperature distribution related to the process of heat transfer in geothermal wellbore. The model of formation temperature is based on the single thermal conduction equation. The form of the model is ordinary differential equation. Further, we derived an analytical solution with the method of undetermined coefficient. The simulation is done to determine the model's behavior based on the secondary data. Based on the simulation result is found that if the increasing depth hence the temperature increases.

**Keywords :** heat transfer, formation temperature distribution, geothermal wellbore, analytical solution

## 1. PENDAHULUAN

Sumber energi terbaru yang sedang dikembangkan sekarang ini adalah sumber energi *geothermal* atau panas bumi. Secara singkat, panas bumi didefinisikan sebagai panas yang berasal dari dalam bumi. Sumber daya energi panas bumi dapat ditemukan pada air dan batuan panas di dekat permukaan bumi, sampai beberapa kilometer di bawah permukaan bahkan jauh lebih dalam lagi sampai pada sumber panas yang ekstrim dari batuan yang mencair atau magma [1].

Sistem panas bumi di Indonesia, umumnya merupakan sistem *hydrothermal*. Sistem *hydrothermal* mempunyai suhu tinggi yakni lebih dari 225°C, namun beberapa diantaranya mempunyai suhu sedang, berkisar 150°C - 225°C. Pada dasarnya sistem panas bumi jenis *hydrothermal* terbentuk sebagai hasil perpindahan panas dari suatu sumber panas ke sekelilingnya yang terjadi secara konduksi dan secara konveksi. Perpindahan panas secara konduksi terjadi melalui batuan, sedangkan perpindahan panas secara konveksi terjadi antara air dengan suatu sumber panas [2].

Setiap proses produksi selalu disertai perpindahan panas antara fluida dengan bumi sebagai akibat dari perbedaan suhu antara bumi dengan fluida yang mengalir

[3]. Kehilangan panas dari fluida yang mengalir dalam sumur panas bumi dapat berpengaruh secara signifikan pada desain fasilitas permukaan yang berguna untuk menghasilkan listrik serta untuk keperluan lainnya [4]. Dalam kasus ini hanya akan dibahas perpindahan panas di sumur produksi panas bumi sistem terbuka yakni model distribusi suhu bumi di sekitar sumur panas bumi yang kemudian akan dicari solusi analitik dengan kondisi awal.

## 2. HASIL DAN PEMBAHASAN

### 2.1 Perpindahan Panas

Perpindahan panas fluida yang mengalir dari dasar sumur ke permukaan melalui tabung menyebabkan terjadinya penurunan suhu fluida dalam tabung [5]. Kehilangan panas dari fluida sumur bergantung pada distribusi suhu pada bumi [6].

Kehilangan panas dari bumi di sekitar sumur dapat mempengaruhi suhu fluida di dalam sumur dan mengubah distribusi suhu fluida sepanjang lubang sumur [7]. Sehingga untuk mengetahui distribusi suhu fluida harus terlebih dahulu mengetahui distribusi suhu bumi di sekitar sumur.

Asumsi-asumsi yang digunakan untuk menyederhanakan model distribusi suhu sebagai berikut [4]:

1. Aliran panas dalam tabung dalam kondisi *steady* dan satu dimensi

2. Aliran panas *uncondensed* (tidak kental)
3. Koordinat hanya pada sumbu z (vertikal)

## 2.2 Model Distribusi Suhu Bumi di Sekitar Sumur

Secara umum, penelitian tentang proses perpindahan panas dari sumur panas bumi ke bumi sekitarnya dianggap sebagai proses konduksi panas tunggal. Salah satu elemen yang penting dalam perpindahan panas pada sekitar adalah suhu awal bumi. Suhu awal bumi tanpa ada gangguan merupakan parameter *thermophysical* yang sangat diperlukan untuk kasus perpindahan panas di sumur yang dalam [4].

Model distribusi suhu dalam lapisan kerak bumi dengan kondisi *steady* satu dimensi didasarkan atas persamaan konduksi panas [4]:

$$-\frac{d^2 T}{dz^2} + \frac{Q}{k} = 0 \quad (2.1)$$

dengan kondisi awal ketika di permukaan bumi ( $T = T_0$ ):

$$T(0) = T_0$$

$$-\frac{dT}{dz}(0) = -q \quad (2.2)$$

Keterangan :

- $T$  : suhu bumi ( $^{\circ}\text{C}$ ),
- $T_0$  : suhu permukaan tanah ( $^{\circ}\text{C}$ ),
- $q$  : perubahan panas (*heat flux*) di permukaan ( $\text{W/m}^2$ ),
- $k$  : konduktifitas panas di permukaan ( $\text{W/m}^{\circ}\text{C}$ ),
- $z$  : kedalaman (m),
- $\alpha$  : difusivitas panas ( $\text{m}^2/\text{s}$ ),
- $\beta$  : faktor pelemahan produksi (m),
- $Q$  : Produksi panas di permukaan ( $\text{W/m}^3$ ).

## 2.3 Solusi Analitik Model Distribusi Suhu Bumi

Untuk memudahkan dalam mencari solusi, Persamaan (2.1) akan diurai ke dalam bentuk yang lebih sederhana, sehingga menjadi berikut :

$$\frac{d^2 T}{dz^2} - \frac{Q}{k} = 0 \quad (2.3)$$

Persamaan (2.3) merupakan persamaan diferensial biasa linier orde dua derajat satu nonhomogen dengan variabel bebas z (kedalaman) dan variabel tak bebasnya (suhu bumi). Oleh karena Persamaan (2.3) merupakan persamaan diferensial nonhomogen, maka solusi umum persamaan ini merupakan jumlahan dari dua solusi, yakni solusi homogen dan solusi partikular. Untuk mendapatkan solusi homogen, Persamaan (2.3) menjadi :

$$\frac{d^2 T}{dz^2} = 0 \quad (2.4)$$

Persamaan (2.4) merupakan persamaan diferensial homogen orde dua derajat satu, sehingga untuk mencari solusi ini persamaan akan direduksi menjadi persamaan orde satu menggunakan pemetaan sederhana.

Substitusi  $u = \frac{dT}{dz}$ ,  $\frac{du}{dz} = \frac{d^2 T}{dz^2} = 0$ , sehingga Persamaan (2.4) menjadi :

$$\frac{du}{dz} = 0 \quad (2.5)$$

dengan mengintegrasikan kedua ruas Persamaan (2.5), diperoleh :

$$u = \frac{C_1}{1 + \beta z} \quad (2.6)$$

Misalkan  $C_1 = C_1$ , dengan  $C_1$  merupakan konstanta sebarang maka Persamaan (2.6) menjadi :

$$u = C_1 (1 + \beta z)^{-1} \quad (2.7)$$

Kemudian mengembalikan Persamaan (2.7) ke substitusi awal, sehingga persamaan berubah menjadi :

$$\frac{dT}{dz} = C_1 (1 + \beta z)^{-1} \quad (2.8)$$

dengan membentuk persamaan diferensial terpisah kemudian mengintegrasikan pada kedua ruas, Persamaan (2.8) menjadi :

$$\ln(1 + \beta z) = \frac{C_1}{\beta} + C_2 \quad (2.9)$$

Persamaan (2.9) merupakan solusi homogen dari Persamaan (2.3) dimana  $\alpha$  dan  $\beta$  adalah konstanta sebarang yang akan dicari setelah mendapatkan solusi umum. Selanjutnya akan dicari solusi partikular dengan menggunakan metode koefisien tak tentu. Berdasarkan hasil solusi homogen Persamaan (2.9) maka pemisalan fungsi percobaan sebagai berikut :

$$T(r) = A_1 J_0(\alpha r) + A_2 Y_0(\alpha r) + A_3 J_0(\beta r) + A_4 Y_0(\beta r) \quad (2.10)$$

Persamaan (2.10) merupakan fungsi percobaan dengan K adalah koefisien tak tentu. Diperoleh nilai  $\alpha = \sqrt{\frac{h}{K}}$  sehingga diperoleh solusi partikular dari Persamaan (2.3).

$$T(r) = A_1 J_0(\alpha r) + A_2 Y_0(\alpha r) + A_3 J_0(\beta r) + A_4 Y_0(\beta r) \quad (2.11)$$

Solusi umum Persamaan (2.3) dengan  $T(r)$  adalah suhu bumi yang merupakan fungsi dari  $r$  (kedalaman) sebagai berikut :

$$T(r) = \frac{1}{\alpha} \left[ \frac{A_1 J_0(\alpha r) + A_2 Y_0(\alpha r)}{r} - 1 \right] \quad (2.12)$$

Dengan kondisi yang telah diketahui sebelumnya, diperoleh nilai  $\alpha$  dan  $\beta$  pada Persamaan (2.2), substitusikan kembali ke Persamaan (2.12) sehingga diperoleh solusi khusus Persamaan (2.5),

$$T(r) = \frac{1}{\alpha} \left[ \frac{A_1 J_0(\alpha r) + A_2 Y_0(\alpha r)}{r} - 1 \right] \quad (2.13)$$

Persamaan (2.13) merupakan solusi analitik distribusi suhu pada bumi di sekitar sumur dengan  $z$  (kedalaman) sebagai variabel bebas.

## 2.4 Hasil Simulasi

Pada bagian ini diberikan simulasi model untuk menyelidiki perubahan suhu bumi sekitar sumur pada proses perpindahan panas di sumur panas bumi. Penerapan model distribusi suhu bumi di sekitar sumur menggunakan data sekunder yaitu penelitian perpindahan panas pada sumur panas bumi

dengan sekitarnya tahun 2013 oleh Fuzong Zhou [4] yang kemudian akan diselesaikan secara numerik dengan menggunakan program maple.

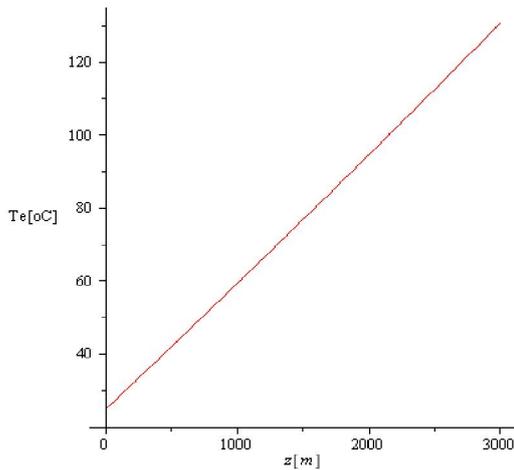
**Tabel 2.1.** Nilai Parameter Perpindahan Panas Pada Sumur Panas Bumi [4]

Parameter	Keterangan	Nilai	Satuan
	Difusivitas panas	0,000786	$^{\circ}\text{C}^{-1}$
	Suhu permukaan	25	$^{\circ}\text{C}$
	Faktor pelemahan produksi	1215	m
	Konduktifitas panas pada permukaan	3,22	$\text{Wm}^{-1}\text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$
	Produksi panas di permukaan	$1,28 \times 10^3$	$\text{Wm}^{-2}$
	Aliran panas di permukaan	0.11	$\text{Wm}^{-2}$
	kedalaman	3000	m

Nilai parameter yang telah diperoleh kemudian disubstitusikan ke Persamaan (2.3), solusi khusus model distribusi suhu bumi di sekitar sumur dengan menggunakan bantuan software maple sebagai berikut.

$$T(r) = \frac{1}{\alpha} \left[ \frac{A_1 J_0(\alpha r) + A_2 Y_0(\alpha r)}{r} - 1 \right] \quad (2.14)$$

Berdasarkan data yang diperoleh, persamaan distribusi suhu bumi (14) dapat dibuat grafik perubahan suhu bumi terhadap kedalaman sumur, seperti diberikan pada Gambar 2.1.



**Gambar 2.1** Perubahan suhu bumi ( $T_e$ ) terhadap kedalaman ( $z$ )

Gambar 2.1 mengindikasikan bahwa perubahan suhu bumi mengalami kenaikan seiring dengan meningkatnya kedalaman sumur. Selanjutnya, dapat diprediksikan suhu bumi di dasar sumur. Berdasarkan solusi khusus model distribusi suhu bumi dapat di perkiraan suhu bumi di dasar sumur yakni pada kedalaman 3000 meter berada pada suhu  $130,6^{\circ}\text{C}$ . Dari hasil perhitungan suhu bumi pada kondisi lithologi dapat disajikan dalam bentuk tabel sebagai berikut.

**Tabel 2.2.** Perhitungan suhu bumi berdasarkan kondisi lithologi

Kedalaman ( $z$ ) meter	Kondisi Lithologi	Suhu Bumi ( $T_e$ ) $^{\circ}\text{C}$
0	Tanah liat	25
200	Tanah liat	31,8
400	Batu kerikil	38,7
1000	Batu pasir/paras	59,5
1500	Batu serpih	76,9
2000	Batu gamping/kapur	94,6
2400	Batu pasir/paras	108,9
2800	Batu serpih	123,4
3000	Batu besi	130,6

#### 4. PENUTUP

Model distribusi suhu bumi didasarkan atas persamaan konduksi panas. Model distribusi suhu bumi tersebut merupakan persamaan diferensial biasa. Persamaan distribusi suhu kemudian diselesaikan untuk mendapatkan solusi analitik dengan batas kondisi yang telah diberikan. Solusi analitik model distribusi suhu bumi diperoleh dengan menggunakan metode koefisien tak tentu.

Dari hasil simulasi model distribusi suhu bumi menunjukkan bahwa perubahan suhu bumi akan meningkat apabila sumur semakin dalam. Dari studi kasus, diperoleh untuk dasar sumur dengan kedalaman 3000 meter, maka suhu bumi mencapai  $130,6^{\circ}\text{C}$ .

#### 5. DAFTAR PUSTAKA

- [1]. A. Afif dan W. Citrosiswoyo., (2009), *Geothermal dapat Mengurangi Ketergantungan Bahan Bakar Fosil Dalam Menyediakan Listrik Negara*. Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
- [2]. Nenny Saptadji., (2008), *Sekilas Tentang Panas Bumi*. Bandung : Institut Teknologi Bandung.
- [3]. Codo, F.P., Adomou, A. dan Adanhounme, V., (2012), *Analytical Method For Calculation Of Temperature Of The Produced Water In Geothermal Wells*. International Journal of Scientific and Engineering Research, 3(9), September 2012.
- [4]. Zhou, Fuzong., (2013), *Research On Heat Transfer In Geothermal Wellbore And Surrounding*. Berlin : Disertasi Fakultas Perencanaan Pembangunan Dan Lingkungan, Technical University of Berlin.
- [5]. Pudjo Sukarno dan Albertus Retnanto., (1992), *Distribusi Temperatur Transien Aliran Gas Dalam Tubing*. Bandung : Proccedings Simposium Teknologi dan Gas dan kongres III IATMI.
- [6]. Hasan, A.R. dan Kabir, C.S., (1991), *Heat Transfer During Two-Phase Flow In Wellbore: Part I Formation*

*Temperatur*. Journal of Society of  
Petroleum Engineers (SPE) 22866.

[7]. Laderian, A., (2000), *Prediction Of  
Temperature Profile In Oil Wells*.  
International Journal of Engineering  
13(1), Februari 2000 -77.

---