JURNAL MATEMATIKA DAN KOMPUTER
Vol. 7. No. 1, 1 - 10, April 2004, ISSN : 1410-8518

PROGRAM NONLINEAR FUZZY

Khairudin
Dosen Tetap Jurusan Teknik Sipil
Fakultas Teknik Sipil dan Perencanaan Universitas Bung hatta Padang
e-mail:kha_pix67@yahoo.com

Abstract

Nonlinear programming problems have not been developed yet and still to be attention for research just recently. In this paper will be introduced simple fuzzy nonlinear programming problem with any membership nonlinear function, like proposed by Wang and Tang in their paper at 1995 to 1997(Gen and Cheng, 2000). Via defuzzyfication process by Belmann and Zadeh (1970) so that will be improved that fuzzy nonlinear programming problem can be transformed into conventional nonlinear problems.

Key-word : Nonlinear programming problem;fuzzy nonlinear programming; nonlinear membership function

Abstrak

Masalah program nonlinier belum banyak dikembangkan dan masih menjadi perhatian riset-riset belakangan ini. Dalam paper ini dibahas masalah program nonlinear fuzzy sederhana dengan fungsi keanggotaan nonlinear tertentu, seperti yang dikemukakan oleh Wang dan Tang dalam papernya pada tahun 1995 hingga 1997 (Gen dan Cheng, 2000). Melalui proses defuzzifikasi Belmann dan Zadeh (1970) akan ditunjukkan bahwa masalah program nonlinear fuzzy dapat ditransformasikan ke masalah nonlinear konvensional.

Kata-kata kunci : Masalah program nonlinear;Program nonlinear fuzzy; Fungsi keanggotaan nonlinear.

1. PENDAHULUAN

Pada tahun 1970 Zimmermann memperkenalkan masalah program linear fuzzy (Sakawa, 1993). Masalahnya berawal dari persoalan program linear konvensional(:Khairudin, 2002). Demikian pula halnya dengan masalah program nonlinear fuzzy tidak terlepas dari pemahaman terlebih dahulu terhadap program nonlinear. Alasan membuat suatu program linear atau nonlinear menjadi fuzzy adalah untuk melenturkan kekakuan yang terjadi pada fungsi tujuan dan kekakuan yang dimiliki oleh konstrain-konstrainnya. Bentuk minimum dari program nonlinear konvensional adalah:

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad f(x) \\ &\textit{dengan konstrain}(s.t) \quad g_i(x) \leq 0 \quad , i = 1, 2, ..., m \end{aligned} \qquad (1)$$

atau dapat juga ditulis

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad f(x) \\ &\textit{dengan konstrain} \quad x \in X = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \leq 0 \ \ , i = 1, 2, ...m \right\} \qquad (2) \\ &f(x) \ \ \textit{dan} \ \ g_i(x) \ \ \textit{adalah fungsi} - \textit{fungsi nonlinier bernilai real}. \end{aligned}$$

masalah program nonlinear adalah menentukan vektor $x = [\, x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n]^T$ yang meminimumkan atau memaksimumkan fungsi tujuan f(x). Karena masalah max f(x)= - Min (- f(x)) maka persoalan minimum dapat dibawa ke persoalam maksimum, demikian juga sebaliknya. Beberapa algoritma atau metoda yang sudah dikenal dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah program nonlinear dengan kendala ini, tetapi saat ini sudah ada perangkat lunak yang dapat menyelesaikan masalah tersebut, diantaranya menggunakan program QS, MATLAB, GAM dan LINGO. Berikut satu contoh masalah program nonlinear yang diselesaikan oleh QS (Taha,H.A;1996);

$$\begin{aligned} &\text{minimumkan} && f(x) = x_1^4 - x_2^2 + 5x_1x_2\, x_3 \\ &\text{dengan kendala} && g_1(x) = x_1^2 - x_2^2 + x_3^3 \leq 10 \\ & && g_2(x) = x_1^3 + x_2^2 + 4x_3^2 \geq 20 \end{aligned}$$

Diperoleh solusi $x = (x_1, x_2, x_3) = (\, 2.713495 \,;\ 9999.134 \,;\ 0\,)$.

Didalam paper ini akan dibahas masalah program nonlinear fuzzy, yaitu program nonlinear yang menggunakan unsur-unsur fuzzy yang dilengkapi oleh suatu fungsi keanggotaan (membership function). Pembahasan lebih dititk beratkan bagaimana mengkonversikan masalah program nonlinier fuzzy kedalam masalah program nonlinier konvensional yang selanjutnya dapat diselesaikan dengan program QS.

2. PROGRAM NONLINEAR FUZZY

Berawal dari masalah program nonlinear konvensional yang memiliki kekakuan pada fungsi tujuan dan konstrain-konstrainnya maka akan dilenturkan dengan menjadikannya ke bentuk versi fuzzy (Sakawa,1993) yang mempunyai bentuk ;

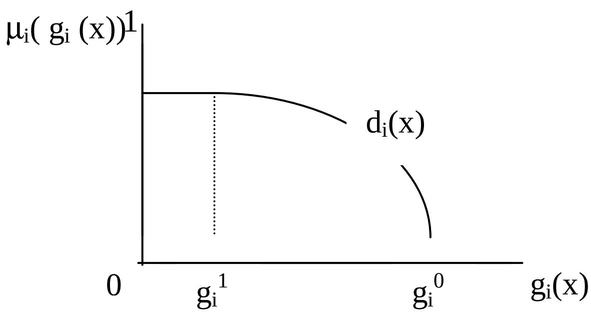
$$\begin{aligned} &\widetilde{\text{minimize}}\ f(x) \\ &\text{dengan konstrain}\ g_i(x) \precsim 0\ ,\ i = 1,2,......,m \end{aligned} \qquad (3)$$

simbol $\widetilde{\text{minimize}}$ dan $\precsim$ menyatakan suatu kelenturan atau versi fuzzy dari persoalan minimize biasa dengan tanda $\leq$; yang berarti bahwa fungsi objektif akan diminimalkan seefektif (sebaik) mungkin dengan konstrain yang tepat akan dimungkinkan terpenuhi.

Suatu masalah program nonlinear konvensional dikatakan berbentuk fuzzy bila didalam masalah program nonlinear tersebut terdapat unsur-unsur fuzzy yang ditandai dengan memberikan fungsi keanggotaan (membership function) μ_i ($g_i(x)$) ,i=0,1,….,m yang diambil oleh pengambil keputusan (decision maker / DM). Dalam hal ini DM harus menentukan fungsi keanggotaan secara subjektif yang merupakan fungsi monoton turun tegas (strictly monoton decreasing function) yang respek terhadap g_i dengan bentuk berikut;

$$\mu_i(\, g_i(x)\,) = \begin{cases} 1 & ; g_i(x) \leq g_i^{1} \\ d_i(x) & ; g_i^{1} \leq g_i(x) \leq g_i^{0} \\ 0 & ; g_i(x) \geq g_i^{0} \end{cases} \qquad (4)$$

dengan g_i^1 dan g_i^0 menyatakan nilai g_i sehingga grade (tingkat) fungsi keanggotaan μ_i ($g_i(x)$) adalah 1 dan 0 dan grade untuk nilai diantaranya diekspresikan oleh suatu fungsi monoton turun $d_i(x)$ yang respek terhadap g_i , ini dapat ditunjukan oleh gambar 1.



Gambar 1. Fungsi keanggotaan monoton turun tegas

Berikut ini diperkenalkan model program nonlinear fuzzy yang dikemukakan oleh Gen dan Cheng (2000). Menurut Gen dan Cheng ada beberapa hal yang meliputi masalah program nonlinear dengan fungsi tujuan dan konstrain fuzzy adalah;

1. Nilai objektif yang diinginkan pengambil keputusan (DM) bukanlah suatu maksimum aktual tetapi suatu nilai fuzzy. DM mengaspirasikan untuk mencapai suatu tingkat z_0 dan tidak kurang dari tingkat terbawah z_0-p_0. Jadi derajat yang diinginkan DM meningkat dengan meningkatnya nilai objektif.
2. Kuantitas yang terpakai pada sumber-sumber ke-i (i= 1,2,3…,m) mengalami kenaikan yang diterima oleh DM dengan cara mengadakan overtime work, menggunakan kuantitas yang tersedia dan sebagainya. Dengan menganggap bahwa kuantitas terpakai yang direncanakan pada sumber i adalah b_i (i=1,2,…m_1), kenaikan terbesar dapat diterima DM adalah p_i dan kuantitas terpakai fuzzy dinotasikan oleh $\overline{b_i}$ yang dihubungkan ke suatu fungsi keanggotaan monoton turun tegas. Untuk tipe sumber ini digunakan tidak melebihi dari yang tesedia.
3. Kuantitas yang terpakai untuk tipe sumber i lainnya (i=m_1+1,m_1+2,…..,m) adalah tidak menentu(imprecise). Asumsikan $\overline{b_i}$ yang terpakai dari jenis sumber i ini adalah suatu taksiran dengan rata-rata b_i dan kesalahan (error) masing-masing p_i^- dan p_i^+ yang mempunyai tipe fungsi L-R (Left-Right) dari fungsi keanggotaan. Untuk tipe sumber ini digunakan sebanyak yang dimungkinkan.

Berdasarkan 3 hal tersebut diatas, bentuk lain dari masalah optimisasi fuzzy adalah:

$$\begin{aligned} &\widetilde{\max}\ f(x) \\ &\text{dengan kendala}\ \ g_i(x) \le \overline{b_i} \qquad i = 1,2,\ldots.., m_1 \\ &\qquad\qquad\qquad\quad g_i(x) = \overline{b_i} \qquad i = m_1 + 1, m_1 + 2, \ldots\ldots.., m \\ &\qquad\qquad\qquad\quad x \ge 0 \end{aligned} \tag{5}$$

dengan x adalah variabel keputusan dimensi-n ; $x=[x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n]^T$, dan $\overline{b}$ adalah vektor sumber fuzzy yang tersedia dengan $\overline{b}=[\overline{b_1},\overline{b_2},\ldots\ldots\ldots,\overline{b_m}]$. Bentuk (5) dapat dijadikan kebentuk (3), demikian juga sebaliknya. Wang dan Tang (dalam Gen dan Cheng, 2000)memperkenalkan fungsi keanggotaan yang menyatakan bilangan fuzzy $\overline{b_i}$ untuk fuzzy objektif dan fuzzy konstrain. Untuk sumber ke i (i=1,2,…m_1), misalkan $\mu_{\overline{b_i}}$ menunjukan ketercapaian dari suatu sumber fuzzy $\overline{b_i}$ yang didefinisikan oleh;

$$\mu_{\overline{b_i}}(x) = \begin{cases} 1 & ;g_i(x)\le b_i \\ 1-\left(\dfrac{g_i(x)-b_i}{p_i}\right)^r & ;b_i\le g_i(x)\le b_i+p_i \\ 0 & ;g_i(x)>b_i+p_i \end{cases} \qquad (6)$$

dengan r > 0

$\mu_{\overline{b_i}}$ adalah fungsi turun tegas secara monoton yang menunjukan tingkat yang dapat dicapai dari sumber fuzzy $\overline{b_i}$. Sedangkan untuk sumber- i (i=m_1+1,m_2+2,….,m), misalkan $\mu_{\overline{b_i}}$ didefinisikan oleh

$$\mu_{\overline{b_i}}(x) = \begin{cases} 0 & ;\ g_i(x)\le b_i-p_i^- \\ 1-\left(\dfrac{b_i-g_i(x)}{p_i^-}\right)^r & ;b_i-p_i^-\le g_i(x)\le b_i \\ 1-\left(\dfrac{g_i(x)-b_i}{p_i^+}\right)^r & ;b_i\le g_i(x)\le b_i+p_i^+ \\ 0 & ;\ g_i(x)>b_i+p_i^+ \end{cases} \qquad (7)$$

$\mu_{\overline{b_i}}$ adalah tipe fungsi L-R yang menunjukan tingkat akurasi dari estimasi untuk sumber fuzzy $\overline{b_i}$. Dengan cara serupa, misalkan $\mu_i(x)$ fungsi keanggotaan dari konstrain fuzzy ke-i yang didefinisikan oleh

$$\begin{aligned} \mu_i(x) &= \max_{y\ge g_i(x)}\left\{\mu_{\overline{b_i}}(y)\right\} = \mu_{\overline{b_i}}(g_i(x)) && i=1,2,\ldots\ldots,m_1 \\ &= \mu_{\overline{b_i}}(g_i(x)) && i=m_1+1,m_1+2,\ldots.,m \end{aligned}$$

$\mu_i(x)$ merefleksikan derajat yang ingin dicapai DM dengan konstrain fuzzy ke-i pada titik x. Misalkan $\mu_0(x)$ menggambarkan objektif fuzzy $\widetilde{\max}\ f(x)$ yang didefinisikan oleh

$$\mu_0(x) = \begin{cases} 0 & ;\ f(x) \le z_0 - p_0 \\ 1 - \left(\dfrac{z_0 - f(x)}{p_0} \right)^r & ;\ z_0 - p_0 \le f(x) \le z_0 \\ 1 & ;\ f(x) \ge z_0 \end{cases} \qquad (8)$$

$\mu_0(x)$ adalah fungsi kontinu monoton turun tegas dan menunjukan derajat kepuasan dari fungsi objektif fuzzy pada titik x. Tentu saja fungsi keanggotaan yang menggambarkan fuzzy objektif dan fuzzy konstrain dapat ditentukan oleh DM dengan jenis lainnya, misalnya fungsi eksponensial, logaritmik dan sebagainya. Masalah tersebut diatas disebut sebagai fungsi objektif dengan resource nonlinier program (FO/RNP) yang dapat diselesaikan.

3. PENYELESAIAN PROGRAM NONLINIER FUZZY.

Berpedoman kepada fuzzy decision yang dikemukakan Bellman dan Zadeh (1970) dan dengan menggunakan fungsi keanggotaan (4) maka masalah menentukan keputusan yang memaksimalkan adalah memilih x^* sedemikian hingga

$$\mu_D(x^*) = \max \min_{i=0,1,\ldots,m} \{ \mu_i (g_i(x)) \} \qquad (9)$$

Dengan mengambil variabel sebarang λ maka masalah (9) dapat ditransformasi ke dalam masalah program nonlinear konvensional yang ekivalen yaitu;

Maximize λ

Dengan kendala $\lambda \le \mu_i (g_i(x))$, $i=0,1,\ldots,m$ (10)

Persoalan berikutnya adalah menyelesaikan masalah (10) dengan menggunakan algoritma atau program yang sudah dikenal, diantaranya program QS sehingga akan diperoleh keputusan yang memaksimalkan.

Dalam fuzzy decision aslinya, Belmann dan Zadeh menggunakan himpunan alternatif $X=\mathbb{R}^n$ untuk memperkenalkan konsep program matematik fuzzy secara generalisasi. Misalkan suatu fuzzy goal G pada X dikarakterisasikan oleh fungsi keanggotaan

$$\mu_G : X \to [0,1] \quad (11)$$

dan fuzzy konstrain C pada X dikarakteriasikan oleh fungsi keanggotaan

$$\mu_C : X \to [0,1] \quad (12)$$

sehingga fuzzy decision D yang dibentuk dari fuzzy goal G dan fuzzy konstrain C didefinisikan oleh

$$\mu_D(x) = \min (\mu_G (x), \mu_C(x)) \quad (13)$$

keputusan yang memaksimalkan (jika ada) merupakan keputusan optimal dan diberikan oleh

$$\max_{x \in X} \mu_D(x) = \max_{x \in X} \min(\mu_G(x), \mu_C(x)) \quad (14)$$

Seperti halnya Belmann dan Zadeh (1970), Tanaka (dalam Sakawa, 1993) memformulasikan masalah program matematika fuzzy sebagai pencarian maksimum fuzzy decision. Kenyataannya bahwa tidak selalu ada $x \in X$ yang menghasilkan keputusan maksimal, Tanaka Mengekspresikan masalah program matematika fuzzy sebagai berikut;

$$\sup_{x \in X} \mu_D(x) = \sup_{x \in X} \{\min(\mu_G(x), \mu_C(x))\} \quad (15)$$

Walaupun terlihat sangat sulit menentukan keputusan yang memaksimalkan dari fungsi keanggotaan μ_G (x) dan μ_C(x), dengan beberapa asumsi dari fungsi keanggotaan, Tanaka membuktikan bahwa masalah ini dapat direduksi ke bentuk masalah program matematika konvensional berikut;

$$\text{Sup } \mu_G(x)$$
$$\text{Dengan kendala } \mu_G(x) \leq \mu_C(x) \quad (16)$$

4. APLIKASI PADA PERENCANAAN PRODUKSI

Suatu pabrik manufaktur akan memproduksi 2 jenis produk A dan B dalam periode 1 bulan. Produk A dan B membutuhkan 3 jenis sumber (bahan) R_1,R_2 dan R_3. Kebutuhan untuk memproduksi barang A dari ketiga bahan tersebut masing-masing adalah 2, 3 dan 4 unit. Untuk memproduksi barang B masing-masing adalah 3, 2 dan 2 unit. Kapasitas bahan R_1 dan R_2 yang tersedia adalah 50 dan 44 unit, tetapi ditolerir ada penambahan masing-masing sebesar 30 dan 20 unit untuk safety store yang diperkenankan oleh general manajer. Sedangkan nilai taksiran banyaknya bahan R_3 yang terpakai adalah 36 unit dengan kesalahan taksiran sebesar 5 unit.

Penyelesaian.

Misalkan banyaknya produk yang direncanakan dari A dan B masing-masing adalah x_1 dan x_2. unit cost (biaya/ unit) dan sale price (harga jual) dari produk A dan B masing-masing dinotasikan oleh;

$$UC_1 = c_1 \qquad US_1 = \frac{k_1}{x_1^{1/a_1}}$$

$$UC_2 = c_2 \qquad US_2 = \frac{k_2}{x_2^{1/a_2}}$$

Selanjutnya DM mengharapkan bahwa total profit mencapai suatu tingkat aspirasi z_0 tetapi tidak kurang dari suatu lower level (tingkat bawah) $z_0 - p_0$. Hal ini adalah tipikal dari model FO/RNP problem yang oleh Wang dan Tang (dalam Gen dan Cheng, 2000) dapat diekspresikan sebagai berikut:

$$\text{Max} \quad f(x) = k_1 x_1^{1-1/a_1} - c_1 x_1 + k_2 x_2^{1-1/a_2} - c_2 x_2$$

$$\text{s.t.} \quad 2x_1 + 3x_2 \le \tilde{50}$$

$$4x_1 + 2x_2 \le \tilde{44}$$

$$3x_1 + 2x_2 = \tilde{36}$$

$$x_1 , x_2 \ge 0$$

dengan $p_1=30$, $p_2=20$, $p_3^- = p_3^+ = 5$

$k_1=50$, $k_2=45$, $c_1=8$, $c_2=10$, dan $a_1=a_2=2$,r=1

Dengan mengambil $z_o = 150$ dan $z_o - p_o = 120$ dan menggunakan (8) diperoleh;

$$\mu_0(x) = \begin{cases} 0 & ; f(x) \le 120 \\ 1 - \left(\dfrac{150 - (50x_1^{1/2} - 8x_1 + 45x_2^{1/2} - 10x_2)}{30} \right) & ;120 \le f(x) \le 150 \\ 1 & ; f(x) \ge 150 \end{cases}$$

selanjutnya untuk konstrain ketaksamaan, dengan (6) diperoleh;

$$\mu_{\ddot{b}_1}(x) = \begin{cases} 1 & ; 2x_1 + 3x_2 \le 50 \\ 1 - \dfrac{(2x_1 + 3x_2 - 50)}{30} & ; 50 \le 2x_1 + 3x_2 \le 80 \\ 0 & ; 2x_1 + 3x_2 \ge 80 \end{cases}$$

$$\mu_{\ddot{b}_2}(x) = \begin{cases} 1 & ; 4x_1 + 2x_2 \le 44 \\ 1 - \dfrac{(4x_1 + 2x_2 - 44)}{20} & ; 44 \le 4x_1 + 2x_2 \le 64 \\ 0 & ; 4x_1 + 2x_2 \ge 64 \end{cases}$$

dan konstrain persamaan, dengan (7) diperoleh;

$$\mu_{\bar{b}_3}(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad 3x_1 + 2x_2 \le 31 \\ 1 - \left(\dfrac{36 - (3x_1 + 2x_2)}{5} \right) & ; 31 \le 3x_1 + 2x_2 \le 36 \\ 1 - \left(\dfrac{3x_1 + 2x_2 - 36}{5} \right) & ; 36 \le 3x_1 + 2x_2 \le 41 \\ 0 & ; 3x_1 + 2x_2 \ge 41 \end{cases}$$

Jadi dengan menggunakan (10) maka persoalan diatas dapat dibawa ke masalah program nonlinier konvensional:

$$\begin{aligned} &\max \quad \lambda \\ &\text{dengan kendala } 5/3x_1^{1/2} - 8/30x_1 + 45/30x_2^{1/2} - 1/3x_2 - \lambda \ge 4 \\ &\qquad 2/30x_1 + 1/10x_2 \qquad + \lambda \le 8/3 \\ &\qquad 1/5x_1 + 1/10x_2 \qquad + \lambda \le 3{,}2 \\ &\qquad 3/5x_1 + 2/5x_2 \qquad + \lambda \le 8{,}2 \\ &\qquad 3/5x_1 + 2/5x_2 \qquad - \lambda \ge 6.2 \\ &\qquad x_1, x_2, \lambda \ge 0 \end{aligned}$$

Selanjutnya dengan program QS diperoleh penyelesaian:

x_1= 9,680599 , x_2= 5,14677 , λ=0,2944254 dan f(x)= 128,7450

Hasil ini memang tidak sebaik yang diselesaikan oleh Gen dan Cheng (2000) yang menggunakan Algoritma Genetik, diperoleh x_1=9,76222 , x_2=5,06271 dan λ_0=0,25 dengan nilai max f(x)=128,7500.

5. KESIMPULAN

Berdasarkan uraian yang dikemukakan sebelumnya, dapat diambil beberapa kesimpulan;

a. Program nonlinier fuzzy dapat dibawa kebentuk program nonlinier konvensional yang ekivalen.
b. Penyelesaian program nonlinier fuzzy adalah dengan menyelesaikan program nonlinier konvensional ekivalen yang selanjutnya diselesaikan dengan menggunakan algoritma atau perangakat lunak yang sudah dikenal.
c. Penyelesaian program nonlinier dapat menggunakan algoritma genetik agar mendapatkan hasil yang lebih akurat.

DAFTAR PUSTAKA

Belman,R.E., and Zadeh,L.A., 1970, Decision Making in a Fuzzy Environment, Management Sciences, 17, pp. 141 – 164

Gen,Mitsuo and Cheng,R, 2000, Genetic agorithms and Engineering Optimization, John Wiley & Sons Inc, New York.

Khairudin, 2002 , Masalah Program Linier Fuzzy, Jurnal teknika FTI Universitas Bung Hatta (diterima,2002)

Sakawa,M., 1993, Fuzzy Sets and Interactive Multi Objective Optimization, Plenum Press, New York

Taha,H.A., 1996, Operations Research, diterjemahkan oleh Drs. Daniel Wirajaya, Bina rupa Aksara , Jakarta.