JURNAL MATEMATIKA DAN KOMPUTER
Vol. 7. No. 1, 31 - 41, April 2004, ISSN : 1410-8518

Penentuan Kestabilan Sistem Kontrol Lup Tertutup Waktu Kontinu dengan Metode Transformasi ke Bentuk Kanonik Terkontrol

Robertus Heri
Jurusan Matematika FMIPA UNDIP

Abstrak

Kestabilan suatu sistem kontrol lup tertutup, baik waktu kontinu maupun waktu diskrit ditentukan oleh letak pole (pembuat nol untuk suku banyak penyebut) di bidang s atau z. Suatu sistem control lup tertutup waktu kontinu dikatakan stabil jika polenya terletak di sebelah kiri sumbu imajiner (bagian real dari nilai eigen bertanda negatif).
Meskipun suatu sistem sudah stabil, belum tentu pole-pole dari system tersebut sesuai yang diinginkan, sebab hal ini menentukan tingkat kecepatan terjadinya kestabilan system tersebut. Penempatan pole sesuai yang diinginkan, dimungkinkan jika dan hanya jika sistem dalam keadaan terkontrol lengkap. Tulisan ini membahas suatu teknik penempatan pole dari sistem waktu kontinu dengan mengubah suatu sistem menjadi bentuk kanonik terkontrol.

Kata kunci: sistem kontrol lup tertutup, pole, terkontrol lengkap.

1. PENDAHULUAN

Dalam teori kontrol, fungsi transfer secara umum digunakan untuk mengkarakterisasi hubungan masukan-keluaran yang dinyatakan dengan persamaan diferensial linear yang tak bergantung waktu. Fungsi transfer (fungsi alih) didefinisikan sebagai perbandingan transformasi Laplace fungsi keluaran dan transformasi Laplace fungsi masukan, dengan asumsi semua syarat awal adalah nol (Ogata Katsuhiko, 1997). Perhatikan sistem linear yang tak bergantung waktu yang didefinisikan dengan persamaan diferensial berikut ini:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + ... + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = b_0 x^{(m)} + b_1 x^{(m-1)} + ... + b_{m-1}\dot{x} + b_m x$$

dimana *y* dan *x* berturut-turut adalah output dan input sistem.
Fungsi transfer dari persamaan di atas diperoleh dengan mentransformasikan Laplace kedua ruas persamaan tersebut, dengan syarat awal nol.

$$Fungsi\ transfer = G(s) = \left.\frac{\mathcal{L}[output]}{\mathcal{L}[input]}\right|_{\text{syarat awal nol}}$$
$$= \frac{Y(s)}{U(s)} \tag{1}$$
$$= \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_{m-1}s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1}s + a_n}$$

Titik-titik di bidang *s* dimana fungsi *G(s)* analitik disebut *titik ordiner*. Sementara titik-titik di bidang *s* dimana fungsi *G(s)* tidak analitik disebut *titik singular.* Titik-titik singular yang menyebabkan fungsi *G(s)* atau turunannya, mendekati tak hingga disebut *pole*.

Kestabilan dari suatu sistem lup tertutup ditentukan dari letak pole lup tertutup di bidang *s* atau nilai eigen dari matriks konstanta *A*. Jika terdapat pole lup tertutup yang terletak di sebelah kanan sumbu imajiner bidang *s* (berarti bagian real dari pole bertanda positif), maka dengan bertambahnya waktu, pole tersebut akan memberikan pengaruh yang sangat dominan, sehingga respon sistem dalam selang waktu tertentu akan naik turun atau berosilasi dengan amplitudo yang semakin besar. Sedangkan suatu sistem kontrol dikatakan stabil bila pole lup tertutup terletak disebelah kiri sumbu imajiner bidang *s*.

Jadi masalah kestabilan dari sistem kontrol lup tertutup waktu kontinu dapat diselesaikan dengan tidak memilih pole-pole lup tertutup yang terletak di sebelah kanan atau pada sumbu imajiner.

2. PENEMPATAN POLE DENGAN METODE TRANSFORMASI KE BENTUK KANONIK TERKONTROL

Persamaan ruang keadaan waktu kontinu berbentuk:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{2}$$

dimana *x* vektor keadaan (*nx1*), *u* sinyal kontrol, *A* matriks konstan *nxn*, *B* vektor konstan *nx1*.

JURNAL MATEMATIKA DAN KOMPUTER
Vol. 7. No. 1, 31 - 41, April 2004, ISSN : 1410-8518

Bila dipilih suatu kontrol $u = -Kx(t)$, dan substitusi u ke (2) menghasilkan persamaan

$$\dot{x}(t) = \left(A - BK\right)x(t) \tag{3}$$

Solusi dari (3) adalah:

$$x(t) = e^{(A-BK)t}x(0)$$

Kestabilan dari sistem (3) ditentukan oleh nilai eigen dari $\left(A - BK\right)$, artinya jika matriks K dapat dipilih secara tepat, maka bagian riil dari nilai eigen matriks $\left(A - BK\right)$ terletak di sebelah kiri sumbu imajiner bidang *s*, hal itu bearti, untuk semua $x(0) \neq 0,\ x(t) \to 0$ untuk $t \to \infty$.

Dari pembahasan di atas dapat disimpulkan nilai eigen dari $\left(A - BK\right)$ adalah juga pole-pole yang diinginkan. Masalah penempatan pole adalah memilih matriks umpan balik K sedemikian sehingga bagian riil dari nilai eigen matriks *(A-BK)* berada di sebelah kiri sumbu imajiner bidang *s*.

Metode yang digunakan dalam menyelesaikan masalah penempatan pole ini adalah metode transformasi ke bentuk kanonik Jordan, yaitu menggunakan matriks transformasi untuk mentransformasikan persamaan ruang keadaan menjadi bentuk kanonik terkontrol, kemudian membandingkan persamaan karakteristik yang dikehendaki dengan persamaan karakteristik yang memuat matriks *K*. Dengan menyamakan koefisien dari suku-suku yang bersesuaian dari kedua persamaan ini, matriks umpan balik *K* dapat ditentukan.

Definisi [Ogata Katsuhiko, 1997]

Dinamik dari sistem waktu kontinu yang dinyatakan dengan persamaan (2), dikatakan terkontrol pada $t = t_0$ jika terdapat kontrol yang membawa keadaan awal ke keadaan akhir dalam suatu interval waktu berhingga. Jika setiap keadaan terkontrol, maka sistem tersebut dikatakan terkontrol secara lengkap.

Syarat untuk suatu sistem terkontrol secara lengkap adalah tidak terdapat baris atau kolom dari matriks keterkontrolan $\left[B \vdots AB \vdots \cdots \vdots A^{n-1}B\right]$ yang berkelipatan, atau $rank\left[B \vdots AB \vdots \cdots \vdots A^{n-1}B\right] = n$

Syarat perlu dan cukup untuk penempatan pole dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema [Ogata Katsuhiko, 1997]

Jika diberikan suatu sistem, maka syarat perlu dan cukup untuk penempatan sebarang pole yang diinginkan adalah bahwa sistem tersebut terkontrol secara lengkap.

Bukti

Akan dibuktikan syarat perlu terlebih dahulu dengan kontraposisi, yaitu jika sistem tidak terkontrol secara lengkap maka ada nilai eigen dari $(A - BK)$ yang tidak dapat dikontrol oleh keadaan umpan balik (state feedback)

(⇒) Misalkan sistem tidak terkontrol secara lengkap, maka $rank\left[B \vdots AB \vdots \cdots \vdots A^{n-1}B\right] = q < n$. Hal ini berarti terdapat sebanyak *q* vektor yang bebas linear. Misalkan *q* vektor yang bebas linear tersebut adalah: $f_1, f_2, ..., f_q$. Pilih sebanyak *n-q* vektor sedemikian sehingga $P = [\, f_1 \;\; f_2 \;\; ... \;\; f_q \;\; v_{q+1} \;\; v_{q+2} \;\; ... \;\; v_n]$ full rank. Maka menurut [1]

$$\hat{A} = P^{-1}AP = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline 0 & A_{22} \end{array}\right], \qquad \hat{B} = P^{-1}B = \left[\begin{array}{c} B_{11} \\ \hline 0 \end{array}\right]$$

Bila didefinisikan $\hat{K} = KP$, maka

$$\begin{aligned} \left|sI - A + BK\right| &= \left|P^{-1}\left(sI - A + BK\right)P\right| \\ &= \left|sI - P^{-1}AP + P^{-1}BKP\right| \\ &= \left|sI - \hat{A} + \hat{B}\hat{K}\right| \end{aligned}$$

JURNAL MATEMATIKA DAN KOMPUTER
Vol. 7. No. 1, 31 - 41, April 2004, ISSN : 1410-8518

$$
\begin{aligned}
&= \left| sI - \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline 0 & A_{22} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} B_{11} \\ \hline 0 \end{array} \right] [k_1 \quad k_2] \right| \\
&= \begin{vmatrix} sI - A_{11} + B_{11}k_1 & -A_{12} + B_{11}k_2 \\ 0 & sI_{n-q} - A_{22} \end{vmatrix} \\
&= \left| sI - A_{11} + B_{11}k_1 \right| \left| sI_{n-q} - A_{22} \right| \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{4}
$$

dimana I_q dan I_{n-q} berturut-turut matriks identitas berdimensi q dan *(n-q).*

Dari persamaan (4) terlihat, bahwa nilai eigen dari A_{22} tidak bergantung pada *K.* Hal ini berarti bahwa ada nilai eigen dari *A* yang tidak bisa ditempatkan di tempat yang diinginkan.

(⇐) Kemudian akan dibuktikan syarat perlu, yaitu jika sistem terkontrol secara lengkap maka sebarang nilai eigen dari A dapat ditempatkan di sebarang tempat yang diinginkan,

Dalam membuktikan syarat perlu ini, persamaan ruang keadaan yang diberikan oleh persamaan (2) diubah menjadi bentuk kanonik terkontrol.

Untuk itu didefinisikan matriks transformasi *T* dengan $T = MW$ (5)

dengan *M* adalah matriks keterkontrolan dengan bentuk $M = [B \vdots AB \vdots \cdots \vdots A^{n-1}B]$

dan

$$
W = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6}
$$

dimana a_i, $i = 1, 2, ..., n$ adalah koefisien dari suku banyak karakteristik

$$
|sI - A| = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + ... + a_{n-1}s + a_n \tag{7}
$$

Definisikan vektor keadaan baru $\hat{x}$ dengan $\hat{x} = Tx$ (8)

Jika rank dari *M* adalah *n* (berarti matriks keterkontrolan dalam keadaan terkontrol lengkap). maka invers dari matriks *T* ada. Sehingga persamaan (2) menjadi

$$\dot{\hat{x}} = T^{-1}ATx + T^{-1}Bu \qquad (9)$$

dimana

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}, \qquad (10)$$

dan

$$T^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (11)$$

Persamaan (10) dan (11) adalah **bentuk kanonik terkontrol**.

Jadi bila diberikan suatu persamaan ruang keadaan, maka persamaan (2) dapat diubah ke bentuk kanonik terkontrol jika matriks keterkontrolan terkontrol secara lengkap dan jika vektor keadaan x ditransformasikan menjadi $\hat{x}$ oleh matriks transformasi *T* seperti persamaan (8).

Kemudian akan dibuktikan, jika sistem dalam keadaan terkontrol secara lengkap, maka dimungkinkan untuk memilih pole-pole yang diinginkan .

Misalkan nilai eigen (pole-pole) yang diinginkan adalah $s = \mu_1,\ s = \mu_2, ...,\ s = \mu_n$, maka persamaan karakteristiknya adalah:

$$(s-\mu_1)(s-\mu_2)...(s-\mu_n) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + ... + \alpha_{n-1}s + \alpha_n = 0 \qquad (12)$$

Tulis $\hat{K} = KT = [\delta_n \quad \delta_{n-1} \quad \cdots \quad \delta_1]$ (13)

Bila $u = -\hat{K}\hat{x}$ digunakan untuk mengontrol sistem persamaan (9) maka dihasilkan persamaan

$$\dot{\hat{x}} = T^{-1}ATx - T^{-1}BKT\hat{x} \qquad (14)$$

Persamaan karakteristik dari (14) adalah $\left| sI - T^{-1}ATx + T^{-1}BKT\hat{x} \right| = 0$ (15)

Persamaan karakteristik ini sama dengan persamaan karakteristik untuk persamaan (2) untuk $u = -Kx(t)$. Hal tersebut bisa dilihat sebagai berikut.

JURNAL MATEMATIKA DAN KOMPUTER
Vol. 7. No. 1, 31 - 41, April 2004, ISSN : 1410-8518

Substitusi u ke dalam persamaan (2), menghasilkan: $\dot{x} = (A - BK)x$. Persamaan karakteristik untuk $\dot{x} = (A - BK)x$ adalah

$$\left|sI - A + BK\right| = \left|T^{-1}\left(sI - A + BK\right)T\right| = \left|sI - T^{-1}AT + T^{-1}BKT\right| = 0$$

Dengan menggunakan (10), (11) dan (13) diperoleh:

$$\left|sI - T^{-1}AT + T^{-1}BKT\right| = \left| sI - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_n & \delta_{n-1} & \cdots & \delta_1 \end{bmatrix} \right|$$

$$= \begin{vmatrix} s & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & s & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n + \delta_n & a_{n-1} + \delta_{n-1} & \cdots & a_1 + \delta_1 \end{vmatrix}$$

$$= s^n + (a_1 + \delta_1)s^{n-1} + ... + (a_{n-1} + \delta_{n-1})s + (a_n + \delta_n) = 0$$

Persamaan karakteristik ini sama dengan persamaan karakteristik (12). Sehingga dengan menyamakan koefisiennya diperoleh:

$$\begin{aligned} a_1 + \delta_1 &= \alpha_1 \\ a_2 + \delta_2 &= \alpha_2 \\ &\vdots \\ a_n + \delta_n &= \alpha_n \end{aligned}$$

Menyelesaikan persamaan terakhir untuk $\delta_i,\ i = 1, 2, ..., n$ dan disubstitusi ke persamaan (13) diperoleh matriks umpan balik K :

$$K = \hat{K}T^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_n - a_n & \alpha_{n-1} - a_{n-1} & \cdots & \alpha_2 - a_2 & \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix} \qquad (16)$$

Jadi jika sistem terkontrol secara lengkap, dapat dipilih pole-pole yang diinginkan dengan memilih matriks umpan balik seperti persamaan (16).

Dari pembahasan di atas, matriks umpan balik K dapat ditentukan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Mengecek rank dari matriks keterkontrolan *M*. Jika *M* full rank, maka dilakukan langkah ke 2. Jika tidak maka langkah berhenti sebab tidak dipenuhi syarat perlu dan syarat cukup untuk penempatan pole.
2. Menentukan nilai $a_1, a_2, ..., a_n$ suku banyak karakteristik untuk matriks *A*
   $|sI - A| = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + ... + a_{n-1} s + a_n$
3. Menentukan matriks transformasi *T* yang mentransformasikan ke bentuk kanonik terkontrol, yaitu *T*=*MW* dengan *W* seperti persamaan (6). Jika dari sistem yang diberikan sudah dalam bentuk kanonik terkontrol, maka dapat dipilih *T*=*I*
4. Tulis suku banyak karakteristik dengan akar-akarnya adalah pole-pole yang diinginkan dalam bentuk
   $$(s-\mu_1)(s-\mu_2)...(s-\mu_n) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + ... + \alpha_{n-1} s + \alpha_n = 0$$
   untuk menentukan nilai-nilai $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$
5. Menentukan matriks umpan balik K dengan persamaan
   $$K = [\alpha_n - a_n \quad \alpha_{n-1} - a_{n-1} \quad \cdots \quad \alpha_2 - a_2 \quad \alpha_1 - a_1] T^{-1}$$

Berikut akan diberikan contoh dari teori di atas.

1. Diketahui suatu sistem dengan fungsi alih $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{10}{(s+1)(s+2)(s+3)}$

   Bila pole-pole yang dikehendaki adalah $s_1 = -3,\ s_2 = -5,\ s_3 = -7$, maka matriks umpan balik *K* dicari dengan cara sebagai berikut:

   Karena yang diketahui adalah fungsi alih, maka langkah pertama adalah mengubah fungsi alih tersebut menjadi persamaan ruang keadaan.

   Karena persamaan karakteristik dari matriks keadaan adalah penyebut fungsi alih, maka diperoleh $a_1 = 6,\ a_2 = 11,\ a_3 = 6$.

Sehingga $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Dapat dicari bahwa rank M=3, sehingga langkah penempatan pole dapat dilanjutkan.

Persamaan karakteristik dari pole-pole yang diinginkan adalah:

$$(s+3)(s+5)(s+7)=s^3+15s^2+71s+105,$$

sehingga diperoleh $\alpha_1=15,\ \alpha_2=71,\ \alpha_1=105$

Matriks umpan balik yang dicari adalah $K=\begin{bmatrix} 99 & 60 & 9 \end{bmatrix}$

2. Jika diberikan suatu sistem $\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$, dengan

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 9 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix},$$

dan dikehendaki nilai eigen dari $(A-BK)$ $s_1=-1,\ s_2=-3,\ s_3=-2,\ s_4=-6,$ dan $s_5=-4$ maka matriks umpan balik K dapat dicari sebagai berikut.

```
=====PENEMPATAN POLE DENGAN METODE TRANSFORMASI KE BENTUK KANONIK
TERKONTROL=====

A=[1 7 0 1 3;0 0 2 1 3;9 2 1 0 3;1 1 3 2 3;0 5 0 2 0];
B=[2 1 4 5 1]';

-----Mengecek rank dari matriks keterkontrolan M-----
M=[B A*B A^2*B A^3*B A^4*B]
rank(M)

-----Mencari koefisien dari persamaan karakteristik  matriks A
untuk membentuk matriks W-----
J=poly(A);
a1=J(2), a2=J(3), a3=J(4), a4=J(5), a5=J(6)

-----Elemen-elemen matriks W diperoleh dari koefisien suku banyak
karakteristik A-----
W=[a4 a3 a2 a1 1;a3 a2 a1 1 0;a2 a1 1 0 0;a1 1 0 0 0;1 0 0 0 0];

T=M*W
```

```
-----Matriks L adalah matriks diagonal dengan elemen-elemnnya
adalah pole-pole yang diinginkan-----
L=[-1 0 0 0 0;0 -3 0 0 0;0 0 -2 0 0;0 0 0 -6 0;0 0 0 0 -4]

-----Mencari koefisien dari suku banyak karakteristik matriks L---
--
N=poly(L);
a11=N(2), a22=N(3), a33=N(4), a44=N(5), a55=N(6)

-----Menentukan matriks umpan balik K-----
K=[a11-a1 a22-a2 a33-a3 a44-a4 a55-a5]*inv(T)

-----Mengecek apakah inv(T)*A*T dan inv(T)*B dalam bentuk kanonik
terkontrol-----
inv(T)*A*T
inv(T)*B
```

Output program di atas adalah

```
K =
  -37.2812   -6.2547   43.0897   41.4349   31.2837

ans =
   -0.0000    1.0000   -0.0000   -0.0000         0
   -0.0000   -0.0000    1.0000    0.0000    0.0000
         0    0.0000   -0.0000    1.0000   -0.0000
   -0.0000    0.0000    0.0000   -0.0000    1.0000
  186.0000  415.0000  156.0000   22.0000    4.0000

ans =
         0
         0
   -0.0000
    0.0000
    1.0000
```

Terlihat dari output bahwa

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} -0.0000 & 1.0000 & -0.0000 & -0.0000 & 0 \\ -0.0000 & -0.0000 & 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0 & 0.0000 & -0.0000 & 1.0000 & -0.0000 \\ -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 1.0000 \\ 186.0000 & 415.0000 & 156.0000 & 22.0000 & 4.0000 \end{bmatrix} \text{ dan}$$

$$T^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.0000 \\ 0.0000 \\ 1.0000 \end{bmatrix}$$ merupakan matriks dalam bentuk kanonik terkontrol, berturut-turut seperti bentuk persamaan (10) dan (11).

JURNAL MATEMATIKA DAN KOMPUTER
Vol. 7. No. 1, 31 - 41, April 2004, ISSN : 1410-8518

3. KESIMPULAN

1. Matriks umpan balik K tidaklah tunggal untuk suatu sistem dinamik yang diberikan. Hal ini bergantung pada nilai eigen atau pole-pole yang dikehendaki.
2. Untuk matriks dengan ordo rendah $(n \leq 3)$, perhitungan determinan secara manual relatif mudah dan tidak membutuhkan waktu yang lama. Namun tidak demikian halnya dengan matriks berordo tinggi $(n \geq 3)$. Contoh kedua diatas membahas pencarian matriks umpan balik dari suatu sistem dengan matriks koefisien ordo lima menggunakan Matlab.

DAFTAR PUSTAKA

Ogata Katsuhiko, 1995, *Discrete Time Control Systems*, Prentice Hall Inc.

Ogata Katsuhiko, 1997, *Modern Control Engineering*, Third Edition, Prentice Hall Inc.

Ogata Katsuhiko, 1994, *Designing Linear Control system with MATLAB*, Prentice Hall Inc.

R.W.Brocket,1970, *Finite Dimensional Linear Systems*, John Wiley and Sons Inc.