PELABELAN GRACEFUL GENAP BARU PADA GRAF $C_m \cup P_n$

Lucia Ratnasari[1], Bayu Surarso[2], R. Heri S.U[3]
[1,2,3]Jurusan Matematika FMIPA UNDIP
Jl. Prof. H. Soedarto, S. H, Tembalang, Semarang.

Abstrak. Pelabelan Graceful pada graf $G = (V, E)$ dengan q sisi merupakan pemetaan injektif $f : V(G) \rightarrow \{0,1,2,..., 2q\}$, yang mengakibatkan pemetaan $f^* : E(G) \rightarrow \{1,2,..., q\}$, yang didefinisikan dengan $f^*(uv) = |f(u) - f(v)|$ bersifat bijektif. Graf yang memenuhi pelabelan graceful disebut graf graceful. T. Mahalaksmi Senthil Kumar, T. Abarna Parthiban dan T. Vanadhi [4], membuktikan graf $C_m \cup P_n$ merupakan graf graceful genap untuk *m* ganjil yang memenuhi kondisi tertentu. Marry U dan Saranya D [2], membuktikan bahwa graf $C_m \cup P_n$ merupakan graf graceful genap untuk *m* genap yang memenuhi kondisi tertentu. Pelabelan graceful genap didefinisikan sebagai pemetaan injektif $f : V(G) \rightarrow \{0,1,2,..., 2q-1\}$ yang mengakibatkan pemetaan $f^* : E(G) \rightarrow \{2,..., 2q-2\}$, yang didefinisikan $f^*(uv) = |f(u) - f(v)|$ bersifat bijektif. Tetapi pada pembuktian [4] dan [2], syarat injektif dan bijektif fungsinya tidak terpenuhi. Artikel ini mendefinisikan kembali pelabelan graceful genap pada graf $C_m \cup P_n$ sehingga syarat injektif dan bijektif fungsinya terpenuhi.

Kata kunci : pelabelan graceful, graceful ganjil, graceful genap, graceful ganjil genap.

1. PENDAHULUAN

Pelabelan Graceful merupakan pemetaan injektif $f : V \rightarrow \{0,1,2,..., 2q\}$ sehingga mengakibatkan fungsi $f^* : E \rightarrow \{1,2,..., q\}$ yang didefinisikan $f^*(uv) = |f(u) - f(v)|$ yang bijektif. Graf yang memenuhi pelabelan graceful disebut graf graceful. Sejak Alex Rosa menemukan pelabelan graf graceful banyak peneliti yang tertarik mengkonstruksi pelabelan graceful dan variasinya.

Pada 1991, Gnanajothi memperkenalkan pelabelan graf graceful ganjil. Pelabelan graceful ganjil merupakan pemetaan injektif $f : V \rightarrow \{0,1,2,..., 2q-1\}$ sehingga mengakibatkan fungsi $f^* : E \rightarrow \{1,3,5,..., 2q-1\}$ yang didefinisikan $f^*(uv) = |f(u) - f(v)|$ yang bijektif. Pada tahun 2010 M.Ibrahim Mousa [3] membuktikan bahwa graf $C_m \cup P_n$ merupakan graf graceful ganjil untuk m genap.

Pada tahun 2011 T. Mahalaksmi Senthil Kumar, T. Abarna Parthiban dan T. Vanadhi [4] membuktikan graf $C_m \cup P_n$ merupakan graf graceful genap untuk m ganjil yang memenuhi kondisi tertentu. Selanjutnya Marry U dan Saranya D. [2] pada tahun 2013 membuktikan bahwa graf $C_m \cup P_n$ merupakan graf graceful genap untuk m genap yang memenuhi kondisi tertentu. Pelabelan Graceful genap didefinisikan pemetaan injektif $f : V \rightarrow \{0,1,2,..., 2q-1\}$ sehingga mengakibatkan fungsi $f^* : E \rightarrow \{2,4,6,..., 2q-2\}$ yang didefinisikan $f^*(uv) = |f(u) - f(v)|$ yang bijektif. Tetapi pada pembuktian [4] dan [2] syarat fungsi injektif dan fungsi bijektif tidak terpenuhi.

Oleh karena itu pada tulisan ini didefinisikan kembali pelabelan graceful genap sehingga syarat fungsi injektif dan bijektifnya terpenuhi. Penulis mengkaji kembali pelabelan graceful genap pada graf $C_m \cup P_n$ untuk m ganjil dan m genap yang memenuhi kondisi tertentu dengan menggunakan definisi yang baru. Dalam tulisan ini pengertian dan definisi-definisi yang berkaitan dengan graf menggunakan referensi [5].

2. PELABELAN GRACEFUL GENAP PADA GRAF $C_m \cup P_n$ UNTUK *m* GANJIL

Sebelum membahas tentang pelabelan graceful genap pada graf $C_m \cup P_n$ untuk *m* ganjil akan didefinisikan terlebih dahulu pelabelan graceful dan graceful genap pada graf.

Definisi . [1] *Diberikan graf* $f^*: E(G) \rightarrow \{1,2,..., q\}$. *Fungsi f disebut pelabelan graceful pada graf G jika pemetaan injektif* $f: V(G) \rightarrow \{0,1,2,..., 2q\}$ *dengan adalah banyaknya sisi, mengakibatkan pemetaan sisi* $f^*: E(G) \rightarrow \{1,2,..., q\}$ yang didefinisikan dengan $f^*(xy) = |f(x) - f(y)|, xy \in E(G)$ *merupakan pemetaan bijektif.*

Graf yang memenuhi pelabelan graceful disebut graf graceful.

Definisi 2.2 *Diberikan graf* $f^*: E(G) \rightarrow \{1,2,..., q\}$. *Fungsi f disebut pelabelan graceful genap pada graf G jika pemetaan injektif* $f: V(G) \rightarrow \{0,1,2,..., 2q+1\}$ *dengan adalah banyaknya sisi, mengakibatkan pemetaan sisi* $f^*: E(G) \rightarrow \{2,4,6..., 2q\}$ *yang didefinisikan dengan* $f^*(xy) = |f(x) - f(y)|, xy \in E(G)$ *merupakan pemetaan bijektif.*

Graf yang memenuhi pelabelan graceful genap disebut graf graceful genap.

Berikut diberikan teorema tentang pelabelan graceful genap pada graf $C_m \cup P_n$ untuk *m* ganjil dan memenuhi kondisi tertentu

Teorema 2.1 *Jika diberikan bilangan bulat positif k dan* $m = 2k+1$ *maka graf* $C_m \cup P_n$ *merupakan graf graceful genap untuk* $n = m+2$.

Bukti:

Misal diberikan graf $C_m \cup P_n$ dengan $(\ ) = \{ \ , \ , \dots , \ \}$ dan $(\ ) = \{ \ , \ , \dots , \ \}$ sehingga diperoleh $= \ + \ + 1$. Untuk setiap $\ , \ \in$ *$V(C_m \cup P_n)$* didefinisikan pelabelan titiknya sebagai berikut :

Pelabelan titik pada

$(\ ) =$

$= 1,3,5, \dots ,$

$(\ ) = 2 \ + 1 - 2$

$= 0,1,2,3 \dots ,$ ——

Pelebelan titik pada

Untuk $= 2 \ + 1$ dan *k* ganjil

$(\ ) = 2 \ =$ $0,1,2, \dots ,$ ——

$(\ ) = 2 \ - 2$ dengan i = 0 1 , ..., ——

$(\ ) = 2 \ - 2 \ - 2$ dengan i = ——, … , ——

Untuk m = 2k+1 untuk k genap dan n = m+2

$(\ ) = 2 \ - 2 \ =$ $0,1,2, \dots ,$ ——

$(\ ) = 2$ dengan i = 0 1 , ..., ——

$(\ ) = 2 \ + 2$ dengan i = ——, … , ——

Pelabelan titik tersebut mengakibatkan pelabelan sisi yang didefinisikan dengan

$(\ ) = | \ (\ ) - \ (\ )|, \ xy \in E(C_m \cup P_n)$

mempunyai nilai sebagai berikut.

Pelabelan sisi pada

$(\ ) = 2 \ + 2 - 2$

$= 1,2, \dots , \ - 1$

$(\ ) = \ - 1$

Pelabelan sisi pada

$(\ ) = 2(\ + 1) - 2$

$= 1,2, \dots , \ - 1$

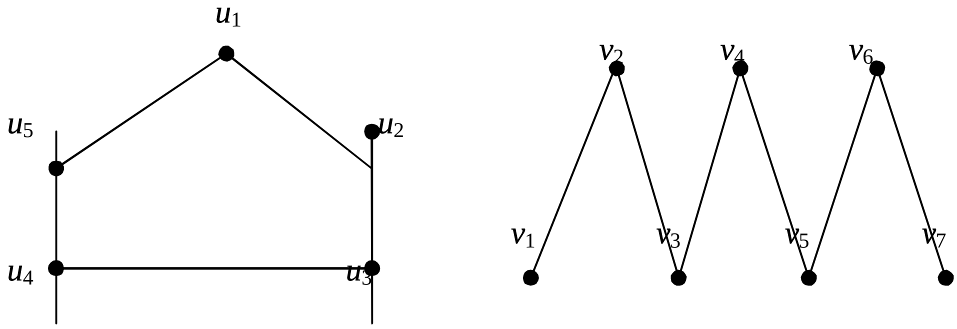
$(\ ) = 2 \ - 2$

$= \ , \dots , \ - 1$

Dari hasil perhitungan, terlihat bahwa, pemetaan injektif $f: V(C_m \cup P_n) \rightarrow \{0,1,2,..., q+1\}$ mengakibatkan pemetaan sisi $f^*: E(C_m \cup P_n) \rightarrow \{2,4,6..., 2q\}$ bersifat bijektif, sehingga pelabelan sisi yang didefinisikan dengan $(\ ) = | \ (\ ) - \ (\ )|$, menghasilkan label sisi yang berbeda untuk setiap $xy \in E(C_m \cup P_n)$.

Jadi pemetaan *f* merupakan pelabelan graceful genap, oleh karenanya graf $C_m \cup P_n$ merupakan graf graceful genap untuk $m = 2k + 1$ dengan k bilangan bulat positif dan $n = m + 2$ ■

Contoh 2.1 Diberikan graf $C_5 \cup P_7$ dengan ( ) = { , , … , } dan ( ) = { , , … , } sehingga $m = 5, k = 2, n = 7$ dan $q = 12$



Gambar 2.1 Graf $C_5 \cup P_7$

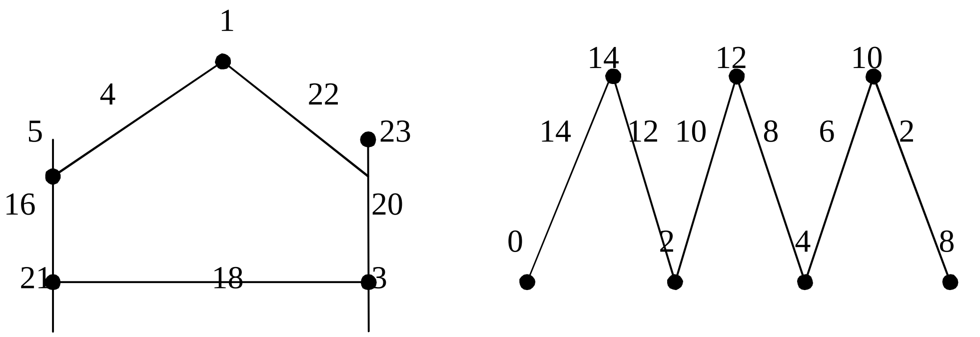
Pelabelan titik pada graf
( ) = 1 ( ) = 23
( ) = 3 ( ) = 21 ( ) = 5

Pelabelan titik pada graf
( ) = 0 ( ) = 14
( ) = 2 ( ) = 12 ( ) = 4
( ) = 10 ( ) = 8

Pelabelan titik mengakibatkan pelabelan sisi sebagai berikut

Pelabelan sisi pada graf
( ) = 22 ( ) = 20
( ) = 18 ( ) = 16
( ) = 4

Pelabelan sisi pada graf
( ) = 14 ( ) = 12
( ) = 10 ( ) = 8
( ) = 6 ( ) = 2



Gambar 2.2 Pelabelan graceful genap untuk graf $C_5 \cup P_7$

3. PELABELAN GRACEFUL GENAP PADA GRAF $C_m \cup P_n$ UNTUK *m* GENAP

Berikut diberikan teorema tentang pelabelan graceful genap pada graf $C_m \cup P_n$ untuk *m* genap dan memenuhi kondisi tertentu

Teorema 3.1 *Jika diberikan bilangan bulat positif k dan* $m = 2k + 2$ *maka graf* $C_m \cup P_n$ *merupakan graf graceful genap untuk* $n = m + 2$.

Bukti:

Misal diberikan graf $C_m \cup P_n$ dengan ( ) = { , , … , } dan ( ) = { , , … , } sehingga diperoleh

$q = m + n - 1$. Untuk setiap , ∈ V($C_m \cup P_n$) didefinisikan pelabelan titiknya sebagai berikut.

Pelabelan titik pada

( ) =

= 1,3,5, … , − 1

( ) = 2 + 1 − 2

= 0,2,4, … , − 2

( ) = + 1

Pelebelan titik pada

Untuk $m = 2k + 2$ dan k ganjil

( ) = 2 = 0,1,2, …, ⌈ ⌉

( ) = 2 + 2 dengan i = ⌈ ⌉,...,

( ) = 2 − 2 dengan i =0,1,2, … ,

Untuk m = 2k+2 untuk k genap dan n = m+2

( ) = 2 = 0,1,2, … ,

( ) = 2 + 2 − 2 dengan i = 0 1 ,2, ...,

( ) = 2 − 2 dengan i = ⌈ ⌉, … ,

Pelabelan titik tersebut mengakibatkan pelabelan sisi yang didefinisikan dengan

( ) = | ( ) − ( )|, $xy \in E(C_m \cup P_n)$

mempunyai nilai sebagai berikut.

Pelabelan sisi pada

( ) = 2 + 2 − 2

= 1,2, … ,

( ) = 2

( ) =

Pelabelan sisi pada

( ) = 2(+ 2) − 2

= 1,2, … , −

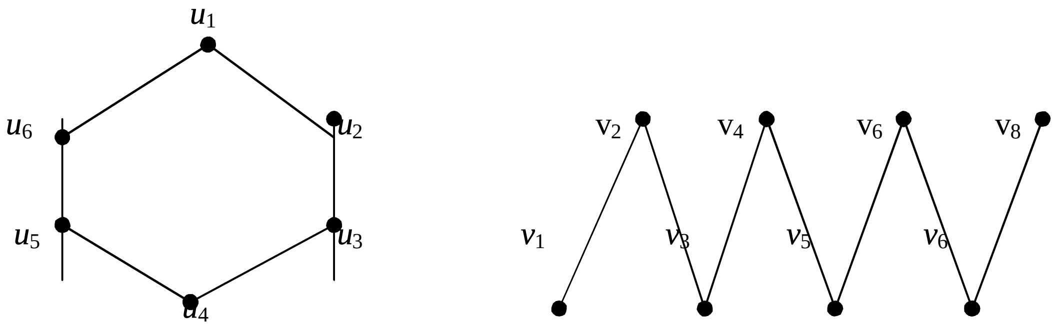
( ) = 2 − 2

= − + 1, … ,

Dari hasi perhitungan, terlihat bahwa, pemetaan injektif $f : V(C_m \cup P_n) \rightarrow \{0,1,2,..., q+1\}$ mengakibatkan pemetaan sisi $f^* : E(C_m \cup P_n) \rightarrow \{2,4,6...,2q\}$ bersifat bijektif, sehingga pelabelan sisi yang didefinisikan dengan ( ) = | ( ) − ( )|, menghasilkan label sisi yang berbeda untuk setiap $xy \in E(C_m \cup P_n)$.

Jadi pemetaan f merupakan pelabelan graceful genap, oleh karenanya graf $C_m \cup P_n$ merupakan graf graceful genap untuk $m = 2k + 2$ dengan k bilangan bulat positif dan $n = m + 2$ ■

Contoh 3.1 Diberikan graf $C_6 \cup P_8$ dengan ( ) = { , , … , } dan ( ) = { , , … , } sehingga m=6, k=2, n=8 dan q = 13



Gambar 3.1 Graf $C_6 \cup P_8$

Pelabelan titik pada graf

( ) = 1 ( ) = 27 ( ) = 3

( ) = 25 ( ) = 5 ( ) = 7

Pelabelan titik pada graf

( ) = 0 ( ) = 18

( ) = 2 ( ) = 16 ( ) = 4

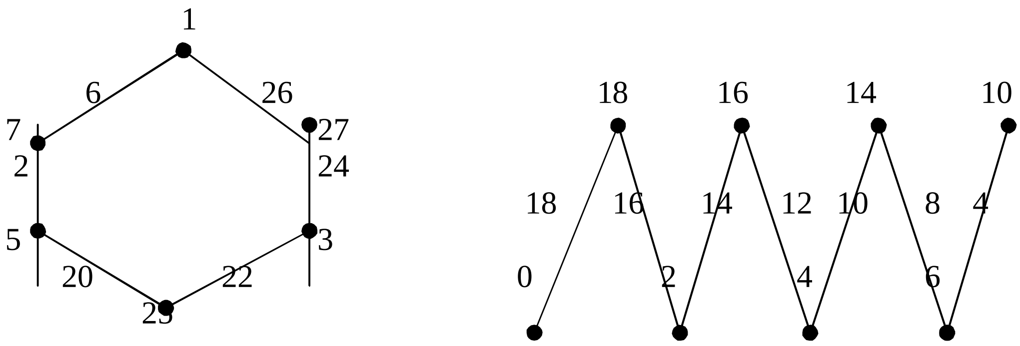
( ) = 14 ( ) = 6

( ) = 10

Pelabelan titik mengakibatkan pelabelan sisi sebagai berikut

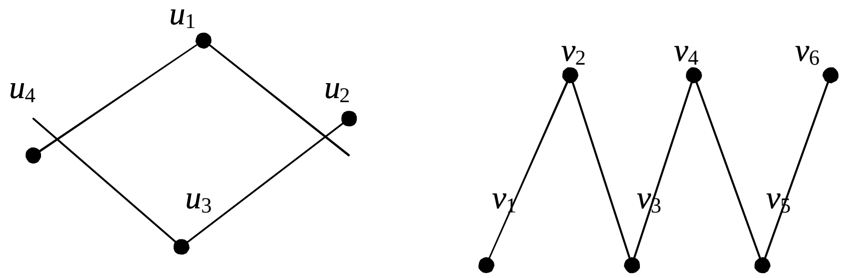
Pelabelan sisi pada graf

( ) = 26 ( ) = 24 ( ) = 18 ( ) = 16
( ) = 22 ( ) = 20 ( ) = 14 ( ) = 12
( ) = 2 ( ) = 6 ( ) = 10 ( ) = 8
Pelabelan sisi pada graf ( ) = 4



Gambar 3.2 Pelabelan graceful genap untuk graf $C_6 \cup P_8$

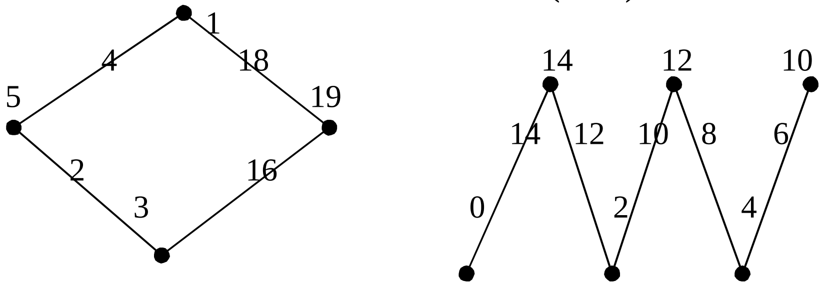
Contoh 3.2 Diberikan graf $C_4 \cup P_6$ dengan { , ,…, } sehingga ( ) = { , ,…, } dan ( ) = $m = 4, k = 1, n = 6$ dan $q = 9$



Gambar 3.3 Graf $C_4 \cup P_6$

Pelabelan titik pada graf
( ) = 1 ( ) = 19 ( ) = 3
( ) = 5
Pelabelan titik pada graf
( ) = 0 ( ) = 14
( ) = 2 ( ) = 12 ( ) = 4
( ) = 10

Pelabelan titik mengakibatkan pelabelan sisi sebagai berikut
Pelabelan sisi pada graf
( ) = 18 ( ) = 16
( ) = 2 ( ) = 4
Pelabelan sisi pada graf
( ) = 14 ( ) = 12
( ) = 10 ( ) = 8
( ) = 6



Gambar 3.3 Pelabelan graceful genap untuk graf $C_4 \cup P_6$

4. PENUTUP

Dari pembahasan yang sudah dilakukan, dapat disimpulkan bahwa, dengan mendefinisikan kembali pelabelan graceful genap yaitu Pelabelan graceful genap adalah pemetaan injektif $f : V(G) \rightarrow \{0,1,2,..., 2q+1\}$ dengan adalah banyaknya sisi, mengakibatkan pemetaan sisi $f^* : E(G) \rightarrow \{2,4,6..., 2q\}$ yang didefinisikan dengan $f^*(xy) = |f(x) - f(y)|, xy \in E(G)$ merupakan pemetaan bijektif, diperoleh hasil bahwa graf $C_m \cup P_n$ merupakan graf graceful genap untuk $n = m + 2$.

5. DAFTAR PUSTAKA

[1] Gallian, J.A., (2013), A Dynamic Survey of Graph Labelings. *The Electronic Journal of Combinatorics*, Vol.5, No.DS6.

[2] Mary U. and Saranya D., (2013), Even Graceful Labeling of $C_m \cup P_n$ (even m), *International Journal for Computer Application and Research*, Vol. Special (1) : 49-51.

[3] M. Ibrahim Moussa, (2010), An algorithm for odd graceful lebeling of the union of paths andcycles, *International journal on application of graph theory in wireless ad.hoc network and sensor networks*, 2(1) : 112-119 .

[4] T. Mahalaksmi Senthil Khumar, T. Abarna Parthiban and T. Vanadhi, (2011), Even Graceful Labeling of the Union of Paths and Cycles, *International Journal of Physics and Applications*, 3(2) : 205-208.

[5] Wilson, J. Robin and John J. Watkins, (1990), *Graphs An Introductory Approach*, New York: University Course Graphs, Network and Design.