SIFAT-SIFAT LANJUT NEUTROSOFIK MODUL

[1]Suryoto, [2]Bambang Irawanto, [3]Nikken Prima Puspita
[1, 2, 3]Departemen Matematika Fakultas Sains dan Matematika Universitas Diponegoro
Jl. Prof. H. Soedarto, SH, Tembalang, Semarang 50275
[1]suryoto_math@undip.ac.id

Abstract. Neutrosophic module over the ring with unity is an algebraic structure formed by a neutrosophic abelian group by providing actions scalar multiplication on the structure. The elementary properties of neutrosophic module have been looked at, that are intersection dan summand among neutrosophic submodules are neutrosophic submodule again, but it not true for union of neutrosophic submodules. In this article discussed the advanced properties of the neutrosophic module and the algebraic aspects respect to this structure, including neutrosophic quotient module and neutrosophic homomorphism module and can be shown that most of the properties of the classical module still true to the neutrosophic structure, especially with regard to the properties of neutrosophic homomorphism module and the fundamental theorem of neutrosophic homomorphism module.

Keywords : neutrosophic module, neutrosophic quotient module, neutrosophic homomorphism module, the fundamental theorem of neutrosophic homomorphsm module

1. PENDAHULUAN

Neutrosofik modul atas ring dengan unsur satuan adalah suatu struktur aljabar yang dapat dibentuk dari neutrosofik grup komutatif yang diberikan tindakan perkalian skalar pada struktur tersebut. Struktur neutrosifik ini telah diperkenalkan oleh Agboola, et al [1] pada tahun 2012. Selanjutnya pada tahun 2015, sifat-sifat dasar yang berlaku pada neutrosofik modul telah dibahas pada [2]. Sifat-sifat dasar yang sudah ditinjau adalah bahwa operasi irisan dan hasil tambah neutrosofik submodul-neutrosofik submodul senantiasa merupakan neutrosofik submodul lagi, tetapi tidak demikian halnya dengan operasi gabungannya.

Untuk membahas sifat-sifat lanjut dari neutrosofik modul, perlu diingat kembali unsur neutrosofik yang merupakan kunci dari pembentukan struktur neutrosofik secara umumnya. Pada [3] dan [4] telah diperkenalkan unsur neutrosofik sebagai suatu unsur yang bersifat idempoten terhadap operasi perkalian dan dapat dipandang sebagai indeterminate. Unsur ini memegang peranan penting dalam pembentukan unsur-unsur himpunan dari struktur neutrosofiknya.

Unsur neutrosofik dinotasikan dengan I adalah suatu indeterminate yang bersifat idempoten terhadap operasi perkalian, yaitu $I \cdot I \quad I^2 \quad I$. Perlu dicatat bahwa unsur neutrosofik I tidak sama dengan unsur satuan 1 dari ring dasar pembentuk neutrosofik modulnya.

Pada makalah ini diberikan sifat-sifat lanjut dari neutrosofik modul, terutama yang berkaitan dengan neutrosofik ideal faktor dan neutrosofik homomorfisma modul serta teorema utama homomorfisma neutrosofik modul.

2. PEMBAHASAN

2.1. Neutrosofik Ring dan Aspek Aljabar Terkait

Sebagai awal pembahasan berikut ini diberikan definisi neutrosofik grup sebagai dasar pembentukan neutrosofik modul.

Definisi 2.1 [5] *Misalkan* $G \quad G,*$ *sebarang grup, neutrosofik grup yang dibangun oleh* I *dan* G *dibawah operasi* $*$ *dinotasikan dengan* $G \quad \langle G \cup I \rangle,*$.
Neutrosofik grup $G \quad \langle G \cup I \rangle,*$ tidak lain adalah himpunan yang unsurnya berupa $a * bI$, dengan $a, b \in G$ dan I suatu unsur neutrosofik.

Selain neutrosofik grup, konsep dasar yang perlu diingat adalah neutrosofik ring. Berikut ini diberikan definisi dan sifat-sifat yang berkaitan dengan neutrosofik ring.

Definisi 2.2 [6] *Misalkan* $\quad , \; ,\cdot$ *sebarang ring, maka himpunan*

$$\langle \;\; \cup I\rangle \qquad a \quad bI \mid a,b \in$$

dinamakan neutrosofik ring yang dibangun oleh dan I dibawah operasi dari .

Beberapa sifat penting dan aspek aljabar terkait dengan neutrosofik ring, dituangkan dalam beberapa teorema dan definisi berikut.

Teorema 2.3 [6] *Setiap neutrosofik ring merupakan ring dan senantiasa memuat himpunan bagian sejati berupa ring.*

Bukti :

Misalkan $\langle \;\; \cup I\rangle$ sebarang neutrosofik ring. Pada $\langle \;\; \cup I\rangle$ didefinisikan dua buah operasi biner “ " dan “$\cdot$" sebagaimana berlaku pada ring . Seperti pada pembuktian struktur ring klasik dapat dibuktikan bahwa

a. $\langle \;\; \cup I\rangle,$ merupakan grup komutatif
b. $\langle \;\; \cup I\rangle,\cdot$ merupakan semigrup
c. Sifat distributif kiri dan distributif kanan dipenuhi.

Sedangkan bukti untuk bagian keduanya langsung dari kenyataan bahwa ring $\subset \langle \;\; \cup I\rangle$. ■

Sebagaimana berlaku dalam teori ring klasik, yaitu terdapatnya homomorfisma ring, dalam struktur neutrosofik juga dikenal konsep yang sama, berikut ini diberikan definisi/ pengertian homomorfisma neutrosofik ring.

Definisi 2.4 [6] *Misalkan* $\langle \;\; \cup I\rangle$ *dan* $\langle \;\; ' \cup I\rangle$ *adalah dua neutrosofik ring. Pemetaan* $\Phi : \langle \;\; \cup I\rangle \to \langle \;\; ' \cup I\rangle$ *disebut homomorfisma neutrosofik ring jika dipenuhi kondisi-kondisi berikut :*

a. $\Phi : \langle \;\; \cup I\rangle \to \langle \;\; ' \cup I\rangle$ *suatu homomorfisma ring*
b. $\Phi \;\; I \qquad I$

Dari pengertian homomorfisma neutrosofik ring ini, diperoleh himpunan yang anggotanya terdiri atas semua $\in \langle \;\; \cup I\rangle$ yang oleh Φ dipetakan ke $0' \in \langle \;\; ' \cup I\rangle$ dan dinamakan kernel dari Φ serta dinotasikan dengan Ker Φ . Dengan demikian

$$\text{Ker } \Phi \qquad \in \langle \;\; \cup I\rangle \mid \Phi \qquad 0' \, .$$

Selanjutnya dari ring neutrosofik $\langle \;\; \cup I\rangle$, secara khusus ditinjau neutrosofik grup komutatif $\langle \;\; \cup I\rangle,$ dan dibentuk homomorfisma-homomorfisma neutrosofik grup dari $\langle \;\; \cup I\rangle,$ ke dirinya sendiri atau endomorfisma neutrosofik grup. Jika semua endomorfisma neutrosofik grup $\Phi : \langle \;\; \cup I\rangle \to \langle \;\; \cup I\rangle$ dihimpun kedalam himpunan

$$\text{End } \langle \;\; \cup I\rangle \quad \text{Hom } \langle \;\; \cup I\rangle, \langle \;\; \cup I\rangle$$
$$\Phi \mid \Phi : \langle \;\; \cup I\rangle \to \langle \;\; \cup I\rangle, \text{homomorfisma}$$

maka dipunyai hasil berikut ini.

Teorema 2.5 [1] *Misalkan* $\langle \;\; \cup I\rangle,$ *suatu neutrosofik grup dan* End $\langle \;\; \cup I\rangle$ *adalah himpunan semua endomorfisma neutrosofik grup pada* $\langle \;\; \cup I\rangle,$ *. Jika pada himpunan* End $\langle \;\; \cup I\rangle$ *didefinisikan dua buah operasi penjumlahan dan perkalian dengan*

$$\Phi \quad \Psi \qquad \Phi \qquad \Psi \quad \textit{dan}$$
$$\Phi \cdot \Psi \qquad \Phi \;\; \Psi \quad ,$$

untuk setiap $\Phi, \Psi \in$ End $\langle \;\; \cup I\rangle$ *dan* $\in \langle \;\; \cup I\rangle,$ *maka* End $\langle \;\; \cup I\rangle \; , \; ,\cdot$ *merupakan neutrosofik ring.*

Bukti :

serupa dengan pembuktian untuk ring klasik. ■

Berikut ini diberikan pengertian tentang struktur neutrosofik subring dan subring dari suatu neutrosofik ring beserta perbedaannya.

Definisi 2.6 [6] *Misalkan* $\langle \;\; \cup I\rangle$ *suatu neutrosofik ring. Himpunan bagian sejati dari* $\langle \;\; \cup I\rangle$ *dikatakan neutrosofik subring dari* $\langle \;\; \cup I\rangle$ *jika* $\langle \;\; \cup nI\rangle,$ *dengan subring dan n suatu bilangan asli. Dalam hal ini dikatakan dibangun oleh dan nI dibawah operasi yang berlaku pada .*

Definisi 2.7 [6] *Misalkan* $\langle \;\; \cup I\rangle$ *suatu neutrosofik ring dan sebarang himpunan bagian sejati dari* $\langle \;\; \cup I\rangle$ *sedemikian hingga merupakan ring, maka dinamakan subring dari* $\langle \;\; \cup I\rangle$*.*

Untuk memperjelas perbedaan tentang neutrosofik subring dan subring dari suatu neutrosofik ring diberikan contoh berikut.

Contoh 2.8 Pandang neutrosofik ring $\langle ▯\ _2 \cup I\rangle$, maka himpunan bagian sejati

$$0, 6, I, 2I, 3I, 4I, \cdots, 11I, 6 \quad I, 6 \quad 2I, 6 \quad 3I, \cdots, 6 \quad 11I$$

dari $\langle ▯\ _2 \cup I\rangle$ merupakan neutrosofik subring dari $\langle ▯\ _2 \cup I\rangle$, hal ini karena $0, 6$ adalah subring dari ▯ $_2$ Dengan demikian dipunyai $\langle \quad \cup I\rangle$ merupakan neutrosofik subring dari $\langle ▯\ _2 \cup I\rangle$. Selanjutnya jika diambil

$$0, 2, 4, 6, 8, 10, 2I, 4I, 6I, 8I, 10I, 2 \quad 2I, 2 \quad 4I, \cdots 2 \quad 10I, 10 \quad 2I, 10 \quad 4I, \cdots, 10 \quad 10I$$

dan $_2$ $0, 6 \quad 6I$, maka merupakan neutrosofik subring dari $\langle ▯\ _2 \cup I\rangle$. Sebaliknya meskipun $_2$ merupakan subring $\langle ▯\ _2 \cup I\rangle$ terhadap operasi yang sama, tetapi bukan merupakan neutrosofik subring dari $\langle ▯\ _2 \cup I\rangle$.

Terkait pembahasan sifat-sifat lanjut dari neutrosofik modul, berikut ini diberikan konsep dasar yang diperlukan, diantaranya konsep neutrosofik ideal, sebagaimana diberikan oleh definisi dan teorema berikut.

Definisi 2.9 [1] *Misalkan $\langle \quad \cup I\rangle$ sebarang neutrosofik ring. Suatu himpunan bagian tidak kosong P dari $\langle \quad \cup I\rangle$ disebut neutrosofik ideal dari $\langle \quad \cup I\rangle$ jika dipenuhi kondisi berikut :*

a. neutrosofik subring dari $\langle \quad \cup I\rangle$

b. Untuk setiap $p \in$ dan $\in \langle \quad \cup I\rangle$ berlaku $p \in$ dan $p \quad \in$.

Jika hanya berlaku $p \in$ maka dikatakan neutrosofik ideal kiri, sedangkan jika hanya berlaku $p \quad \in$, maka dikatakan neutrosofik ideal kanan. Selanjutnya jika neutrosofik ring $\langle \quad \cup I\rangle$ komutatif maka $p \quad p$ dan disebut neutrosofik ideal.

Berikut ini diberikan sifat-sifat dari kernel suatu homomorfisma neutrosofik ring yang berkaitan dengan sub-struktur dari neutrosofik ring, berupa neutrosofik subring dan neutrosofik ideal.

Teorema 2.10 [1] *Jika $\Phi : \langle \quad \cup I\rangle \rightarrow \langle \quad ' \cup I\rangle$ suatu homomorfisma neutrosofik ring dan* $\operatorname{Ker} \Phi$ *, maka berlaku :*

a. senantiasa merupakan subring dari $\langle \quad \cup I\rangle$

b. bukan neutrosofik subring dari $\langle \quad \cup I\rangle$

c. bukan neutrosofik ideal dari $\langle \quad \cup I\rangle$

Bukti :

a. Dibuktikan dengan cara biasa.
b. Karena $\Phi\ I \quad I$, maka $I \notin$, akibatnya bukan neutrosofik subring dari $\langle \quad \cup I\rangle$
c. Langsung terbukti dari bagian (b). ■

Terkait dengan konsep ideal, berikut ini diberikan struktur aljabar dari himpunan koset jumlah pada neutrosofik ring sebagaimana dituangkan dalam teorema berikut.

Teorema 2.11 [1] *Jika $\langle \quad \cup I\rangle$ suatu neutrosofik ring dan neutrosofik ideal dari $\langle \quad \cup I\rangle$, maka himpunan*

$$\langle \quad \cup I\rangle \qquad \mid \ \in \langle \quad \cup I\rangle$$

merupakan neutrosofik ring.

Bukti :

Untuk memperlihatkan bahwa $\langle \quad \cup I\rangle$ merupakan neutrosofik ring, diambil dua unsur sebarang dan $_2$ di $\langle \quad \cup I\rangle$ dan misalkan dan $\cdot$ dua operasi biner pada $\langle \quad \cup I\rangle$ yang didefinisikan dengan $_2$ dan $_2$, untuk setiap $, _2 \in \langle \quad \cup I\rangle$. Dapat diperlihatkan bahwa

a. Operasi dan $\cdot$ terdefinisi dengan baik
b. $\langle \quad \cup I\rangle$, grup komutatif
c. $\langle \quad \cup I\rangle$,$\cdot$ semigrup

d. Selanjutnya jika adalah unsur ketiga di dalam $\langle \cup I\rangle$, maka berlaku dan .

Dengan demikian terbukti bahwa $\langle \cup I\rangle$ suatu neutrosofik ring. ■

2.2. Neutrosofik Modul dan Sifat-sifat Dasar

Pembahasan sifat-sifat yang berlaku pada neutrosofik modul, tidak terlepas dari struktur neutrosofik grup komutatif sebagai dasar pembentukannya dan ring klasik, khususnya ring komutatatif dengan unsur satuan. Secara formal pengertian tentang neutrosofik modul baik kiri maupun kanan diberikan oleh definisi berikut.

Definisi 2.12 [1] *Misalkan , ,· ring dengan unsur satuan 1. Suatu -modul kiri neutrosofik adalah neutrosofik grup komutatif $\langle \cup I\rangle$, yang dilengkapi dengan operasi perkalian skalar ·: $\langle \cup I\rangle \to \langle \cup I\rangle$ dan memenuhi kondisi-kondisi berikut :*

a. n n

b.

c.

d. 1

untuk setiap , ∈ dan , $n \in \langle \cup I\rangle$.

Sedangkan untuk pengertian neutrosofik modul kanan dapat didefinisikan dengan cara yang serupa, perbedaannya terletak pada tindakan ring terhadap himpunan $\langle \cup I\rangle$-nya sehingga dipunyai definisi berikut.

Definisi 2.13 [1] *Misalkan , ,· ring dengan unsur satuan 1. Suatu -modul kanan neutrosofik adalah neutrosofik grup komutatif $\langle \cup I\rangle$, yang dilengkapi dengan operasi perkalian skalar ·: $\langle \cup I\rangle \to \langle \cup I\rangle$ dan memenuhi kondisi-kondisi berikut :*

a. n n

b.

c.

d. 1

untuk setiap , ∈ dan , $n \in \langle \cup I\rangle$.

Dalam hal merupakan ring komutatif, maka dipunyai sifat berikut ini.

Teorema 2.14 [1] *Misalkan , ,· ring dengan unsur satuan 1. Jika ring yang komutatif, maka neutrosofik -modul kiri $\langle \cup I\rangle$ sekaligus merupakan -modul kanan.*

Selanjutnya jika $\langle \cup I\rangle$ merupakan neutrosofik modul kiri dan sekaligus neutrosofik modul kanan, maka $\langle \cup I\rangle$ dikatakan neutrosofik modul atas atau disebut juga neutrosofik -modul.

Untuk lebih memperjelas definisi tentang modul, berikut ini diberikan beberapa contoh neutrosofik modul atas suatu ring.

Seperti halnya berlaku pada modul klasik, berikut ini diberikan definisi neutrosofik submodul dari suatu neutrosofik modul.

Definisi 2.15 [2] *Misalkan $\langle \cup I\rangle$ suatu neutrosofik -modul dan himpunan bagian tidak kosong dari $\langle \cup I\rangle$, dikatakan neutrosofik sub-modul dari $\langle \cup I\rangle$ jika dipenuhi kondisi-kondisi berikut ini :*

a. merupakan neutrosofik sub-grup dari $\langle \cup I\rangle$,

b. merupakan neutrosofik -modul terhadap operasi perkalian skalar yang sama yang berlaku pada $\langle \cup I\rangle$.

atau dengan perkataan lain, merupakan neutrosofik submodul dari $\langle \cup I\rangle$ jika dipenuhi :

a. , merupakan neutrosofik grup komutatif terhadap operasi " ", yaitu merupakan neutrosofik subgrup dari $\langle \cup I\rangle$,

b. Untuk setiap ∈ dan $n \in$ berlaku $n \in$.

Untuk mengetahui apakah suatu himpunan bagian tidak kosong dari suatu neutrosofik modul merupakan neutrosofik submodul, diberikan teorema berikut.

Teorema 2.16 [2] *Misalkan $\langle \cup I\rangle$ suatu neutrosofik -modul dan himpunan bagian tidak kosong dari $\langle \cup I\rangle$, merupakan neutrosofik submodul dari $\langle \cup I\rangle$ jika dan hanya jika memenuhi sifat :*

a. *untuk setiap* $n, n_2 \in$ *berlaku* $n - n_2 \in$
b. *untuk setiap* $\in$ *dan* $n \in$ *berlaku* $n \in$

Misalkan $\langle \cup I \rangle$ suatu neutrosofik -modul dan , $_2$ adalah neutrosofik submodul dari $\langle \cup I \rangle$. Pada [1] didefinisikan jumlahan dari neutrosofik submodul dan $_2$ sebagai himpunan $_2$ $| \in$ dan $\in _2$.

Seperti halnya berlaku pada struktur grup, pada neutrosofik modul dapat diperlihatkan bahwa irisan dan jumlahan dua neutrosofik submodul juga membentuk neutrosofik submodul.

Lemma 2.17 [2] *Misalkan* $\langle \cup I \rangle$ *suatu neutrosofik -modul. Jika dan* $_2$ *adalah neutrosofik submodul dari* $\langle \cup I \rangle$*, maka berlaku*

a. $\cap _2$ *merupakan neutrosofik submodul dari* $\langle \cup I \rangle$
b. $_2$ *merupakan neutrosofik submodul dari* $\langle \cup I \rangle$

Dari lema tersebut, dapat diperlihatkan bahwa irisan serta jumlahan tak berhingga neutrosofik submodul juga merupakan neutrosofik submodul, sebagaimana diberikan oleh teorema berikut.

Teorema 2.18 [2] *Misalkan* $\langle \cup I \rangle$ *suatu neutrosofik -modul. Jika merupakan neutrosofik submodul dari* $\langle \cup I \rangle$ *untuk setiap* $\in \Lambda$ *maka*

$$\bigcap_{\in\Lambda} \quad \text{dan} \quad \sum_{\in\Lambda}$$

Keduanya merupakan neutrosofik submodul dari $\langle \cup I \rangle$.

Dari [2] juga telah diperlihatkan bahwa gabungan dua buah neutrosofik submodul umumnya bukan merupakan neutrosofik submodul.

2.3.Sifat-sifat Lanjut Neutrosofik Modul

Pada makalah ini, pembahasan sifat-sifat lanjut dari neutrosofik modul dikaitkan dengan konsep neutrosofik modul faktor dan neutrosofik homomorfisma modul.

Diberikan $\langle \cup I \rangle$ suatu neutrosofik -modul. Karena $\langle \cup I \rangle$, suatu neutrosofik grup komutatif, maka sebarang subgrup dari $\langle \cup I \rangle$ juga merupakan grup komutatif. Misalkan sebarang subgrup dari $\langle \cup I \rangle$. Karena subgrup komutatif maka merupakan subgrup normal terhadap $\langle \cup I \rangle$, yaitu a a, untuk setiap $a \in \langle \cup I \rangle$. Denga demikian himpunan

$$\langle \cup I \rangle \quad a \quad | a \in \langle \cup I \rangle$$

merupakan grup terhadap operasi " " yang didefinisikan dengan

$$a \quad b \quad a \quad b \quad ,$$

untuk setiap $a, b \in \langle \cup I \rangle$.

Selanjutnya karena $\langle \cup I \rangle$, merupakan neutrosofik grup komutatif maka berlaku a b a b b a b a yang memperlihatkan bahwa $\langle \cup I \rangle$ merupakan grup komutatif terhadap operasi penjumlahan koset.

Selanjutnya diberikan struktur modul dari himpunan $\langle \cup I \rangle$, seperti pada teorema berikut.

Teorema 2.19 *Jika* $\langle \cup I \rangle$ *suatu neutrosofik -modul dengan adalah ring dengan unsur satuan dan sebarang neutrosofik submodul dari* $\langle \cup I \rangle$*, maka* $\langle \cup I \rangle$ *merupakan neutrosofik -modul terhadap operasi perkalian koset*

$$a \quad a$$

untuk setiap $\in$ *dan* $a \in \langle \cup I \rangle$.

Bukti :

Pertama akan diperlihatkan bahwa operasi perkalian koset terdefinisi dengan baik. Misalkan a , b $\in \langle \cup I \rangle$ dengan a b . Dengan mengingat kesamaan dua koset diperoleh $a - b \in$. Karena neutrosofik submodul, maka untuk sebarang $\in$ berlaku $a - b$ $a - b \in$, dengan perkataan lain a b . Selanjutnya sesuai dengan pendefinisian operasi perkalian koset diperoleh a b , yang memperlihatkan operasi perkalian koset tersebut terdefinisi dengan baik.

Kedua karena $a \in \langle \cup I \rangle$, untuk sebarang $\in$ dan $a \in \langle \cup I \rangle$, maka

$$a \quad a \in \langle \cup I \rangle$$

yang memberikan bahwa operasi perkalian koset tertutup. Dengan demikian operasi perkalian koset tersebut merupakan operasi biner.

Terakhir diberikan sebarang a , $b \in \langle \cup I \rangle$ dan , , $_2 \in$, maka diperoleh

a. a b

a b

a b

a b

a b

a b

b. $_2$ a $_2$ a

a $_2 a$

a $_2 a$

a $_2$ b

c. $_2$ a $_2$ a

$_2 a$ $_2 a$

$_2$ a

d. 1 a 1 a a

Dengan demikian benar bahwa $\langle \cup I \rangle$ merupakan neutrosofik modul. ■

Neutrosofik modul $\langle \cup I \rangle$ pada teorema ini disebut neutrosofik modul faktor.

Neutrosofik modul faktor merupakan salah satu konsep yang digunakan pada pembahasan teorema utama homomorfisma neutrosofik modul. Berikut ini diberikan pengertian homomorfisma neutrosofik modul, yaitu suatu pemetaan dari suatu neutrosofik modul ke neutrosofik modul yang lain yang mengawetkan sifat-sifat operasi perkalian skalar di kedua neutrosofik modul.

Definisi 2.20 *Misalkan $\langle \cup I \rangle$ dan $\langle ' \cup I \rangle$ adalah neutrosofik -modul. Pemetaan $\Phi : \langle \cup I \rangle \to \langle ' \cup I \rangle$ disebut neutrosofik homomorfisma modul jika dipenuhi ketiga syarat berikut :*

a. Φ $_2$ Φ Φ $_2$

b. Φ Φ

c. Φ I I

untuk setiap , , $_2 \in$ *dan* $\in$

Berikut diberikan contoh pemetaan yang merupakan homomorfisma neutrosofik modul dan yang bukan.

Contoh 2.21 Diketahui bahwa $\langle ▯ \cup I \rangle$ dan $\langle ▯ \cup I \rangle$ keduanya merupakan neutrosofik ▯-modul. Pemetaan $\Phi : \langle ▯ \cup I \rangle \to \langle ▯ \cup I \rangle$ yang didefinisikan dengan Φ a a ^{2}, untuk setiap $a \in \langle ▯ \cup I \rangle$, merupakan homomorfisma modul, tetapi bukan neutrosofik homomorfisma modul, karena untuk sebarang $a, b \in \langle ▯ \cup I \rangle$ dan $\in$ ▯ berlaku:

a. Φ a b a b ^{2} a ^{2} b ^{2} Φ a Φ b

b. Φ a a ^{2} a ^{2} Φ a

akan tetapi Φ I I $^2 \neq I$.

Contoh 2.22 Pandang neutrosofik ▯-modul $\langle ▯_2 \cup I \rangle$ dan didefinisikan pemetaan $\Phi : \langle ▯_2 \cup I \rangle \to \langle ▯_2 \cup I \rangle$ dengan Φ a a^2, untuk setiap $a \in \langle ▯_2 \cup I \rangle$, maka Φ merupakan endomorfisma neutrosofik modul.

Berikut ini diberikan lema mengenai sifat-sifat homomorfisma neutrosofik modul.

Lemma 2.23 *Misalkan $\langle \cup I \rangle$ dan $\langle ' \cup I \rangle$ adalah neutrosofik -modul dan $\Phi : \langle \cup I \rangle \to \langle ' \cup I \rangle$ suatu homomorfisma neutrosofik modul, maka berlaku :*

a. Jika 0 *adalah elemen identitas dari* $\langle \cup I \rangle$ *maka* Φ 0 0 , *dengan* 0 *elemen identitas dari* $\langle ' \cup I \rangle$

b. Jika $a \in \langle \cup I \rangle$ *maka* Φ $-a$ $-\Phi$ a

c. Jika *adalah sebarang submodul neutrosofik dari* $\langle \cup I \rangle$ *maka* Φ *merupakan neutrosofik submodul dari* $\langle ' \cup I \rangle$

d. Jika $'$ *adalah sebarang submodul neutrosofik dari* $\langle ' \cup I \rangle$ *maka*

$\Phi \quad '$ *merupakan neutrosofik submodul dari* $\langle \quad ' \cup I \rangle$

Bukti :

Bagian (a) dan (b) dibuktikan serupa dengan pembuktian sifat-sifat homomorfisma modul klasik, sedangkan untuk bagian (c) dan (d) dibuktikan dengan memanfaatkan Teorema 2.5. ■

Berikut diberikan definisi mengenai *kernel* dan *image* suatu homomorfisma neutrosofik modul beserta sifat-sifatnya.

Definisi 2.24 *Misalkan* $\langle \quad \cup I \rangle$ *dan* $\langle \quad ' \cup I \rangle$ *adalah neutrosofik -modul dan* $\Phi : \langle \quad \cup I \rangle \rightarrow \langle \quad ' \cup I \rangle$ *homomorfisma neutrosofik modul, maka*

ke ne $\Phi \quad \in \langle \quad \cup I \rangle | \Phi \quad 0'$

dan $i \quad age \Phi \quad ' \in \langle \quad \cup I \rangle |$

$\Phi \quad , \quad \in \langle \quad \cup I \rangle$.

Selanjutnya kernel dan image dari Φ *ini berturut-turut dinotasikan dengan* $\mathrm{Ker}\ \Phi$ *dan* $\mathrm{Im}\ \Phi$.

Contoh 2.25 Dari Contoh 2.2., diperoleh $\mathrm{Ker}\ \Phi \quad 0$ dan $\mathrm{Im}\ \Phi \quad 0, 1, I, 1$ $I \quad \langle ?_2 \cup I \rangle$.

Sifat-sifat dasar dari *kernel* dan *image* dari homomorfisma neutrosofik modul diberikan oleh lema berikut.

Lemma 2.26 *Misalkan* $\langle \quad \cup I \rangle$ *dan* $\langle \quad ' \cup I \rangle$ *adalah neutrosofik -modul dan* $\Phi : \langle \quad \cup I \rangle \rightarrow \langle \quad ' \cup I \rangle$ *homomorfisma neutrosofik modul, maka*

a. $\mathrm{Ker}\ \Phi$ *merupakam neutrosofik submodul dari* $\langle \quad \cup I \rangle$ *dan*

b. $\mathrm{Im}\ \Phi$ *merupakam neutrosofik submodul dari* $\langle \quad ' \cup I \rangle$.

Bukti :

serupa dengan pembuktian untuk submodul klasik. ■

Definisi tentang isomorfisma neutrosofik modul berikut ini, akan mengawali pembahasan mengenai teorema utama homomorfisma neutrosofik modul.

Definisi 2.27 *Misalkan* $\langle \quad \cup I \rangle$ *dan* $\langle \quad ' \cup I \rangle$ *adalah neutrosofik -modul dan* $\Phi : \langle \quad \cup I \rangle \rightarrow \langle \quad ' \cup I \rangle$ *homomorfisma neutrosofik modul. Jika* Φ *pemetaan yang bijektif, yaitu* Φ *pemetaan yang injektif sekaligus surjektif, maka pemetaan* Φ *disebut isomorfisma neutrosofik modul.*

Berikut diberikan contoh homomorfisma neutrosofik modul yang merupakan isomorfisma neutrosofik modul.

Contoh 2.28 Homomorfisma neutrosofik modul Φ pada Contoh 2.2. merupakan isomorfisma neutrosofik modul .

Berikut ini diberikan beberapa teorema yang mendukung dalam pembahasan inti, yaitu teorema utama (fundamental) homomorfisma neutrosofik modul.

Teorema 2.29 *Jika* $\langle \quad \cup I \rangle$ *dan* $\langle \quad ' \cup I \rangle$ *adalah neutrosofik -modul dan* $\Phi : \langle \quad \cup I \rangle \rightarrow \langle \quad ' \cup I \rangle$ *homomorfisma neutrosofik modul dengan* $\mathrm{Ker}\ \Phi$, *maka pemetaan*

$$: \langle \quad \cup I \rangle \quad \rightarrow \Phi \langle \quad ' \cup I \rangle$$

yang didefinisikan dengan a $\Phi\ a$, *untuk setiap* $a \quad \in \langle \quad \cup I \rangle$, *merupakan isomorfisma neutrosofik modul.*

Bukti :

serupa dengan pembuktian untuk homomorfisma modul klasik. ■

Teorema 2.30 *Jika* $\langle \quad \cup I \rangle$ *dan* $\langle \quad ' \cup I \rangle$ *adalah neutrosofik -modul dan* $\Phi : \langle \quad \cup I \rangle \rightarrow \langle \quad ' \cup I \rangle$ *homomorfisma neutrosofik modul dengan* $\mathrm{Ker}\ \Phi$, *maka pemetaan*

$$: \langle \quad \cup I \rangle \rightarrow \langle \quad \cup I \rangle$$

yang didefinisikan dengan $a \quad a$, *untuk setiap* $a \in \langle \quad \cup I \rangle$, *merupakan homomorfisma surjektif.*

Bukti :

serupa dengan pembuktian untuk homomorfisma modul klasik. ■

Dari teorema-teorema sebelumnya diperoleh hasil berikut, yang dikenal dengan teorema utama homomorfisma neutrosofik modul.

Teorema 2.31 *Jika* $\langle \quad \cup I \rangle$ *dan* $\langle \quad ' \cup I \rangle$ *adalah neutrosofik -modul dan* $\Phi : \langle \quad \cup I \rangle \rightarrow \langle \quad ' \cup I \rangle$ *homomorfisma neutrosofik modul, maka terdapat suatu isomorfisma neutrosofik modul dari* $\frac{\langle \quad \cup I \rangle}{\mathrm{Ker}\ \Phi}$ *ke* $\Phi \langle \quad \cup I \rangle$.

Bukti :
Misalkan $\langle \quad \cup I\rangle$ *dan* $\langle \quad ' \cup I\rangle$ adalah neutrosofik -modul dan $\Phi : \langle \quad \cup I\rangle \to \langle \quad ' \cup I\rangle$ homomorfisma neutrosofik modul, maka $\Phi\ \langle \quad \cup I\rangle \subseteq \langle \quad ' \cup I\rangle$ dan $\mathrm{Ker}\ \Phi$ merupakan subgrup normal dari $\langle \quad \cup I\rangle$ dan menurut Teorema 2.8. $\frac{\langle \quad \cup I\rangle}{\mathrm{Ker}\ \Phi}$ merupakan neutrosofik -modul. Jika

$$:\langle \quad \cup I\rangle \to \langle \quad \cup I\rangle$$

suatu pemetaan yang didefinisikan dengan $a \quad a$, untuk setiap $a \in \langle \quad \cup I\rangle$, maka menurut Teorema 2.12. merupakan homomorfisma neutrosofik modul yang surjektif. Selanjutnya jika

$$:\langle \quad \cup I\rangle \quad \to \Phi\ \langle \quad ' \cup I\rangle$$

Pemetaan yang didefinisikan dengan $a \quad \Phi\ a$, untuk setiap $a \in \langle \quad \cup I\rangle$, maka merupakan isomorfisma neutrosofik modul. Dengan demikian dipunyai diagram :

$$\subseteq \langle \quad \cup I\rangle \xrightarrow{\Phi} \Phi\ \langle \quad \cup I\rangle \subseteq \langle \quad ' \cup I\rangle$$

$$\gamma \qquad \mu$$

Ter $\langle \quad \cup I\rangle /$
$\langle \quad \cup I\rangle$, maka diperoleh

$$a \quad a \quad a$$
$$\Phi\ a$$

yang memperlihatkan bahwa diagram tersebut komutatif. Dengan demikian terbukti bahwa terdapat isomorfisma neutrosofik modul

$$:\frac{\langle \quad \cup I\rangle}{\mathrm{Ker}\ \Phi} \to \Phi\ \langle \quad ' \cup I\rangle\ . \blacksquare$$

3. PENUTUP

Dari uraian pada bagian sebelumnya telah diperoleh gambaran bahwa antara neutrosofik modul dan modul klasik sebagai struktur padanannya, terdapat beberapa keterkaitan, diantaranya struktur atau sub-strukturnya mempunyai kemiripan definisi, tetapi dari sifat-sifat yang berlaku pada umumnya tidak selamanya bersesuaian antara kedua struktur tersebut.

Dari hasil pembahasan sejauh ini dapat disimpulkan bahwa sifat-sifat yang berlaku pada modul klasik masih berlaku pada struktur neutrosofik modul. Terutama yang berkaitan dengan neutrosofik modul faktor dan homomorfisma neutrosofik modul. Dengan memanfaatkan sifat kekomutatifan dari neutrosofik grup yang berakibat pada sebarang subgrupnya senantiasa normal dapat dikontruksi neutrosofik modul faktor. Selanjutnya dengan memanfaatkan kernel suatu homomorfisa neutrosofik modul dan konsep neutrosofik modul faktor tersebut dapat diperlihatkan berlakunya teorema utama homomorfisma neutrosofik modul.

4. UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Fakultas Sains dan Matematika, Universitas Diponegoro yang telah memberikan bantuan finansial, melalui program Penelitian Pembinaan dengan dana DIPA PNBP FSM Universitas Diponegoro Tahun 2014 dengan kontrak pelaksanaan penelitian No. 82C/UN7.3.8/PL/2014.

5. DAFTAR PUSTAKA

[1] Agboola A.A.A, Akinola A. D. & Oyebola O. Y., (2011), Neutrosophic Rings I, *International J. Math. Combin*, 4 : 1 – 14.

[2] Suryoto, Bambang Irawanto dan Nikken Prima Puspita, (2015), Neutrosofik Modul dan Sifat-sifatnya, *Jurnal Matematika*, 18 : 30 – 35

[3] *Proceedings of The First International Conference on Neutrosophy, Neutroshopic Logic, Neutroshophic Set, Neutroshopic Probability and Statistics*, (2001), University of New Mexico, Gallup, 1 – 3 Desember 2001, ISBN : 1–931233–67–5.

[4] Smarandache, Florentin, (2003) *A Unifying Field in Logics* : *Neutroshopic Logic*. *Neutroshopy*, *Neutroshophic Set*, *Neutroshopic Probability*, American Research Press, Rehoboth, New Mexico.

[5] Kandasamy, W. B. V dan Florentin Smarandache, (2006), *Some Neutroshopic Algebraic Structures and Neutroshopic N – Algebraic Structures*", Hexis, Phoenix – Arizona.

[6] Kandasamy, W. B. V & Florentin Smarandache, (2006), *Neutroshopic Rings*", Hexis, Phoenix – Arizona.