JURNAL MATEMATIKA DAN KOMPUTER
Vol. 7. No. 1, 20 - 30, April 2004, ISSN : 1410-8518

INVERS MATRIKS MOORE PENROSE ATAS RING KOMUTATIF DENGAN ELEMEN SATUAN

(THE MOORE PENROSE INVERSE OF MATRICES OVER COMMUTATIVE RING WITH UNITY)

Titi Udjiani SRRM
Matematika FMIPA Universitas Diponegoro Semarang

Abstrak

Jika A adalah matriks dengan elemen Ring komutatif dengan elemen satuan yang berukuran mxn maka matriks invers dari A yang disebut dengan matriks invers Moore Penrose dari A ditulis G(A) dapat diperoleh dengan memenuhi syarat perlu dan cukup agar G(A) merupakan invers Moore Penrose dari A

Kata Kunci : invers matrik, ring komutatif

1. PENDAHULUAN

Sudah diketahui bahwa invers matriks bujur sangkar dengan determinan≠0 dapat diperoleh dengan menggunakan pertolongan matriks adjoint Pengertian matriks invers dari matriks berukuran mxn dengan elemen bilangan riil yang sekarang dikenal dengan sebutan matriks inverse Moore Penrose (Moore E. H., 1920). Tulisan ini membahas penentuan matriks invers Moore Penrose G(A) dari matriks atas ring komutatif dengan elemen satuan A dan menentukan syarat perlu dan cukup agar G(A) merupakan invers Moore Penrose dari A.

2. MATRIKS INVERS MOORE PENROSE

Dalam tulisan ini, R adalah ring komutatif dengan elemen satuan dan dengan involusi $\overline{\ldots}$. Involusi $\overline{\ldots}$ adalah pemetaan $a \in R \rightarrow \overline{a} \in R$ sedemikian sehingga untuk setiap a, b ∈ R berlaku :

$$(1)\ \overline{a+b} = \overline{a}+\overline{b};\ (2)\ \overline{a\,b} = \overline{a}\,.\,\overline{b};\ (3)\ \overline{\overline{a}} = a$$

Selanjutnya M_R adalah himpunan matriks atas ring R dengan involusi :

$(a_{ij}) \rightarrow (a_{ij})^* = (\overline{a_{ji}})$, sedemikian sehingga berlaku :

(i) $(A + B)^* = A^* + B^*$

(ii) $(AB)^* = B^*A^*$

(iii) $A^{**} = A$

dengan ukuran matriks A dan B memenuhi kondisi di atas.

Definisi 1 (R.B.Bapat,1992)

Suatu matriks $A \in M_R$ dikatakan mempunyai invers Moore Penrose di M_R jika terdapat matriks $A^+ \in M_R$ sedemikian sehingga : (i) $AA^+A = A$; (ii) $A^+AA^+ = A^+$;

(iii) $(AA^+)^* = AA^+$; (iv) $(A^+A)^* = A^+A$

Jika A^+ ada maka tunggal dan disebut invers Moore Penrose dari A.

Teorema 2(R.B.Bapat,1992)

Diketahui $A \in M_R$.

Pernyataan di bawah ini berlaku untuk setiap invers Moore Penrose dari A

a. $(A^{++}) = A$
b. $(A^*)^+ = (A^+)^*$
c. $(AA^*)^+ = (A^+)^* A^+$ dan $(A^*A)^+ = A^+(A^*)^+$
d. AA^+, A^+A, $I- AA^+$, $I- A^+A$ adalah hermit dan idempoten.

Notasi:

$A \in M_R$ yang berukuran m x n

$Q_{r, m}$ adalah himpunan dari himpunan bagian berurutan $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2, \dots \alpha_r)$ dengan $1 \le \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_r \le m$

$Q_{r, n}$ adalah himpunan dari himpunan bagian berurutan $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots \beta_r)$ dengan $1 \le \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_r \le n$

A^{α}_{β} adalah sub matriks A yang ditentukan oleh baris sesuai dengan α dan kolom sesuai dengan β. Jika $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2, \dots \alpha_m)$ maka A^{α}_{β} cukup ditulis A_β . Jika $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots \beta_n)$ maka A^{α}_{β} cukup ditulis A^α.

$A = (a_{ji}) \in M_R$ yang berukuran m x n

$\alpha = (\alpha_1,\alpha_2, \dots \alpha_r) \in Q_{r, m}$ dan $1 \le j \le m$, $j \in \alpha$ artinya terdapat indeks t sedemikian sehingga $j = a_t$ untuk suatu indeks t atau $t = j(\alpha\ a)$

JURNAL MATEMATIKA DAN KOMPUTER
Vol. 7. No. 1, 20 - 30, April 2004, ISSN : 1410-8518

Demikian juga $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots \beta_r) \in Q_{r,\, n}$ dan $1 \le i \le n$, $i \in \beta$ artinya terdapat indeks s sedemikian sehingga $i = \beta_s$ atau $s = i(\beta)$

Jika $j \in \alpha$ dan $i \in \beta$ maka kofaktor elemen a_{ij} submatriks A^{α}_{β} dari $A_{(m \times n)}$ adalah $(-1)^{j(\alpha)+i(\beta)}$ det $A^{\alpha_j}_{\beta_i}$ dengan $\alpha_j \in Q_{r-1,\, m}$ berisi elemen-elemen α dengan mengabaikan baris ke j dan $\beta_i \in Q_{r-1,\, m}$ berisi elemen-elemen β dengan mengabaikan kolom ke i.

Selanjutnya jika $j \in \alpha$ dan $1 \le k \le m$ didefinisikan $A^{\alpha(j \leftarrow k)}_{\beta}$ adalah matriks berukuran r x r yang sama dengan matriks A^{α}_{β}, kecuali pada elemen $a_{j\beta}$, dari baris $j(\alpha)$ diganti secara bersesuaian dengan elemen-elemen $a_{k\beta}$.

Teorema 3 (R.B.Bapat,1992)

Jika $A = (a_{ji}) \in M_R$ dengan rank r,

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) \in Q_{r,\, m}$

$\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r) \in Q_{r,\, n}$, $j \in \alpha$, $1 \le k \le m$, $1 \le h \le n$ maka

1. Det $A^{\alpha(j\leftarrow k)}_{\beta} = \sum_{i \in \beta} (-1)^{j(\alpha(+i(\beta(} a_{ki} \det A^{\alpha_j}_{\beta_i}$

2. $a_{kh} \det A^{\alpha}_{\beta} = \sum_{j \in \alpha} a_{jh} \det A^{\alpha(j \leftarrow k)}_{\beta}$.

Bukti :

(1) Dengan menggunakan ekspansi baris ke k

$$\det A^{\alpha(j\leftarrow k)}_{\beta} = \sum_{s=1}^{r} (-1)^{j(\alpha)+s} a_{k\beta_s} \det A^{\alpha_j}_{\beta_{\beta s}} = \sum_{i \in \beta} (-1)^{j(\alpha)+i(\beta)} a_{ki} \det A^{\alpha_j}_{\beta_i}$$

(2) Diambil $A^{(\alpha,k)}_{(\beta,h)}$ adalah matriks berukuran (r + 1) x (r + 1) yang dibangun oleh baris-baris $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, k)$ dan kolom-kolom $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r, h)$ dari A. Karena rank A = r maka semua minor yang berukuran (r + 1) x (r + 1) bernilai nol. Akibatnya $A^{(\alpha,k)}_{(\beta,h)} = 0$. Dengan menggunakan ekspansi kolom terakhir diperoleh :

$$0 = \sum_{t=1}^{r} (-1)^{t+(r+1)} a_{\alpha_t,h} \det A^{(\alpha_{\alpha_t},k)}_{\beta} + (-1)^{(r+1)+(r+1)} a_{kh} \det A^{\alpha}_{\beta}$$

$$a_{kh} \det A_\beta^\alpha = \sum_{t=1}^{r} (-1)^{t+r} a_{\alpha_t,h} \det A_\beta^{(\alpha_{\alpha_t},k)} = \sum_{j\in\alpha} (-1)^{j(\alpha)+r} a_{jh} \det A_\beta^{(\alpha_j,k)}$$

$$= \sum_{j\in\alpha} (-1)^{j(\alpha)+r} a_{jh} (-1)^{r-j(\alpha)} \det A_\beta^{\alpha(j\leftarrow k)} = \sum_{j\in\alpha} a_{jh} \det A_\beta^{\alpha(j\leftarrow k)}$$

(Terbukti)

Teorema 4 (R.B.Bapat,1992)

Diketahui A $\in$ M_R (mxn) dengan rank r. Jika u(A) = $\sum_{\alpha\in Q_{r,m}} \sum_{\beta\in Q_{r,n}} \det A_\beta^\alpha \overline{\det A_\beta^\alpha}$ mempunyai invers Moore Penrose $u(A)^+$ di R dan g_{ij} = $u(A)^+ \sum_{\substack{\alpha\in Q_{r,m}\\ j\in\alpha}} \sum_{\substack{\beta\in Q_{r,n}\\ i\in\beta}} (-1)^{j(\alpha)+i(\beta)} \overline{\det A_\beta^\alpha} \det A_{\beta_i}^{\alpha_j}$. Maka G(A) = (g_{ij}(A)) adalah invers Moore Penrose dari A jika dan hanya jika u(A) $u(A)^+$A = A.

Bukti :

Selanjutnya untuk menyederhanakan penulisan $\sum_{\alpha\in Q_{r,m}}$ ditulis dengan $\sum_{\alpha}$.

$$\Leftarrow (1).\ (A\,G(A))_{kj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} g_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} \left(u(A)^+ \sum_{\substack{\alpha\\ j\in\alpha}} \sum_{\substack{\beta\\ i\in\beta}} (-1)^{j(\alpha)+i(\beta)} \overline{\det A_\beta^\alpha} \det A_{\beta_i}^{\alpha_j} \right)$$

$$= u(A)^+ \sum_{\substack{\alpha\\ j\in\alpha}} \sum_{\beta} \overline{\det A_\beta^\alpha} \sum_{\substack{\beta\\ i\in\beta}}^{n} (-1)^{j(\alpha)+i(\beta)} a_{ki} \det A_{\beta_i}^{\alpha_j}$$

$$= u(A)^+ \sum_{\substack{\alpha\\ j\in\alpha}} \sum_{\beta} \overline{\det A_\beta^\alpha} \det A_\beta^{\alpha(j\leftarrow k)}$$

Jika j = k, det $A_\beta^{\alpha(j\leftarrow k)}$ = det A_β^α sehingga $(A\,G(A))_{jj}$ = $u(A)^+ \sum_{\substack{\alpha\\ j\in\alpha}} \sum_{\beta} \overline{\det A_\beta^\alpha} \det A_\beta^\alpha$

$$= \left(\overline{A\,G(A)}\right)_{jj}$$

Jika j $\neq$ k dan k $\in$ α, maka terdapat dua baris yang sama sehingga $\det A_\beta^{\alpha(j\leftarrow j)} = 0$

Jika j $\neq$ k dan k $\notin \alpha$, $\alpha_{jk} \in Q_{r,m}$ adalah elemen-elemen dari α dengan mengganti j dengan k.

JURNAL MATEMATIKA DAN KOMPUTER
Vol. 7. No. 1, 20 - 30, April 2004, ISSN : 1410-8518

$$\det A_{\beta}^{\alpha(j\leftarrow k)} = (-1)^{j(\alpha)+k(\alpha_{jk})} \det A_{\beta}^{\alpha_{jk}}$$

jika $\gamma = \alpha_{jk}$ maka $\alpha = \gamma_{kj}$.

$$\left(\overline{AG(A)}\right)_{kj} = u(A)^{+} \sum_{\substack{\alpha \\ j\in\alpha \\ k\notin\alpha}} \sum_{\beta} \det A_{\beta}^{\alpha} \overline{\det A_{\beta}^{\alpha(j\leftarrow k)}}$$

$$= u(A)^{+} \sum_{\substack{\alpha \\ j\in\alpha \\ k\notin\alpha}} \sum_{\beta} (-1)^{j(\alpha(+k(\alpha_{jk})}\det A_{\beta}^{\alpha} \overline{\det A_{\beta}^{\alpha_{jk}}}$$

$$= u(A)^{+} \sum_{\substack{\gamma \\ k\in\gamma \\ j\notin\gamma}} \sum_{\beta} (-1)^{j(\gamma_{kj})+k(\gamma(}\det A_{\beta}^{\gamma_{kj}} \overline{\det A_{\beta}^{\gamma}}$$

$$= u(A)^{+} \sum_{\substack{\gamma \\ k\in\gamma \\ j\in\gamma}} \sum_{\beta} \overline{\det A_{\beta}^{\gamma}} \det A_{\beta}^{\gamma(k\leftarrow j)} = (A\,G(A))_{jk}$$

Sampai di sini terbukti bahwa $(A\,G(A))^{*} = A\,G(A)$.

$$\text{(ii)}(G(A)\,A)_{ih} = \sum_{j=1}^{m} G_{i} a_{jh}$$

$$= \sum_{j=1}^{m} u(A)^{+} \sum_{\substack{\alpha \\ j\in\alpha}} \sum_{\substack{\beta \\ i\in\beta}} (-1)^{j(\alpha(+i(\beta(}\overline{\det A_{\beta}^{\alpha}} \det A_{\beta_i}^{\alpha_j} a_{jh}$$

$$= u(A)^{+} \sum_{\alpha} \sum_{\substack{\beta \\ i\in\beta}} \overline{\det A_{\beta}^{\alpha}} \sum_{\substack{j \\ j\in\alpha}} (-1)^{j(\alpha)+i(\beta)} a_{jh} \det A_{\beta_i}^{\alpha_j}$$

$$= u(A)^{+} \sum_{\alpha} \sum_{\substack{\beta \\ i\in\beta}} \overline{\det A_{\beta}^{\alpha}} \det A_{\beta_{(j\leftarrow h)}}^{\alpha}$$

Jika i = h;

$$\det A_{\beta_{(j\leftarrow h)}}^{\alpha} = \det A_{\beta}^{\alpha} \text{ sehingga } (G(A)\,A)_{ii} = u(A)^{+} \sum_{\alpha} \sum_{\substack{\beta \\ i\in\beta}} \overline{\det A_{\beta}^{\alpha}} \det A_{\beta}^{\alpha}$$

$$= u(A)^{+} u(A) = \left(\overline{G(A)A}\right)_{ii}$$

Jika $i \neq h$, $h \in \beta$ maka terdapat dua kolom yang sama sehingga $\det A_{\beta_{(i\leftarrow h)}}^{\alpha} = 0$

Jika $i \neq h$, $h \notin \beta$. $\beta_{ih} \in Q_{r,m}$ adalah elemen-elemen dari β dengan mengganti i dengan h.

Jika $\delta = \beta_{ih}$ maka $\beta = \delta_{hi}$.

$$\left(\overline{G(A)A}\right)_{ih} = u(A)^{+} \sum_{\alpha} \sum_{\substack{\beta \\ i\in\beta \\ h\notin\beta}} \det A_{\beta}^{\alpha}\, \overline{\det A_{\beta_{(i\leftarrow h)}}^{\alpha}}$$

$$= u(A)^{+} \sum_{\alpha} \sum_{\substack{\beta \\ i\in\beta \\ h\notin\beta}} (-1)^{i(\beta)+h(\beta_{ih})} \det A_{\beta}^{\alpha}\, \overline{\det A_{\beta_{ih}}^{\alpha}}$$

$$= u(A)^{+} \sum_{\alpha} \sum_{\substack{\delta \\ h\notin\delta \\ i\notin\delta}} (-1)^{i(\delta_{hi})+h(\delta)} \det A_{\delta_{hi}}^{\alpha}\, \overline{\det A_{\delta}^{\alpha}}$$

$$= u(A)^{+} \sum_{\alpha} \sum_{\substack{\delta \\ h\in\delta \\ i\notin\delta}} \overline{\det A_{\delta}^{\alpha}} \det A_{\beta_{(i\leftarrow h)}}^{\alpha} \qquad = (G(A)\,A)_{ih}$$

Terbukti $(G(A)\,A)^{*} = G(A)\,A$

(iii) $(A\,G(A)\,A) \quad = \sum_{h=1}^{m} (A\,G(A))_{ih}\, a_{hj}$

$$= \sum_{h} u(A)^{+} \sum_{\substack{\alpha \\ h\in\alpha}} \sum_{\beta} \overline{\det A_{\beta}^{\alpha}} \det A_{\beta}^{\alpha(h\leftarrow i)} a_{hj}$$

$$= u(A)^{+} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \overline{\det A_{\beta}^{\alpha}} \sum_{\substack{h \\ h\in\alpha}} a_{hj} \det A_{\beta}^{\alpha(h\leftarrow i)}$$

$$= u(A)^{+} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \overline{\det A_{\beta}^{\alpha}} a_{ij} \det A_{\beta}^{\alpha}$$

$$= u(A)^{+} \Big(\sum_{\alpha} \sum_{\beta} \det A_{\beta}^{\alpha}\, \overline{\det A_{\beta}^{\alpha}}\Big)\, a_{ij} = u(A)^{+}\, u(A)\, a_{ij}.$$

$$A\,G(A)\,A = u(A)^{+}\, u(A)\, A = u(A)\, u(A)^{+} A = A$$

(iv) $(G(A)\,A\,G(A))_{ij} \quad = \sum_{h=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} g_{ik}\, a_{kh} g_{hj}$

$$= \sum_{h} \sum_{k} u(A)^{+} \sum_{\substack{\alpha \\ k\in\alpha}} \sum_{\substack{\beta \\ i\in\beta}} (-1)^{k(\alpha)+i(\beta)} \overline{\det A_{\beta}^{\alpha}} \det A_{\beta_i}^{\alpha_k} \text{ x}$$

$$a_{kh} \text{ x } \left(u(A)^{+} \sum_{\substack{\gamma \\ j\in\gamma}} \sum_{\substack{\delta \\ h\in\delta}} (-1)^{j(\gamma)+h(\delta)} \overline{\det A_{\delta}^{\gamma}} \det A_{\delta_h}^{\gamma_j} \right)$$

JURNAL MATEMATIKA DAN KOMPUTER
Vol. 7. No. 1, 20 - 30, April 2004, ISSN : 1410-8518

$$= \left(\left[u(A)^+\right]^2 \sum_{\alpha} \sum_{\substack{\beta \\ i\in\beta}} \sum_{\substack{\gamma \\ j\in\gamma}} \sum_{\delta} (-1)^{i(\beta)+j(\gamma)} \overline{\det A_{\beta}^{\alpha}}\ \overline{\det A_{\beta}^{\gamma}} \right)$$

$$\left(\sum_{h\in\delta} \sum_{k\in\alpha} (-1)^{k(\alpha)+h(\delta)} \det A_{\beta_i}^{\alpha_k}\ a_{kh} \det A_{\delta_h}^{\gamma_j} \right)$$

$$= \left(\left[u(A)^+\right]^2 \sum_{\alpha} \sum_{\substack{\beta \\ i\in\beta}} \sum_{\substack{\gamma \\ j\in\gamma}} \sum_{\delta} (-1)^{i(\beta)+j(\gamma)} \overline{\det A_{\delta}^{\alpha} \det A_{\beta}^{\gamma}} \right)$$

$$\left(\sum_{h\in\delta} \sum_{k\in\alpha} (-1)^{k(\alpha)+h(\delta)} \det A_{\delta_h}^{\alpha_k}\ a_{kh} \det A_{\beta_i}^{\gamma_j} \right)$$

$$= \left(\left[u(A)^+\right] \sum_{\substack{\beta \\ i\in\beta}} \sum_{\substack{\gamma \\ j\in\gamma}} (-1)^{i(\beta)+j(\gamma)} \overline{\det A_{\beta}^{\gamma}}\ \det A_{\beta_i}^{\gamma_j} \right)$$

$$\left(u(A)^+ \sum_{\alpha} \sum_{\delta} \sum_{h\in\delta} \sum_{k\in\alpha} (-1)^{k(\alpha)+h(\delta)} a_{kh} \det A_{\delta_h}^{\alpha_k}\ \overline{\det A_{\delta}^{\alpha}} \right)$$

$$= u(A)^+ u(A) g_{ij} = g_{ij}$$

G(A) A G(A) = G(A)

Dari (i),(ii),(iii) dan (iv) terbukti bahwa G(A) adalah invers Moore Penrose dari A.

$\Rightarrow$ karena A G(A) A = u(A) $u(A)^+$A; G(A) A G(A) = G(A); (A G(A))* = A G(A); (G(A) A)* = G(A) A maka A^+ = G(A) jika dan hanya jika u(A) $u(A)^+$A = A **(terbukti).**

<u>**Contoh :**</u>

Diberikan $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \in M_{Z_5}$ dengan rank r = 3.

Akan ditentukan matriks invers Moore Penrose G(A) dari A.

j = 1, 2, 3 ; i = 1, 2, 3 ; $\det A_\beta^\alpha = \det \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} = 0$

j = 1, 2, 3 ; i = 1, 2, 4 ; $\det A_\beta^\alpha = \det \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} = 3$

j = 1, 2, 3 ; i = 1, 3, 4 ; $\det A_\beta^\alpha = \det \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} = 0$

j = 1, 2, 3 ; i = 2, 3, 4 ; $\det A_\beta^\alpha = \det \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} = 2$

u(A) = 0.0 + 3.3 + 0.0 + 2.2 = 3; u(A)$^+$ = 2

$g_{11} = 2 \{ (-1)^{1+1}.0.\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+1}.3.\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+1}.0.\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \} = 0$

Dengan cara sama diperoleh $g_{12} = 4$; $g_{13} = 0$; $g_{21} = 1$; $g_{22} = 0$; $g_{23} = 1$; $g_{31} = 0$; $g_{32} = 4$; $g_{33} = 0$; $g_{41} = 1$; $g_{42} = 1$; $g_{43} = 2$. Sehingga $G(A) = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa G(A) adalah invers Moore Penrose dari A.

$$\text{(i) } A\,G(A)\,A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} = A$$

JURNAL MATEMATIKA DAN KOMPUTER
Vol. 7. No. 1, 20 - 30, April 2004, ISSN : 1410-8518

(ii) G(A) A G(A) $= \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = G(A)$

(iii) (A G(A)) $= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A\,G(A)$

(iv) (G(A) A) $= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = G(A)\,A$

Dari (i), (ii), (iii) dan (iv) terbukti $A^+ = G(A)$. Selanjutnya $u(A)\,u(A)^+A = 3.2.A = A$

Dalam hal ini $u(A)\,u(A)^+ = e(A)$ disebut Moore indempotent dari A.

3. KESIMPULAN

Jika A adalah matriks berukuran m x n atas ring komutatif dengan elemen satuan dan rank A = r, maka matriks invers Moore Penrose dari A adalah

$G(A) = (g_{ij}(A))$ dengan $g_{ij} = = u(A)^+ \sum_{\substack{\alpha \in Qr,m \\ j \in \alpha}} \sum_{\substack{\beta \in Qr,n \\ i \in \beta}} (-1)^{j(\alpha)+i(\beta)} \overline{\det A_\beta^\alpha} \det A_{\beta_i}^{\alpha_j}$ dan

$u(A) = \sum_{\alpha \in Q_{r,m}} \sum_{\beta \in Q_{r,n}} \det A_\beta^\alpha \overline{\det A_\beta^\alpha}$ mempunyai invers Moore Penrose $u(A)^+$ di R.

Syarat perlu dan cukup agar G(A) merupakan invers Moore Penrose dari A adalah $u(A)\,u(A)^+ A = A$.

DAFTAR PUSTAKA :

F.R. Gantmacher , 1960, The Theory of Matrices, Chealsea Publishing Company, New York.

Jin Ho Kwak, Sung pyo Hong,1997,Linear Algebra, Birkhauser,Boston.

John B Fraeleigh, 1994, A First Course in Abstract Algebra, Addison Wesley Publishing Company Inc, United States.

R.B. Bapat, Donald W. Robinson, 1992, The Moore Penrose Inverse over a commutative Ring, Elsevier Science Publishing Co.,Inc.,New York.

R.B.Bapat, K.P.S. Bhaskara Rao and K.Manjunatha Prasad, 1990, Generalized Inverses Over Integral Domain, Elsevier Science Publishing Co.,Inc.,New York..

William C.Brown, 1993, Matrices Over Commutative Rings, Marcel Dekker Inc., New York.