PROGRAM FRAKSIONAL LINIER DENGAN KOEFISIEN INTERVAL

Annisa Ratna Sari[1], Sunarsih[2], Suryoto[3]
[1,2,3]Jurusan Matematika FSM Universitas Diponegoro
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H. Tembalang Semarang

Abstract. Linear fractional programming is a special case of nonlinear programming which the objective function is a ratio of two linear function with linear constraints. Linear fractional programming is used to optimize the efficiency of the activities of the other activities. In some case, coefficients of the objective function is uncertain. Therefore, It can be selected the interval numbers as coefficients. First step in solving linear fractional programming with interval coefficients in the objective function is transforming it into linear programming using the Charnes - Cooper method. The result of the transformation is linear programming with interval coefficients (LPIC). To solve the LPIC is used method proposed by K Ramadan. In this method, LPIC converted into two linear programming that obtains the best optimum solution and the worst optimum solution, respectively. This optimum solution is the optimum solution for linear fractional programming problem with interval coefficients in the objective function.

Keywords : linear fractional programming, linear programming, interval coefficients.

1. PENDAHULUAN

Pada beberapa kasus program fraksional linier, koefisien model seringkali tidak dapat ditentukan secara tepat sehingga biasanya koefisien harus diestimasi dahulu. Hal ini mengakibatkan solusi yang diperoleh kurang sesuai dengan keadaan yang sebenarnya. Salah satu metode untuk menyelesaikan kasus program fraksional ini adalah dengan menggunakan interval sebagai koefisien model. Dalam hal ini yang dibahas hanya koefisien interval pada fungsi objektif sedangkan koefisien pada fungsi kendala diketahui dengan tepat.

Penyelesaian masalah program fraksional linier menggunakan metode *Charnes – Cooper* . Pada tugas akhir ini, penyelesaian masalah program fraksional linier dengan koefisien interval menggunakan metode *Charnes – Cooper* dan kombinasi konveks serta ditambah dengan metode yang dikemukakan oleh [1].

2. HASIL DAN PEMBAHASAN

2.1 Program Fraksional Linier

Program fraksional linier merupakan program non linier dengan fungsi objektif berupa rasio dua fungsi linier. Program fraksional linier digunakan untuk mengoptimalkan nilai efisiensi suatu kegiatan terhadap kegiatan lain. Bentuk umum program fraksional linier dirumuskan sebagai berikut :

fungsi objektif : meminimumkan / memaksimumkan

$$= \frac{+}{+}$$

dengan kendala : $\leq$

$\geq$ (2.1)

dengan adalah matriks berukuran , , , adalah n – vektor kolom dengan anggota bilangan real**,** adalah m – vektor kolom dengan anggota bilangan real dan , adalah skalar. Fungsi penyebut pada fungsi objektif yaitu + diasumsikan lebih dari nol untuk setiap = (, ,…,) dengan *S* merupakan daerah fisibel yang tidak kosong dan terbatas. Berikut ini terdapat suatu lemma yang terkait dengan fungsi objektif dan solusi optimal dari program fraksional linier.

Lemma 2.1 [2] *Misalkan* ( ) = ——— *dan S himpunan konveks dengan* +

> 0 *maka f adalah pseudokonveks dan pseudokonkaf pada S.*

Bukti :

Pertama, ditunjukkan bahwa *f* adalah fungsi pseudokonveks. Ambil sembarang , dengan ( ) (−) ≥ 0 ditunjukkan bahwa ( ) ≥ ( ).

( ) (−) = (−) ( ) ≥ 0

= (−) (+) − (+) / (+) ≥ 0

Diketahui bahwa + > 0 maka (+) > 0 sehingga

(−) (+) − (+) ≥ 0

(+)(+) − (+)(+) ≥ 0

maka

(+)(+) ≥ (+)(+) (2.2)

Oleh karena (+) dan (+) keduanya bernilai positif maka kedua ruas dari (2.2) dapat dibagi dengan (+)(+) > 0 sehingga diperoleh

(+) / (+) ≥ (+) / (d +)

( ) ≥ ( )

Oleh karenanya, *f* adalah fungsi pseudokonveks. Dengan menggunakan cara yang sama, dapat ditunjukkan bahwa jika ( ) (−) ≤ 0 maka ( ) ≤ ( ) sehingga adalah fungsi pseudokonkaf. ■

Berdasarkan Lemma 2.1, fungsi objektif suatu permasalahan program fraksional linier merupakan fungsi pseudokonveks dan pseudokonkaf (pseudolinier) sehingga solusi optimal lokal dari permasalahan program fraksional linier merupakan solusi optimal global dan jika solusi optimalnya ada maka solusi tersebut terletak pada salah satu titik ekstrim daerah fisibelnya [3].

2.2 Bilangan Interval

Sebuah interval dapat dituliskan sebagai berikut :

= _, ‾ = _ ≤ ≤ ‾,

dengan _ adalah batas bawah dari interval dan ‾ adalah batas atas dari interval . Jika _ = ‾ = maka adalah bilangan real.

Definisi 2.1 [4] *Misalkan* = [_, ‾] *dan* = [_, ‾] *adalah bilangan interval.*

(a) *Dua interval dan dikatakan sama:jika dan hanya jika* _ = _ *dan* ‾ = ‾.

(b) *Jika adalah skalar maka*
. = . _, ‾
= _, ‾ , > 0
‾ , _ , < 0

(c) *Penjumlahan* : + = _, ‾ + _, ‾ = _ + _, ‾ + ‾

(d) *Pengurangan* : − = _, ‾ − _, ‾ = _ − ‾, ‾ − _

(e) *Kebalikan.* *Jika* 0 *maka* = _, ‾ = = , − . *Jika* 0 *maka* _, ‾ *tidak terdefinisi.*

(f) *Perkalian* : . = _, ‾ . _, ‾ = _, ‾ *dengan* _ = , , , ‾ = , , ,

(g) *Pembagian* : − = . − = _, ‾ . = , − *dengan* 0 .

2.3 Program Fraksional Linier dengan Koefisien Interval

Bentuk umum program fraksional linier dengan koefisien interval pada fungsi objektif dirumuskan sebagai berikut :

Fungsi Objektif :

meminimumkan/memaksimumkan

( ) = _, ‾ + _, ‾ / _, ‾ + _, ‾

kendala : ≤
≥ (2.3)

dengan adalah matriks berukuran , _,¯ , _,¯ adalah n – vektor kolom dengan anggota bilangan interval**,** adalah m – vektor kolom dengan anggota bilangan real dan _,¯ , _,¯ adalah skalar interval. Fungsi penyebut pada fungsi objektif yaitu _,¯ + _,¯ diasumsikan lebih dari nol untuk setiap = (, ,…,) dengan *S* merupakan daerah fisibel yang tidak kosong dan terbatas.

2.4 Penyelesaian Program Fraksional Linier dengan Koefisien Interval pada Fungsi Objektif

Permasalahan program fraksional linier yang dibahas adalah masalah minimasi. Jika model berupa masalah maksimasi, maka pada transformasi program liniernya diubah menjadi masalah minimasi dengan cara mengalikan fungsi objektif dengan (–1). Permasalahan (2.3) diselesaikan dengan mengubahnya dalam bentuk program linier terlebih dahulu dengan menggunakan metode Charnes – Cooper yaitu mengenalkan variabel baru sebagai berikut:

= 1 / (_,¯ + [_,¯])

sehingga diperoleh bentuk program linier sebagai berikut :

meminimumkan _,¯ + _,¯

kendala _,¯ + [_,¯] = 1

≤

≥ 0 , ≥ 0 (2.4)

Bentuk program linier (2.4) sering disebut *linear programming with interval coefficients* (LPIC). Penyelesaian LPIC ini menggunakan metode yang dikemukan K. Ramadan yaitu mengubah bentuk (4) menjadi dua model program linier dengan koefisien tentu yaitu model terbaik yang menghasilkan solusi optimal terbaik dan model terburuk yang menghasilkan solusi optimal terburuk.

Solusi optimal pada LPIC ini diperoleh dengan mencari versi khusus dari fungsi objektif dan kendala yang mengoptimumkan model, yaitu dipilih suatu nilai spesifik (nilai ekstrim) pada koefisien interval yang membuat model tersebut optimum. Suatu kendala berkoefisien interval akan memiliki kendala spesifik (kendala dengan koefisien tentu) berjumlah tak hingga. Jadi untuk memperoleh solusi optimum, dipilih versi ekstrim kendala yang koefisiennya berupa kombinasi batas bawah dan batas atas koefisien interval.

Definisi 2.2 [5] *Untuk masalah minimasi LPIC dengan = _,¯ dan ≥ 0, _ dinamakan fungsi objektif terbaik (most favourable objective function) dan ¯ dinamakan fungsi objektif terburuk (least favourable objective function). Untuk masalah maksimasi berlaku sebaliknya.*

Berdasarkan Definisi 2.2, fungsi objektif terbaik pada masalah LPIC (4) yaitu _ + _ dan fungsi objektif terburuk terjadi pada ¯ + ¯ . Hal ini juga dapat ditunjukkan dengan menggunakan daerah kombinasi konveks tiap daerah interval fungsi objektif masalah (2.4).

_,¯ + _,¯ ¯ = ∑ _ ,¯ + _ ˆ _,

= ∑ _ + (1 −)¯ + [_ + (1 −) ¯] ˆ

= ∑ _ − ¯ + _ − ¯ ˆ+ ∑ + ¯ ˆ

≥ ∑ _ − ¯ + _ − ¯ ˆ+ ∑ + ¯ ˆ

= ∑ _ + _ ˆ

sehingga diperoleh

∑ _ − ¯ + _ − ¯ ˆ+ ∑ + ¯ ˆ ≥ ∑ _ + _ ˆ (2.5)

Ruas kanan dari Persamaan (2.5) merupakan batas bawah dari fungsi objektif pada masalah LPIC (2.4) yang memberikan nilai terbaik fungsi objektif.

Jadi fungsi objektif terbaik dari masalah LPIC (4) yaitu $\sum \_ + \_$ atau $\_ + \_$.

Teorema 2.1 [5] *Suatu LPIC dengan kendala persamaan berbentuk interval* $\_,^{-} = [\_,^{-}]$ *dengan* $\geq$, *maka sepasang kendala pertidaksamaan berikut*

$$^{-} \geq \_ \qquad (2.6)$$

$$\_ \leq ^{-} \qquad (2.7)$$

merupakan daerah konveks yang tiap titiknya memenuhi sembarang versi khusus kendala persamaan interval.

Bukti:

$= \{ \ | ^{-} \geq \_, \ \geq 0, \}$ dan , maka $^{-} \geq \_$ dan $^{-} \geq \_$.

Misal $^{-} = \_ \geq \_$ dan $^{-} = \_ \geq \_$ serta $= + (1 -)$ dengan $[0,1]$ maka

$$^{-} = ^{-} (+ (1 -))$$
$$= ^{-} + (1 -)^{-}$$
$$= \_ + (1 -)\_$$
$$\geq \_ + (1 -)\_$$
$$= \_$$

diperoleh $^{-} \geq \_$. Jadi, $= \{ \ | ^{-} \geq \_, \ \geq 0, \}$ adalah daerah konveks.

Dengan menggunakan cara yang sama, dapat ditunjukkan bahwa $= \{ \ | \_ \leq ^{-}, \ \geq 0\}$ adalah daerah konveks. ■

Kendala persamaan dari masalah LPIC (2.4) dapat dikonversi menjadi dua kendala pertidaksamaan $^{-} + ^{-} \geq 1$ dan $\_ + \_ \leq 1$ dengan menggunakan kombinasi konveks setiap daerah koefisien intervalnya. Kombinasi konveks merupakan segmen garis yang menghubungkan dua titik yang berada dalam suatu himpunan. Misalkan titik $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$ di dalam maka untuk setiap titik $+ (1 -)$ dengan $0 \leq \ \leq 1$ ini disebut kombinasi konveks dari dan . Berikut ini cara mengkonversi kendala persamaan LPIC (2.4) menjadi dua pertidaksamaan

$$[\_ ,^{-}]^{\wedge} + [\_ ,^{-}] = \mathbf{1}$$

$$\sum \_ ,^{-} + \_ ,^{-} = \mathbf{1}$$

$$\sum \_ + \mathbf{1} - ^{-} +$$

$$[\_ + (\mathbf{1} -)^{-}] = \mathbf{1}$$

$$\sum \_ - ^{-} + \_ -$$

$$^{-} + \sum ^{-} + ^{-} = \mathbf{1} \qquad (2.8)$$

dengan $\geq \mathbf{0}$ untuk $= \mathbf{1,2,\cdots,}$, $\in [\mathbf{0,1}]$ $^{-} - \_ \geq \mathbf{0}$ untuk $= \mathbf{1,2,\cdots,}$ maka Persamaan (2.8) dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\sum ^{-} + ^{-} = \mathbf{1} + \sum (^{-} - \_) + ^{-} - \_ \qquad (2.9)$$

Oleh karena itu , Persamaan (2.9) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\mathbf{1} \leq \mathbf{1} + \sum (^{-} - \_) + ^{-} - \_ \leq \mathbf{1} + \sum (^{-} - \_) + ^{-} - \_$$

$$\mathbf{1} \leq \sum ^{-} + ^{-} \leq \mathbf{1} + \sum (^{-} - \_) + ^{-} - \_$$

diperoleh dua pertidaksamaan yaitu

$$^{-} + ^{-} \geq \mathbf{1} \qquad (2.10)$$

$$\_ + \_ \leq \mathbf{1} \qquad (2.11)$$

Dua kendala pertidaksamaan (2.10) dan (2.11) merupakan versi khusus yang menghasilkan nilai fungsi objektif terbaik pada program linier (2.4) sehingga solusi optimal terbaik dapat diperoleh. Dengan menggunakan Teorema 2.1, dua kendala pertidaksamaan (2.10) dan (2.11) merupakan daerah konveks.

Teorema 2.2 [5] *Suatu masalah minimasi LPIC dengan kendala persamaan koefisien interval* $\_ ,^{-} = \_ ,^{-}$, *solusi optimal terburuk akan terjadi pada salah satu kendala berikut*

$$^{-} = \_ \qquad (2.12)$$

$$\_ \quad = \bar{} \qquad (2.13)$$

Bukti :

Andaikan titik $= (\; ; \cdots , \;)$ adalah titik optimal terburuk yang memenuhi kendala $\sum \quad \_ \; =$ dan memiliki nilai fungsi objektif $\bar{}$.

Misalkan

$\bar{}$ = nilai fungsi objektif yang dihasilkan dengan versi kendala (2.12)

$\bar{}$ = nilai fungsi objektif yang dihasilkan dengan versi kendala (2.13)

Berdasarkan asumsi bahwa titik optimal terburuk memiliki nilai fungsi objektif maka $\geq$ dan $\geq$. Persamaan (2.12) dan (2.13) merupakan persamaan versi ekstrim dari (2.6) dan (2.7) maka $\leq \quad [\; , \;]$ Hal ini menimbulkan kontradiksi. Jadi pengandaian bahwa titik optimal terburuk terjadi pada kendala persamaan $\sum \quad =$ tidak terbukti. Oleh karena itu, solusi optimal terburuk akan diperoleh pada versi kendala (2.12) atau (2.13). ■

Berdasarkan Teorema 2.2 , solusi optimal terburuk dari masalah LPIC (2.4) terjadi pada kendala $\bar{} \; + \bar{} \; = 1$ atau $\_ \; + \_ \; = 1$. Model program linier yang menghasilkan solusi optimal terbaik dan optimal terburuk diselesaikan dengan metode *simplex* yang direvisi. Selanjutnya, solusi optimal terbaik dan optimal terburuk pada masing – masing model disubstitusi ke persamaan berikut

$$= - \; , \; = 1, 2, \cdots , \qquad (2.14)$$

untuk memperoleh solusi optimal masalah program fraksional linier [6].

2.5 Simulasi Kasus

Sebuah Perusahaan membuat dua buah produk yaitu A_1 dan A_2. Keuntungan yang diperoleh tiap produk tidak menentu. Produk A_1 keuntungannya antara 3 sampai 5 dollar per unit dan produk A_2 keuntungannya antara 1 sampai 4 dollar per unit. Perusahaan juga mendapatkan keuntungan tetap dari 7 sampai 11 dollar. Biaya yang dikeluarkan untuk masing - masing produk juga tidak menentu yaitu antara 1/2 sampai 2 per unit untuk produk A_1 dan antara 1 sampai 2 dollar per unit untuk produk A_2. Selain itu perusahaan mengeluarkan biaya tetap diluar biaya produksi 4 sampai 6 dollar. Perusahaan memiliki bahan baku yang digunakan untuk membuat produk sebanyak 30 pon. Produk A_1 membutuhkan bahan baku sebanyak 1 pon per unit. Produk A_2 membutuhkan bahan baku 3 pon per unit. Dua kali produksi A_2 lebih banyak dari produksi A_1 akan manghasilkan paling banyak 5 unit produk. Perusahaan harus memutuskan berapa banyak produk A_1 dan A_2 yang harus diproduksi jika perhitungan efisiensi dari total keuntungan terhadap total biaya harus dimaksimalkan.

Misalkan :

: Produk : Produk

Permasalahan di atas dapat diformulasikan dalam bentuk program fraksional linier sebagai berikut :

Memaksimalkan $= \frac{[\;,\;] \quad [\;,\;] \quad [\;,\;]}{- , \quad [\;,\;] \quad [\;,\;]}$

dengan kendala $\quad + 3 \quad \leq 30$

$- \quad + 2 \quad \leq 5$

$\geq 0, \quad \geq 0$

Kemudian, permasalahan program fraksional linier tersebut diubah menjadi LPIC sebagai berikut :

Memaksimalkan

$[3,5] \quad + [1,4] \quad + [7,11]$

dengan kendala

$\frac{1}{2}, 2 \quad + [1,2] \quad + [4,6] \; = 1$

$+ 3 \quad - 30 \; \leq 0$

$- \quad + 2 \quad - 5 \; \leq 0$

$\geq 0, \quad \geq 0, \quad > 0$

Model program linier terbaik dan terburuk dapat diperlihatkan dalam contoh berikut

Model Terbaik	Model Terburuk
Memaksimalkan $5 \quad + 4 \quad + 11$ dengan kendala $2 \quad + 2 \quad + 6 \; \geq 1$ $- \quad + 1 \quad + 4 \; \leq 1$ $+ 3 \quad - 30 \; \leq 0$	Memaksimalkan $3 \quad + \quad + 7$ dengan kendala $2 \quad + 2 \quad + 6 \; = 1$ $+ 3 \quad - 30 \; \leq 0$ $- \quad + 2 \quad - 5 \; \leq 0$

$- \quad + 2 \quad - 5$ ≤ 0 $\geq 0, \quad \geq 0,$ > 0 Solusi optimal : $= — \;, \quad = 0,$ dan $= —$ dengan nilai optimal $= —$	$\geq 0 \quad \geq 0$ > 0 Solusi optimal : $= —, \quad =$ $0, \; = —$ dengan nilai optimal $=$ $—$.

dengan menggunakan persamaan $= —$, diperoleh solusi optimal untuk permasalahan awalnya yaitu $= 30, \; = 0$ dengan nilai objektif $= — ,—$.

3. KESIMPULAN

Masalah program fraksional linier dengan koefisien interval pada fungsi objektif dapat diselesaikan dengan mengubahnya menjadi masalah program linier menggunakan metode *Charnes - Cooper*. Model program linier yang diperoleh adalah model LPIC. Penyelesaian masalah LPIC tersebut menggunakan metode yang dikemukakan *K Ramadan* . Pada metode ini, masalah LPIC diubah menjadi dua versi khusus model program linier yaitu model yang menghasilkan solusi optimal terbaik dengan nilai objektif terbaik dan model yang menghasilkan solusi optimal terburuk dengan nilai objektif terburuk. Nilai objektif terbaik dan nilai objektif terburuk masalah LPIC merupakan batas atas dan batas bawah dari nilai objektif masalah program fraksional linier dengan koefisien interval pada fungsi objektif yang dapat ditulis dalam bentuk interval.

4. DAFTAR PUSTAKA

[1] Ramadan, K., (1996). “Linear Progamming with Interval Coefficients”. Thesis. Master of Science Information and System Science Department of Mathematics and Statistics Carletton University.

[2] Bazaraa, M.S., Sherali, H.D., Shetty, C.M., (2006), *Nonlinear Programming : Theory and Algorithms. Third Edition.* New Jersey : John Wiley & Sons,Inc

[3] Cambini, A., Martein, L., (2009), *Generelized Convexity and Optimization : Theory and Application*, Berlin : Springer.Borza,

[4] Hansen, E., Walster, G.W., (2004), *Global Optimization Using Interval Analysis : Second Edition, Revised and Expanded.* New York : Marcel Dekker, Inc.

[5] M., Rambely, A.S., Saraj, M., (2012), Solving linear Fractional Programming Problems with Interval Coefficients in the Objective Function. A new Approach, *Journal Applied Mathematical Science*, 6(69) :3443-3452.

[6] Effati, S., Pakdaman, M., (2012), Solving the Interval Valued Linear Fractional Programming Problem, *American Journal of Computational Mathematics*, 2:51-55.