**PRIME IDEAL ON SEMIRINGS**

Dian Winda Setyawati

Jurusan Matematika FMIPA ITS Surabaya

Kampus ITS Sukolilo Surabaya, 60111

dian\_ws\_math@matematika.its.ac.id

**Abstract**. Let *R* be a semirings. A subset *I* of *R* is called an ideal of *R* if andthen and*I* is called prime ideal if for thenor On semirings, a non zero ideal *I* is prime if and only if , for *p* is prime or *I = <2,3*>. A paper will show form of prime ideal of semirings

**Keywords :**generator, ideal, prime ideal, semirings

1. **PENDAHULUAN**

Konsep dari semiring mulai dikenalkan oleh H.S Vandiver tahun 1935[1] dan sejak saat itu mulai banyak dipelajari sampai sekarang. Saat ini banyak paper-paper yang membahas tentang semiring serta jenis - jenis ideal pada semiring. Pada paper saya tahun 2005 [4] membahas tentang ideal-*p* kiri utama dalam semiring inversive regular –*p*, tahun 2010 membahas ideal prime pada semiring dimana merupakan himpunan semua matriks diagonal berukuran 2x2 atas himpunan bilangan bulat nonnegatif . Pada paper ini akan dibahas tentang ideal prime pada semiring dimana merupakan himpunan semua matriks diagonal berukuran *n x n* atas himpunan . Paper ini merupakan generalisasi dari paper sebelumnya yaitu ideal prime pada semiring . Sebelumnya akan diberikan beberapa definisi yang akan digunakan untuk membahas ideal prime pada semiring

**Definisi 1.1 [3]** : *Himpunan tak kosong terhadap operasi biner + dan ditulis disebut ring jika*

*(i) grup komutatif*

*(ii) bersifat assosiatif*

*(iii) bersifat distributif*

Semiring merupakan bentuk generalisasi dari Ring dimana salah satu atau lebih syarat pada ring dihilangkan. Pada paper ini syarat yang dihilangkan adalah eksistensi invers pada terhadap + sehingga semakin banyak himpunan yang dapat dibentuk menjadi semiring.

**Definisi 1.2 [3]** *Himpunan tak kosong terhadap operasi biner + dan ditulis disebut semiring jika*

1. *bersifat assosiatif, komutatif dan mempunyai elemen identitas 0*
2. *bersifat assosiatif*

*(iii) bersifat distributif.*

Salah satu contoh semiring adalah ( himpunan bilangan bulat nonnegatif ) dan ( himpunan semua matriks diagonal berukuran *n x n* atas himpunan ). maupun bukan merupakan ring karena terhadap operasi biner + , elemen pada maupun tidak mempunyai invers. Selanjutnya akan didefinisikan ideal pada semiring yang identik dengan definisi ideal pada ring.

**Definisi 1.3** **[2]** *Diberikan semiring dan subset dari . I disebut ideal pada R jika untuk setiap dan berlaku*

1. *dan*

*Ideal I disebut ideal prime jika dimana maka atau Notasi . Pada semiring notasi =*

1. **IDEAL PRIME PADA SEMIRING**

Teorema berikut ini merupakan hasil yang diperoleh dari paper dan pada semiring yang akan digunakan untuk mendapatkan ideal prime pada .

**Teorema 2.1** *Himpunan merupakan ideal pada*

**Bukti :**

Ambil dan maka *x* dan *y* dapat dinyatakan dalam

y

dimana sehingga

dan

Terbukti merupakan ideal pada

Teorema berikut ini menunjukkan ideal prinsipal pada yang merupakan ideal prime pada

**Teorema 2.2** *Ideal pada adalah prime jika dan hanya jika x bilangan prima*

**Bukti** :

) Andaikan x bukan bilangan prima maka x dapat dinyatakan dalam . Jelas bahwa tetapi dan sehingga tidak prime. Terjadi kontradiksi. Terbukti jika Ideal pada adalah prime maka *x* bilangan prima

Karena *x* bilangan prima maka setiap menyatakan bahwa y mempunyai faktor prima *x* . Sekarang jika dan maka mempunyai faktor prima *x*. Hal ini terjadi jika salah satu atau keduanya dari a dan b mengandung faktor prima *x*. Dengan kata lain atau Terbukti prime

**Teorema 2.3**  *merupakan ideal pada jika dan hanya jika*

**Bukti :**

Jika a = 1 maka . Akan ditunjukkan merupakan ideal pada Jelas bahwa = < 2 , 3 > sehingga dengan teorema 2.3, merupakan ideal pada.

Andaikan . Jelas bahwa sehingga setiap Ideal sejati dari tidak memuat elemen 1 akibatnya bukan ideal pada . Terbukti jika merupakan ideal pada maka

Dari teorema 2.3 menunjukkan bahwa ideal maksimal pada adalah dimana =

Berikut ini akan diberikan lemma yang akan digunakan untuk membuktikan ideal prime pada .

**Lemma 2.4 [2]** *Jika dan FPB maka terdapat sedemikian hingga untuk semua*

**Bukti :**

Karena FPB(a,b) = 1 maka ada sedemikian hingga jelas. Ambil *n = paqa* maka dimana

Kasus 1 : untuk r = 0, jelas

Kasus 2 : jika 0<r< a maka . Jelas bahwa sehingga

Kasus 3 : jika maka r dapat dinyatakan dimana

0 < p < a sehingga . Dengan menggunakan kasus 2 maka. Akibatnya

Teorema berikut ini menunjukkan bentuk ideal prime secara umum pada.

**Teorema 2.5 [2]** *Ideal tak nol I dari adalah prime jika dan hanya jika untuk suatu bilangan prima p atau I = < 2 , 3 >*

=-{1}

**Bukti** :

jelas bahwa jika I = < *p* > maka p bilangan prima. Diasumsikan I bukan ideal prinsipal. Misal *a* elemen terkecil tak nol dari *I* maka *a* bilangan prima dan juga terdapat bilangan terkecil *b* dari *I* sehingga FPB *(a,b) = 1*

Jika *a > 2* maka menurut lemma 2.4 terdapat sedemikian hingga untuk semua . Pilih j terkecil dimana dan I. Karena I ideal prime dan I maka I atau I . Terjadi kontradiksi sehingga a = 2.

Jika b > 3 maka menurut lemma 2.5 terdapat sedemikian hingga untuk semua . Pilih k terkecil dimana dan I. Karena I ideal prime dan I maka I atau I . Terjadi kontradiksi sehingga b = 3 sedangkan <2,3> = ( terbukti )

() Dari teorema 2.2 terbukti jika untuk suatu bilangan prima *p* maka I ideal prime pada Tinggal ditunjukkan I = < 2 , 3 > =-{1} prime pada .Ambil sebarang yang memenuhi maka akibatnya atau

**3. IDEAL PRIME PADA SEMIRING**

**Teorema 3.1 [2]** *Diberikan ..., dimana i = 1, 2, 3, 4,...n dan Himpunan merupakan ideal pada*

**Bukti :**

Ambil sebarang dan maka

Karena dan ideal pada maka

Akibatnya dan Z. Terbukti *M* ideal pada

Dari teorema diatas terlihat bahwa untuk membentuk ideal pada , elemen - elemen pada diagonal dapat berada pada himpunan dengan pembangun yang sama juga dapat berada pada himpunan dengan pembangun yang berbeda.

**Kasus 1 (apabila ada elemen-elemen pada diagonal yang berada pada himpunan dengan pembangun yang sama)**

Diberikan ..., dimana *i = 1, 2, 3, 4,...n* dan Himpunan ,

Jika terdapat , dan maka *M* merupakan ideal pada tetapi tidak prime

Kasus 1 dapat dijelaskan sebagai berikut :

Misalkan . Ambil sebarang dimana

dan

maka

*M*

tetapi dan. Terlihat bahwa tidak prime. Secara Umum misalkan . Ambil sebarang dimana pada matriks A elemen = *a*, , dan pada matriks B elemen = 1, , ,

maka memiliki elemen = *a*, , . Jelas bahwa tetapi dan Terlihat bahwa tidak prime.

Dari kasus 1 menunjukkan bahwa untuk membentuk ideal prime pada , elemen - elemen pada diagonal bukan anggota dari himpunan pembangun yang sama

**Kasus 2 ( apabila ada elemen-elemen pada diagonal yang berada pada himpunan dengan pembangun yang berbeda )**

Diberikan ..., dimana *i = 1, 2, 3, 4,...n* dan Himpunan , . Jika terdapat ,

dimana

dan

maka *M* merupakan ideal pada tetapi tidak prime

Kasus 2 dapat dijelaskan sebagai berikut :

Misalkan dimana . Ambil sebarang dan dimana

dan

maka

*M* tetapi

dan. Terlihat bahwa tidak prime . Secara Umum

dimana

.

Ambil

dan dimana pada matriks A elemen = *a*, , dan pada matriks B elemen = 1, ,

maka memiliki elemen = *a*, , . Jelas bahwa tetapi dan Terlihat bahwa tidak prime.

Dari kasus 2 menunjukkan bahwa untuk membentuk ideal prime pada , elemen elemen pada diagonal bukan anggota dari himpunan pembangun yang berbeda. Dari kasus 1 dan kasus 2 terbentuklah ideal prime pada sebagai berikut

**Teorema 3.2 [4]** *Diberikan adalah ideal prime dari . Ideal dari adalah prime jika dan hanya jika dimana dan atau*

**Bukti** :

) Dari kasus 1 dan kasus 2 terlihat bahwa Ideal dari **bukan** prime jika elemen elemen pada diagonal berada pada himpunan dengan pembangun yang sama, demikian juga elemen pada diagonal berada pada himpunan dengan pembangun yang berbeda sehingga agar N merupakan ideal prime pada maka dimana dan atau

() Jelas bahwa

merupakan ideal prime pada . Tinggal ditunjukkan

merupakan ideal prime pada . Untuk sebarang maka matrik memiliki elemen.

Karena  *N* maka tinggal diperhatikan pada . Jelas bahwa adalah ideal prime dari dan elemen pada matrik *A*,

maka akibatnya atau

. Dengan kata lain maka atau . Terbukti adalah ideal prime.

1. **KESIMPULAN**

Dari uraian diatas terlihat bahwa Suatu himpunan matriks *N* akan membentuk ideal prime pada jika dimana dan atau

1. **DAFTAR PUSTAKA**

Atani,R.E, *et al*. (2008), *Ideal Theory in Commutative Semiring*, Buletinul Academiei de Stiinte A Republicii Moldovo. Matematica , 2 (57) : 14-23

[2] Gupta,V *et.al*, *Prime Ideals in Semiring*, Bulletin of Malaysian Mathematical Science Society, http : // math. usm. my /bulletin

[3] Khanna,VJ. (1993), *A Course in Abstact Algebra*, Vikas Publishing House PVT LYD

[4] Setyawati, DW., (2005), *Ideal-p Kiri Utama dalam Semiring Inversive Regular-p*, Sains Dan Sibernatika, 18(1) : 1-11

[5] Setyawati, DW., (2010), *Ideal prime pada Semiring* , SEACMA (South East Asian Conference on Mathematics and its Applications) Prosidings, 63-67