TITIK TETAP NADLR FUNGSI MULTI NILAI KONTRAKTIF PADA RUANG METRIK ( )

Rinurwati
Jurusan Matematika FMIPA-ITS
Jl. Arif Rahman Hakim
Surabaya 60111

Abstract. In this paper was discussed about Nadlr fixed point of contractive multivalued function on ϰ(X). This results can be considered as the generalizations of Bollobus et al result complete metrice space X.

Keyword : Contractive, metrice space, multivalued function, Nadlr fixed point

1. PENDAHULUAN

Konsep titik tetap fungsi multi nilai kontraktif pada ruang metrik lengkap X telah dipelajari oleh beberapa peneliti sebelumnya antara lain Bollobus, dkk [2] dan Frigon [4]. Mereka tidak membahas konsep titik tetap fungsi mulitnilai kontraktif pada ruang ϰ(X) dengan

(X) = { | , ≠ }.

Dalam paper ini dibahas konsep titik tetap fungsi multi nilai kontraktif pada ruang ϰ(X) dan beberapa sifatnya. Hasil ini merupakan generalisasi dari hasil Bollobus dkk.

2. TEORI DASAR

Pengertian dasar yang digunakan dalam pembahasan paper ini antara lain pengertian ruang metrik, fungsi multi nilai dan sifat-sifatnya. Pengertian-pengertian ini dirujuk dari [1] dan [5].

2.1. RUANG METRIK

Definisi 2.1.1. [1] *Metrik pada himpunan X adalah fungsi : → yang mempunyai sifat-sifat berikut :*

(a) (,) ≥ 0 *untuk semua* ,
(b) (,) = 0 *jika dan hanya jika* =
(c) (,) = (,) *untuk semua* ,
(d) (,) ≤ (,) + (,) *untuk semua* , ,

Ruang metrik (X, d) adalah himpunan X bersama dengan metrik d pada X.

Contoh 2.1.2 [1]
R adalah ruang metrik dengan metrik
(,) = | − | untuk , , .
(R, d) disebut **Ruang metrik usual**

Definisi 2.1.3 [1] *Barisan bilangan real adalah fungsi pada himpunan bilangan asli N yang rangenya termuat dalam himpunan real R. Barisan ini dinotasikan dengan* ( ), ( ) *untuk setiap* .

Contoh 2.1.4 [1]
( ) = − adalah barisan bilangan real.

Definisi 2.1.5 [1] *Diberikan barisan bilangan real* ( ). *Bilangan real x dikatakan limit dari* ( ) *jika untuk setiap* > 0 *terdapat bilangan asli* ( ) *sehingga untuk setiap* ≥ ( ), ( ) *berada dalam persekitaran* – ( ) *dari x, dengan* ( ) { | , (,) < }.

Contoh 2.1.6 [1] 0 adalah limit barisan −

Jika x limit dari barisan ( ) maka dikatakan( ) **konvergen** ke x.

Jadi – konvergen ke 0.

Definisi 2.1.7 [1] *Barisan bilangan real* ( ) *dikatakan* ***Barisan Cauchy*** *jika untuk setiap* > 0 *terdapat bilangan asli* ( ), *sehingga untuk setiap bilangan asli* , ≥ ( ), *suku-suku dan memenuhi* | − | < .

Contoh 2.1.8 [1] − adalah barisan Cauchy

Definisi 2.1.9 *Ruang metrik (X, d) dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchy dalam (X, d) konvergen dalam (X, d).*

Contoh 2.1.10 [1]
Ruang metrik (R, d) dengan
(,) = | − |, untuk setiap , adalah lengkap.

2.2 FUNGSI MULTI NILAI

Definisi 2.2.1 [5] , *X ruang metrik. Fungsi multi nilai : → adalah "left-total relation" yaitu setiap input (elemen domain) dikawankan dengan satu atau lebih output (elemen kodomain).*

Output dari fungsi multi nilai adalah elemen kodomain yang wujudnya berupa single multiset atau single value. Jadi kodomain dari fungsi multi nilai adalah himpunan multiset-multiset. Untuk menyatakan fungsi multi nilai ini, digunakan notasi .

Contoh 2.2.2 [5]
Setiap bilangan real lebih besar dari nol mempunyai dua akar kuadrat.
Dengan notasi fungsi multi nilai ini ditulis:
( ) = √‾ = √‾|
= { | }
= { | = √‾ = ( ) , }
= { ( )| }

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam paper ini dibahas tentang titik tetap fungsi multi nilai kontraktif dengan nilai tak kosong dan tertutup.
Diberikan ruang metrik (X, d) dan bola terbuka B (x, r) di X berpusat x dan jari-jari r. B(C, r) = B(x, r) dengan C . Dibentuk
( ) = { ; , ≠ }

Definisi 3.1 [4] *Diberikan dengan ruang metrik usual lengkap (X, d), , ( ). Didefinisikan fungsi : → dengan d(x,C) = min { d(x, y) ; y }*

Definisi 3.2 [4] *Diberikan ruang metrik lengkap (X, d), , ( ), didefinisikan fungsi : → dengan*
d(A, C) = maks {d(x, C) ; x }
= maks {min {d(x, y); y }; x }

Definisi 3.3 [4] *Diberikan ruang metrik lengkap (X, d). Pada ( ) didefinisikan fungsi :*
( ) ( ) →
(,) (,)
dengan
(,) = { (,), (,)}
=*maks* { { (,); }; },
{ { (,); }; }

Selanjutnya dapat ditunjukkan bahwa adalah metrik pada ( ) , sebagai berikut:

1. Karena d metrik pada X maka d(x, y) ≥ 0 , y X
   Akibatnya d(A, C) ≥ 0 , ( ), sehingga
   (,) = { (,), (,)} ≥ 0
2. (,) = { (,), (,)} = 0
3. (,) = { (,), (,)}
   = { (,), (,)}
   = (,)
4. Akan ditunjukkan apakah , ( )
   (,) ≤ (,) + (,) untuk suatu K ( )
   Ditunjukkan dulu :
   (,) ≤ (,) + (,)
   Ambil sebarang
   (,) = inf { (,); }
   ≤ inf { (,) + (,); } ;
   (Karena d metrik)
   ≤ inf { (,); } +
   sup{inf { (,); }; }

= (,) + (,)

, :

(,) ≤ (,) + (,)

Dengan cara yang sama diperoleh :

(,) ≤ (,) + (,)

(,) = { (,), (,)}

≤ { (,) + (,),

(,) + (,)}

≤ { (,), (,)}

+ { (,), (,)}

= { (,) + (,)}

Dari 1 sampai dengan 4 dapat disimpulkan bahwa ( ).

Ternyata ruang (( ),) merupakan ruang metrik lengkap. Sebelum sifat ini dibuktikan, berikut ini didefinisikan pengertian dilasi dari S X oleh bola dengan jari-jari dan sifat-sifat yang terkait.

Definisi 3.4 [4] *Diberikan himpunan S X dan* ≥ 0. *Didefinisikan*
+ = { ; (,) ≤ *untuk suatu* }
***S* +** *disebut dilasi S oleh bola dengan jari-jari* .

Lemma 3.5 [4] *Diberikan A, C* ( )*, ruang metrik (X, d) dan* > 0 *maka*
(,) ≤ + dan +

Lemma 3.6 [4] *Diberikan ruang metrik (X, d). { ; } barisan Cauchy dari titik-titik dalam (( ),)*
∞ *barisan tak hingga dari bilangan bulat*
0 < < <
Jika { ; } dalam (X, d) maka terdapat barisan Cauchy { ; } sehingga = *untuk semua j N*

Berikut ini ditunjukkan bahwa ruang metrik ($\varkappa$(X),) lengkap

Teorema 3.7 [4] *Jika ruang metrik (X, d) lengkap maka ruang metrik (( ),) lengkap. Selanjutnya jika { ( )} barisan Cauchy maka* = $_{\to\infty}$ ( )
= { ; { } *yang konvergen ke x*}

Bukti :

Misalkan { } barisan Cauchy dalam ( ) dan A didefinisikan seperti dalam teorema di atas. Dapat dibuktikan sebagai berikut ;

a. ≠
b. A tertutup dan lengkap, karena R lengkap
c. Untuk > 0 terdapat N sehingga n ≥ N, A +
d. A terbatas total, jadi (b) kompak
e. lim =

(a) Akan ditunjukkan dengan membuktikan bahwa ada barisan Cauchy { } dalam ( ), akhirnya didapatkan barisan bilangan bulat < < < < sehingga

$$(\quad , \quad) < \frac{1}{2} \qquad , \quad >$$

Pilih ,karena , ≤ – didapat suatu sehingga , ≤ –. Diasumsikan, dipilih barisan berhingga , = 1, 2, … , dengan

, ≤ – .

Karena , ≤ – . Sebagai contoh misalkan titik dalam yang mendekati .

Dengan induksi di dapat barisan tak hingga { } sehingga , ≤ – .

Untuk melihat bahwa { } barisan Cauchy dalam R, ambil > 0 dan pilih sehingga $\sum^{\infty}$ – < .

Untuk m > n ≥ didapat

, ≤ ,

\+ , +

∞

\+ , < $\frac{1}{2}$ <

(b) Untuk menunjukkan bahwa A tertutup, dimisalkan { } adalah barisan konvergen ke titik a. Akan ditunjukkan , sehingga A tertutup. Untuk setiap bilangan bulat positif i, terdapat barisan { , } sehingga lim $_{\to\infty}$, = . Terdapat barisan naik bilangan positif { }$^{\infty}$ sehingga , < −. Selanjutnya untuk setiap terdapat bilangan bulat sehingga

, ≤ − , jadi

, ≤ − .

Jika dimisalkan = , tampak bahwa dan lim $_{\to\infty}$ = .

dapat diperluas ke barisan konvergen { } sehingga . Jadi terbukti bahwa A tertutup.

(c) Ambil > 0 sebarang. Terdapat N sehingga untuk , ≥ , (,) ≤ . Misalkan ≥ . Untuk ≥ , + . Akan ditunjukkan bahwa + . Untuk itu, misalkan , terdapat barisan { } yang konvergen ke a. Diasumsikan N cukup besar sehingga untuk ≥ , (,) < ,Kemudian + karena + . Karena kompak, dapat ditunjukkan bahwa + tertutup, sehingga karena + untuk setiap ≥ , a harus dalam + . Terbukti bahwa + untuk n cukup besar.

(d) Andaikan A tidak terbatas total, maka untuk suatu > 0 tidak akan ada suatu − net berhingga. Kemudian diperoleh barisan { }$^{\infty}$ dalam , sehingga , ≥ untuk ≠ . Akan ditunjukkan bahwa hal ini menimbulkan suatu kontradiksi. Dengan (c) terdapat n cukup besar sehingga + − . Untuk setiap terdapat sehingga , ≤ $\frac{}{3}$. Karena kompak, barisan bagian { } dari { } konvergen. Selanjutnya didapat dua titik dan sehingga

, < $\frac{}{3}$. Tetapi

, ≤ (,)

\+ , + ,

< $\frac{}{3}$ + $\frac{}{3}$ + $\frac{}{3}$

Kontradiksi dengan pemilihan { }

Jadi A terbatas total dan dengan (b) kompak.

(e) Dari (d), ( ). Jadi dengan (c) dan Lemma 3.5 bukti bahwa lim = lengkap jika ditunjukkan bahwa untuk > 0 terdapat N sehingga untuk ≥ , + . Untuk menunjukkan hal ini, misalkan > 0 dan didapat N sehingga untuk ≥ ,

(,) ≤ −. Untuk , ≥ ,

\+ −. Misalkan ≥ . Akan ditunjukkan bahwa + . Misalkan . Terdapat barisan naik bilangan bulat { } sehingga

< < < < < < dan

untuk , ≥ , + − .

Catat bahwa + −.

Karena , terdapat , sehingga (,) ≤ —. Dengan cara yang sama (dengan induksi) didapat barisan , ,..., sehingga dan , ≤ −

Dengan ketidaksamaan segitiga dapat ditunjukkan bahwa
, ≤
dan { } adalah barisan Cauchy, { } konvergen ke titik . Selanjutnya , ≤ berakibat (,) ≤ .
Jadi terbukti bahwa + untuk ≥ . Hal ini melengkapi bukti bahwa lim = dan akibatnya (( ),) adalah ruang metrik lengkap.

Fungsi Kontraktif Pada (( ),)

Berikut ini disajikan pengertian fungsi multi nilai kontraktif pada ruang metrik lengkap (( ),) dan sifat-sifatnya.

Definisi 3.8 [4] *Diberikan ≠ , . Fungsi multi nilai → dengan nilai tak kosong, tertutup dikatakan kontraktif jika terdapat konstan k,*0 ≤ < 1 *dengan* (( ), ( ) ≤ (,)

Lemma 3.9 [4] *Jika → fungsi multi nilai kontraktif maka g kontinu.*

Bukti:

Ambil > 0 sebarang. Karena fungsi multi nilai kontraktif maka terdapat > 0 sehingga ( ), ( ) ≤ (,) < bila d (x, y) < dengan =

Jadi kontinu pada X.

Lemma 3.10[4] *Diberikan ruang metrik (X, d). Jika → fungsi multi nilai kontraktif maka* ( ) → ( )

Bukti :

Diambil sebarang ≠ , A tertutup.
Ditunjukkan ( ) , dengan ( ) = { ( ); } ≠
Diambil barisan { } ( )
Terdapat barisan { } dengan ( ) = . Karena A tertutup maka { } mempunyai barisan bagian yang konvergen (misal ke x). Ditulis { } → . Karena g kontinu maka { } barisan bagian dari { } dengan ( ) = dan {{ } → , = ( ).
Jadi ( ) tertutup.

Definisi 3.11 [4] *Misalkan , : → fungsi multi nilai. Titik disebut titik tetap jika* ( ) = .

Contoh 3.12

Dari contoh sebelumnya, titik tetap adalah
( ) =
⇔ √‾ =
⇔ √‾ 1 − √‾ = 0
⇔ = 1
Jadi titik tetap = 1
Jika
= ( ) = ( ) = √‾ = √1 = {−1, 1}
( ) = ( ) = √‾ = {−1},{1},{−1, 1}
Jadi ( ).

Lemma 3.13[4] *Diberikan ruang metrik (X, d). Jika → fungsi multi nilai kontraktif dengan faktor kontraktif k, maka* ( ) → ( ) *dengan g(A) = g(x) ; x } adalah fungsi multi nilai kontraktif pada (( ),) dengan faktor kontraktif k.*

Bukti :

Menurut Lemma 3.9 : → kontinu,
Menurut Lemma 3.10 : ( ) → ( ).
Diambil A, C ( )
(( ), ( ))
= {min { (( ), ( )); } ; }
≤ {min { (,); } ; }
= {min { (,); }; }
= (,)
Dengan cara yang sama ( ), ( ) ≤ (,)

Jadi ( ), ( ) =
{ (( ), ( )), ( ), ( ) }
≤ { (,), (,)} = (,)

Prinsip Kontraktif Banach untuk fungsi kontraktif dengan nilai tertutup.

Teorema 3.14 [4] *Diberikan (( ),) ruang metrik lengkap dengan* ( ) *dan* > 0. *Misalkan* (,) → ( ) *kontraktif multi nilai dengan nilai tidak kosong, tertutup sehingga*

(, ( )) < (1 −) (1.1)

Dengan 0 ≤ < 1 *konstanta kontraktif, maka mempunyai titik tetap, yaitu terdapat* (,) *dengan* ( ).

Bukti :

Pertama ditunjukkan (dengan induksi matematik) bahwa terdapat barisan titik-titik { } dalam (,) dengan
( ), ( )
dan
(,) < (1 −) ( )

Persamaan (1.1) menjamin adanya titik ( ) dengan
(,) < (1 −)

Selanjutnya, andaikan terdapat titik yang memenuhi ( ) dan ( ) untuk 1 ≤ ≤

Catat bahwa
( ) , ( ) ≤ (,)
< (1 −)

Oleh karena itu, terdapat ( ) dengan
(,) < (1 −)

Dengan induksi terdapat barisan { } dalam (,) memenuhi ( ) dan ( ) .

Tafsirkan
, < (1 + + +) (1 −)

Akibatnya { } barisan Cauchy sehingga konvergen ke titik (,)

Di lain pihak, karena ( )tertutup dan
( ) , ( ) ≤ (,)

(Karena lim → (, ( )) = 0)

Diperoleh ( )

Hasil utama konstruksi ini dituangkan dalam teorema berikut :

Teorema 3.15 [4] *Diberikan (( ),) ruang metrik lengkap dan* ( ) → ( ) *fungsi multi nilai kontraktif dengan nilai tidak kosong dan tertutup, maka mempunyai titik tetap.*

Bukti :

Misal ( ), dipilih > 0 dengan
(, ( ) < (1 −)
dengan 0 ≤ < 1 konstanta kontraktif.

Menurut **Teorema 3.14**, mempunyai titik tetap yaitu terdapat (,) dengan ( ).

Selanjutnya titik tetap disebut **Teorema Titik Tetap Nadlr.**

4. KESIMPULAN

Fungsi multi nilai kontraktif pada himpunan dari himpunan bagian-himpunan bagian ruang metrik lengkap tidak kosong dan tertutup mempunyai titik tetap.

5. DAFTAR PUSTAKA

[1] Bartle, R. G and Sherbert, D.R., (1992), *Introduction to Real Analysis*, 2 , John Wiley & Sons, Singapore.

[2] Bollobus, B., et all, (2001), *Fixed Point Theory and Applications*, Cambrige University Press, Cambrige.

[3] Bornsley,M.,(1988), *Fractal Everywhere*, Academic Press Inc, London.

[4] Frigon, M., *Fixed Point Result For Multivalued Maps in Metrice Spaces with Generalized Unwordness Conditions, Fixed Point Theory and Applications Volume 2010*, Article 10 183217, 19 pages, do I :10, 115/2015/183217

[5] Soltuz, S.M., (2000), *An Introduction to Multivlued Map,* Journal Octogan Mathematical Magazine Active, Volume 8 Issue 2, Filgur Publisher Brosov, Romania