GRUP $-\Gamma$ PADA KELAS-KELAS EKUIVALENSI $G(S)$

Y.D. Sumanto
Jurusan Matematika FSM Universitas Diponegoro
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H. Semarang 50275

Abstract. *Finite set S with n element can be operated by* n^{n^2} *binary operation. In this paper if* $G(S)$ *is set of binary operation on S that formed as a group, then* $G(S)$ *can be partioned as unintersection classes and every class can be construct as over S.*

Keywords : $\Gamma-$ *group, relasi ekuivalensi*

1. PENDAHULUAN

Pada himpunan berhingga S dengan n elemen dapat dikenakan sebanyak n^{n^2} operasi biner. Jika $OB(S)$ adalah himpunan semua operasi biner pada *S*, maka $OB(S)$ terpecah menjadi dua kelas saling asing, yaitu himpunan semua operasi-operasi biner assosiatif dan yang tidak assosiatif. Misalkan $OB_{ss}(S)$ adalah himpunan semua operasi biner assosiatif pada *S*, dua operasi biner $\alpha,\beta\in OB_{ss}(S)$ dikatakan associate jika untuk setiap $x,y,z\in S$ memenuhi

$$(x\ \alpha\ y)\ \beta\ z = x\ \alpha\ (y\ \beta\ z) \text{ dan}$$

$$(x\ \beta\ y)\ \alpha\ z = x\ \beta\ (y\ \alpha\ z),$$

jika memenuhi untuk setiap $\alpha,\beta\in\Gamma$ dan $x,y,z\in S$, $(x\ \alpha\ y)\ \beta\ z = x\ \alpha\ (y\ \beta\ z)$, maka (S,Γ) disebut semigrup Γ [1]. Jika (S,Γ) suatu semigrup$-\Gamma$, pada [2] telah dibahas tentang aksi dari suatu elemen $a\in S$ pada Γ, yaitu untuk setiap $\alpha,\beta\in\Gamma$ didefinisikan $\alpha\ a\ \beta$ dengan $x\ (\alpha\ a\ \beta)\ y = (x\ \alpha\ a)\ \beta\ y$. Kesamaan dua operasi biner α dan β pada *S* didefinisikan dengan $\alpha=\beta$ jika $x\,\alpha\ y = x\ \beta\ y$ untuk setiap $x,y\in S$. Jika untuk setiap $a\in S$ dan $\alpha,\beta\in\Gamma$, $\alpha\ a\ \beta\in\Gamma$ maka dikatakan Γ tertutup terhadap *S*. Pada [3] dibahasa jika (S,Γ) semigrup Γ dan jika terdapat $\alpha\in\Gamma$, (S,α) grup, maka untuk setiap $\beta\in\Gamma$, (S,β) grup. Selanjutnya (S,Γ) disebut grup$-\Gamma$. Jika (S,Γ) grup$-\Gamma$ dan Γ tertutup terhadap *S*, pada [2] ditunjukkan (Γ,S) merupakan grup$-\Gamma$ dual dari grup$-\Gamma$ (S,Γ).

Dalam tulisan ini, dibahas jika $G(S)=\{\alpha\in OB_{ass}(S)\,|\,(S,\alpha)\text{ grup}\}$, maka *G*(*S*) terpecah dalam kelas-kelas saling asing dimana jika $\alpha\in G(S)$ dan $[\alpha]$ kelas pada *G*(*S*), maka $(S,[\alpha])$ membentuk grup$-\Gamma$ dengan $\Gamma=[\alpha]$. Untuk memahami tulisan ini, penulis brasumsi bahwa pembaca telah paham mengenai teori semigrup yang dapat dipelajari pada [4], dan teori grup, operasi biner dan relasi ekuivalensi yang dapat dipelajari pada [5] dan [6].

2. PEMBAHASAN

Jika $G(S)$ himpunan semua operasi biner assosiatif pada S sedemikian sehingga jika $\alpha\in G(S)$, (S,α) grup akan ditunjukkan bahwa associatedari dua operasi biner merupakan relasi ekuivalensi pada $G(S)$, yang mengakibatkan $G(S)$ terpecah dalam kelas-kelas yang saling asing dan setiap kelas membentuk grup$-\Gamma$ pada *S*.

Teorema 2.1 *Jika* $\alpha,\beta\in G(S)$, α *associate dengan* β *jika dan hanya jika terdapat* $b\in S$ *sehingga* $\beta=\alpha b\alpha$.

Bukti:

$(\Rightarrow)$ Misalkan α associate dengan $_S$, dan misalkan *a* sebagai elemen identitas dari grup (S,α). Diambil $b=a\ \beta\ a$, maka untuk setiap $x,y\in S$ memenuhi

$$
\begin{aligned}
x\ (\alpha\ b\ \alpha)\ y &= (x\ \alpha\ b)\ \alpha\ y \\
&= x\ \alpha\ (a\ \beta\ a))\ \alpha\ y \\
&= ((x\ \alpha\ a)\ \beta\ a)\ \alpha\ y \\
&= (x\ \beta\ a)\ \alpha\ y \\
&= x\ \beta\ (a\ \alpha\ y) \\
&= x\ \beta\ y
\end{aligned}
$$

dan dari kesamaan dua operasi biner, maka $\beta = \alpha\ b\ \alpha$.

($\Leftarrow$) Misalkan terdapat $b \in S$ sehingga $\beta = \alpha\ b\ \alpha$. Diambil sebarang $x, y, z \in S$, maka

$$
\begin{aligned}
(x\ \alpha\ y)\ \beta\ z &= (x\ \alpha\ y)(\alpha\ b\ \alpha)z \\
&= (x\alpha y)\alpha(b\alpha z) \\
&= x\ \alpha\ (y\ \alpha\ (b\ \alpha\ z)) \\
&= x\ \alpha\ (y(\alpha\ b\ \alpha)z) \\
&= x\ \alpha\ (y\ \beta\ z)
\end{aligned}
$$

Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan $(x\ \beta\ y)\ \alpha\ z = x\ \beta\ (y\ \alpha\ z)$. Jadi α associate dengan β.

Teorema 2.2 *Jika $\alpha, \beta, \gamma \in G(S)$ dengan α associate dengan β dan β associate dengan γ, maka α associate dengan γ.*

Bukti:

Misalkan α associate dengan β dan β associate dengan γ, maka terdapat $a \in S$ sehingga $\alpha = \beta\ a\ \beta$. Oleh karena itu untuk setiap $x, y, z \in S$,

$$
\begin{aligned}
(x\ \alpha\ y)\ \gamma\ z &= (x(\beta\ a\ \beta)\ y\ \gamma\ z \\
&= ((x\ \beta\ a)\ \beta\ y)\ \gamma\ z \\
&= (x\ \beta\ a)\ \beta\ (y\ \gamma\ z) \\
&= x(\beta\ a\ \beta)(y\ \gamma\ z) \\
&= x\ \alpha\ (y\ \gamma\ z).
\end{aligned}
$$

Definisi 2.3 *Misalkan $\alpha, \beta \in G(S)$. Operasi biner α dikatakan berelasi dengan β ditulis dengan $\alpha : \beta$ jika α associate dengan β.*

Teorema berikut menunjukkan bahwa relasi associate pada dua operasi biner merupakan relasi ekuivalensi.

Teorema 2.4 *Relasi : pada Definisi 2.3 merupakan relasi ekuivalensi.*

Bukti:

Oleh karena untuk setiap $\alpha \in G(S)$, α bersifat assosiatif berarti α associate dengan α sendiri, maka ρ refleksif. Jika $\alpha\ \rho\ \beta, \alpha, \beta \in G(S)$, maka untuk setiap $x, y, z \in S$, $(x\ \alpha\ y)\ \beta\ z = x\ \alpha\ (y\ \beta\ z)$ dan $(x\ \beta\ y)\ \alpha\ z = x\ \beta\ (y\ \alpha\ z)$ berarti juga $\beta\ \rho\ \alpha$. Jadi ρ simetris. Teorema 2.2 memnunjukkan ρ transitif. Jadi ρ merupakan relasi ekivalensi.

Berdasarkan Teorema 2.4, himpunan $G(S)$ terpecah dalam kelas-kelas saling asing dan setiap kelas dari $G(S)$ akan membentuk grup $-\Gamma$ terhadap *S*.

Akibat 2.5 *Jika $\alpha \in G(S)$ dan $[\alpha]$ kelas relasi ekuivalensi pada $G(S)$*, maka

i. $(S, [\alpha])$ *merupakan grup*$-\Gamma$ *dengan* $\Gamma = [\alpha]$

ii. $([\alpha], S)$ *merupakan dual grup*$-\Gamma$ *dari grup*$-\Gamma$ $(S, [\alpha])$.

Teorema berikut menunjukkan bahwa di setiap kelas relasi ekuivalensi tidak ada dua operasi biner dengan elemen identitas yang sama, dengan kata lain dua operasi biner didalam $G(S)$ dengan elemen identitas yang sama, maka kedua operasi tersebut tidak *associate.*

Teorema 2.6 *Jika $\alpha, \beta \in G(S)$ dengan $\alpha \neq \beta$ dan kedua-duanya mempunyai elemen identitas yang sama maka α dan β tidak associate.*

Bukti:

Misalkan $\alpha, \beta \in G(S)$, $\alpha \neq \beta$ dan keduanya mempunyai elemen identitas $a \in S$, karena $\alpha \neq \beta$, maka terdapat $x, y \in S$ sehingga

$$x\ \alpha\ y \neq x\ \beta\ y.$$

Oleh karena itu,

$$
\begin{aligned}
(x\ \alpha\ a)\ \beta\ y &= x\ \beta\ y \neq x\ \alpha\ y \\
&= x\ \alpha\ (a\ \beta\ y)
\end{aligned}
$$

Jadi, α dan β tidak *associate*.

Berikut ini diberikan contoh himpunan S dengan himpunan semua operasi biner pada S yang membentuk grup. Ditunjukkan operasi biner tersebut terpartisi dalam kelas-kelas ekuivalensi dan setiap kelasnya membentuk semigrup-Γ terhadap S.

Contoh 2.7

Diberikan himpunan $S=\{a,b,c,d\}$. Hanya ada empat operasi biner pada S yang membentuk grup dengan elemen identitas *a*. Begitu juga masing-masing hanya ada empat operasi biner pada S yang membentuk grup dengan elemen identitas *b, c,* dan *d.* jadi $G(S)$ mempunyai 16 elemen yaitu $G(S)=\{\alpha_i,\beta_i,\gamma_i,\delta_i \mid i=1,2,3,4\}$ dengan $\alpha_i,\beta_i,\gamma_i,\delta_i$ berturut-turut mempunyai elemen identitas *a*,*b*, *c*, dan *d*, *i* = 1, 2, 3, 4.

Kelas-kelas pada $G(S)$ adalah $[\alpha_1],[\alpha_2],[\alpha_3]$ dan $[\alpha_4]$ dimana $[\alpha_i]=\{\alpha_i,\beta_i,\gamma_i,\delta_i\}$, *i* = 1, 2, 3, 4. Untuk setiap *i* = 1, 2, 3, 4, $(S,[\alpha_i])$ merupakan grup $-\Gamma$.

α_1	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

α_2	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	d	a	c
c	c	a	d	b
d	d	c	b	a

α_3	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

α_4	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	b	a
d	d	c	a	b

β_1	a	b	c	d
a	d	a	b	c
b	a	b	c	d
c	b	c	d	a
d	c	d	a	b

β_2	a	b	c	d
a	c	a	d	b
b	a	b	c	d
c	d	c	b	a
d	b	d	a	c

β_3	a	b	c	d
a	b	a	d	c
b	a	b	c	d
c	d	c	b	a
d	c	d	a	b

β_4	a	b	c	d
a	b	a	d	c
b	a	b	c	d
c	d	c	a	b
d	c	d	b	a

γ_1	a	b	c	d
a	c	d	a	b
b	d	a	b	c
c	a	b	c	d
d	b	c	d	a

γ_2	a	b	c	d
a	b	d	a	c
b	d	c	b	a
c	a	b	c	d
d	c	a	d	b

γ_3	a	b	c	d
a	c	d	a	b
b	d	c	b	a
c	a	b	c	d
d	b	a	d	c

γ_4	a	b	c	d
a	d	c	a	b
b	c	d	b	a
c	a	b	c	d
d	b	a	d	c

δ_1	a	b	c	d
a	b	c	d	a
b	c	d	a	b
c	d	a	b	c
d	a	b	c	d

δ_2	a	b	c	d
a	d	c	b	a
b	c	a	d	b
c	b	d	a	c
d	a	b	c	d

δ_3	a	b	c	d
a	d	c	b	a
b	c	d	a	b
c	b	a	d	c
d	a	b	c	d

δ_4	a	b	c	d
a	c	d	b	a
b	d	c	a	b
c	b	a	d	c
d	a	b	c	d

Kelas-kelas pada $G(S)$ adalah $[\alpha_1]$, $[\alpha_2]$, $[\alpha_3]$ dan $[\alpha_4]$ dimana $[\alpha_i]=\{\alpha_i,b_i,\gamma_i,\delta_i\}$, $i=1,2,3,4$. Untuk setiap $i=1,2,3,4$, $(S,[\alpha_i])$ merupakan grup $-\Gamma$. Untuk setiap $i=1,2,3,4$, $\beta_i,\gamma_i,\delta_i$ dapat dinyatakan dalam α_i

$\beta_1=\alpha_1\,d\,\alpha_1 \quad \beta_2=\alpha_2\,c\,\alpha_2$

$\gamma_1=\alpha_1\,c\,\alpha_1 \quad \gamma_2=\alpha_2\,b\,\alpha_2$

$\delta_1=\alpha_1\,b\,\alpha_1 \quad \delta_2=\alpha_2\,d\,\alpha_2$

$\beta_3=\alpha_3\,b\,\alpha_3 \quad \beta_4=\alpha_4\,b\,\alpha_4$

$\gamma_3=\alpha_3\,c\,\alpha_3 \quad \gamma_4=\alpha_2\,d\,\alpha_2$

$\delta_3=\alpha_3\,b\,\alpha_3 \quad \delta_4=\alpha_4\,c\,\alpha_4$

Dalam penelitian selanjutnya akan diselidiki tentang suatu himpunan dengan himpunan operasi biner yang membentuk semigrup terhadap himpunan tersebut.

3.PENUTUP

Suatu himpunan semua operasi biner pada himpunan *S*, $G(S)$, yang membentuk grup terhadap *S*, maka $G(S)$ terpecah pada kelas-kelas yang saling asing dan setiap kelas akan membentuk grup $-\Gamma$ terhadap *S.*

4. DAFTAR PUSTAKA

[1] Sen, M.K., (1981), On $\Gamma-$semigroup, *Proceeding of International Conference on Algebra and Its Application,* Dekker Publication, New York hal. 301.

[2] Saha, N. K., (1988), On $\Gamma-$semigrup III, *Bul., Cal. Math. Soc* Vol 80 : 1-12

[3] Sumanto, Y.D., (2012), Grup $-\Gamma$ Dual dari Suatu Grup $-\Gamma$, *Jurnal Matematika Jurusan Matematika* FMIPA Universitas Diponegoro, 15(1) : 23-27

[4] Howie, J.M., (1976), *An Introduction to Semigroup Theory,* Academic Press, London.

[5] Fraleigh, John, B., (1999), *A First Course In Abstract Algebra*, Addison Wesley Pub. Com., Singapore

[6] Heirsten, I., N., (1975), *Topics In Algebra*, John Wiley and Sons, Inc, USA