BEBERAPA SIFAT SMALL RIEMANN SUMS FUNGSI TERINTEGRAL HENSTOCK-KURZWEIL DARI RUANG EUCLID $\mathfrak{R}^n$ KE RUANG BANACH $\mathcal{X}$

Siti Khabibah[1] dan Soeparna Darmawijaya[2]
[2]Program Studi Matematika FMIPA, Universitas Gadjah Mada
Jl. Sekip Utara, Yogyakarta

Abstract : In this paper we discussed some properties of Henstock-Kurzweil integrable functions from the Euclidean Spaces $\mathfrak{R}^n$into Banach space $\mathcal{X}$, Locally Small Riemann Sums dan Globally Small Riemann Sums.

Keywords : Euclidean Spaces, Globally Small Riemann Sums, Henstock-Kurzweil, Locally Small Riemann Sums,.

1. PENDAHULUAN

Untuk memudahkan pembahasan selanjutnya, pada bagian ini terlebih dahulu diberikan beberapa definisi dan sifat-sifat untuk fungsi terintegral Henstock-Kurzweil yang bernilai Banach dan terdefinisi di ruang Euclide $\Re^n$.

Diberikan fungsi volume α pada $\Re^n$ dan sel $E \subset \Re^n$. Fungsi $\bar{f} : \Re^n \to \mathcal{X}$ dikatakan *terintegral-* α *Henstock* pada *E*, ditulis dengan $\bar{f} \in R^*(E, \mathcal{X}, \alpha)$, jika terdapat $\bar{a} \in \mathcal{X}$ dengan sifat untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif δ pada *E* sehingga untuk setiap partisi Perron δ-fine $\mathcal{D} = \{(D, \bar{x})\} = \{(D_i, \bar{x}_i) : i = 1,2, \dots r\}$
Pada *E* benar bahwa
$\|(\mathcal{D}) \sum \bar{f}(\bar{x})\alpha(D) - \bar{a}\| = \|\sum_{i=1}^{r} \bar{f}(\bar{x}_i)\alpha(D_i) - \bar{a}\| < \varepsilon.$

Jika $\bar{f} \in R^*(E, \mathcal{X}, \alpha)$ dan $\mathcal{I}(E)$ koleksisemua sel di dalam *E* maka fungsi sel $\bar{F} : \mathcal{I}(E) \to \mathcal{X}$ dengan rumus $\bar{F}(I) = (R^*) \int_I \bar{f} \, d\,\alpha$ untuk setiap sel $I \in \mathcal{I}(E)$ disebut *Primitif Henstock-* α fungsi $\bar{f}$ pada *E*. Fungsi $\bar{f} \in R^*(E, \mathcal{X}, \alpha)$ jika dan hanya jika terdapat fungsi sel aditif $\bar{F} : \mathcal{I}(E) \to \mathcal{X}$ sehingga untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif δ pada *E* berlaku

$$\|(\mathcal{D}) \sum \bar{f}(\bar{x})\alpha(D) - \bar{F}(E)\| = \|(\mathcal{D})\{\sum \bar{f}(\bar{x})\alpha(D) - \bar{F}(D)\}\| < \varepsilon$$

untuk setiap partisi Perron δ-fine $\mathcal{D} = \{(D, \bar{x})\}$ pada *E.*
Selanjutnya untuk beberapa teorema dan definisi dalam tulisan ini dirujuk dari pustaka yang ada kemudian digeneralisasikan.

Untuk membuktikan ekuivalensi antara fungsi terintegral Henstock-Kurzweil dengan fungsi yang mempunyai sifat Small Riemann Sums diperlukan suatu criteria dan teorema berikut ini

Teorema 1.1 (Kriteria Cauchy) *Diberikan fungsi volume* α *pada* $\Re^n$ *, sel* $E \subset \Re^n$ *dan* $\mathcal{X}$ *ruang Banach.Fungsi* $\bar{f} \in R^*(E, \mathcal{X}, \alpha)$ *jika dan hanya jika untuk setiap bilangan* $\varepsilon > 0$ *terdapat fungsi positif* δ *pada E sehingga untuk setiap dua partisi* $\mathcal{D}_1 = \{(D, \bar{x})\}$ *dan* $\mathcal{D}_2 = \{(D, \bar{x})\}$ *pada E berlaku*

$$\left\|(\mathcal{D}_1) \sum \bar{f}(\bar{x})\alpha(D) - (\mathcal{D}_2) \sum \bar{f}(\bar{x})\alpha(D)\right\| < \varepsilon.$$

Teorema 1.2 *Diberikan fungsi volume* α *pada* $\Re^n$ *dan sel* $E \subset \Re^n$ *.Jika* $\bar{f} \in R^*(E, \mathcal{X}, \alpha)$ *dengan* $\bar{F}$ *sebagai primitifnya, maka untuk setiap bilangan* $\varepsilon > 0$ *terdapat fungsi positif* $\eta > 0$ *sehingga jika sel* $J \subset E$ *dengan* $\alpha(J) < \eta$ *berakibat*

$$\|\bar{F}(J)\| = \left\|(R^*) \int_J \bar{f} \, d\alpha\right\| < \varepsilon.$$