JURNAL MATEMATIKA DAN KOMPUTER
Vol. 7. No. 2, 19 - 25, Agustus 2004, ISSN : 1410-8518

SIFAT–SIFAT IDEAL KUASI REGULAR

R. Heru Tjahjana
Jurusan Matematika FMIPA UNDIP
Jl. Prof Sudarto,S.H Tembalang Semarang

Abstrak

Tulisan ini membahas sifat ideal kuasi regular dimulai dari pengertian elemen kuasi regular dan sifat-sifatnya. Dari pengertian elemen kuasi regular dapat dipergunakan untuk membangun pengertian ideal kuasi regular. Ideal kuasi regular kanan adalah ideal kanan dari suatu ring dan setiap elemennya adalah elemen kuasi regular kanan. Ideal kuasi regular kiri adalah ideal kiri dari suatu ring dan setiap elemennya adalah elemen kuasi regular kiri. Untuk mempelajari ideal kuasi lebih lanjut juga dituliskan tentang Jacobson radikal.

Kata Kunci : elemen kuasi regular, ideal kuasi regular, Jacobson Radikal

1. PENDAHULUAN

Ideal dari ring T merupakan sub ring T dengan sifat yang khusus(Fralegih, 1996). Bila dalam ring didefinisikan operasi bundaran "o" yang mengaitkan dua anggota sembarang dari ring T akan membawa konsekuensi-konsekuensi logis yang menarik untuk ditelusuri. Dari operasi "o" mula-mula akan didefinisikan elemen kuasi reguler baik elemen kuasi reguler kiri maupun elemen kuasi reguler kanan. Dari pengertian elemen kuasi regular kiri dapat dibangun pengertian ideal kuasi regular kiri dan juga sebaliknya dari pengertian elemen kuasi regular kanan dapat dibangun pengertian ideal kuasi regular kanan. Penulis mengahasilkan masing-masing contoh dari pengertian-pengertian di atas. Tulisan ini akan menampilkan sifat-sifat elemen kuasi regular, ideal kuasi regular dan sifat-sifatnya, lebih lanjut juga akan menampilkan hubungan Jacobson Radikal dengan ideal kuasi regular. Untuk sifat- sifat tersebut penulis menuliskan bukti-buktinya.

2. PEMBAHASAN

Untuk mempelajari ideal kuasi regular kiri dan kanan, definisi 2.1 berikut perlu diikuti dengan cermat.

Definisi 2.1 (Brown,1993)

Diberikan operasi “o“ pada ring T yaitu, x o y = x+y-xy, $\forall$x,y $\in$ T.

a) Suatu elemen x$\in$T disebut kuasi regular kiri, jika y o x = 0, untuk suatu y $\in$T. Suatu elemen x $\in$T disebut kuasi regular kanan jika, x o z = 0, untuk suatu z$\in$T. Suatu elemen disebut kuasi regular jika elemen itu adalah kuasi regular kiri dan kuasi regular kanan.

b) Suatu ideal kiri (kanan) U dari T disebut ideal kuasi regular jika setiap anggotanya adalah kuasi regular kiri (kanan).

Dari definisi 2.1 perlu dituliskan contoh-contoh untuk tiap hal yang didefinisikan.

a) Misalkan T adalah **Z** yaitu himpunan bilangan bulat, dengan <**Z**,.,+> merupakan suatu ring. Perhatikan bahwa {2} merupakan elemen kuasi regular kiri sebab untuk 2$\in$**Z** berlaku 2 o 2= 2+2 -(2.2)=0. Juga {2} merupakan elemen kuasi regular kanan sebab untuk 2$\in$ Z berlaku 2 o 2= 2+2 -(2.2)=0. Karena {2} merupakan elemen kuasi regular kiri maupun kanan maka {2} merupakan elemen kuasi regular. Oleh karena itu dalam ring **Z**, {2} merupakan elemen kuasi regular.

b) Diberikan <$\mathbf{Z_4}$,.,+> merupakan suatu ring. U={0,2} merupakan ideal kiri dari <$\mathbf{Z_4}$,.,+> dan setiap elemen U merupakan elemen kuasi regular kiri. Jadi U adalah ideal kuasi regular kiri dari <$\mathbf{Z_4}$,.,+>. Perhatikan bahwa U={0,2} juga merupakan ideal kanan dari <$\mathbf{Z_4}$,.,+> dan setiap elemen U merupakan elemen kuasi regular kanan. Jadi U adalah ideal kuasi regular kanan dari <$\mathbf{Z_4}$,.,+>

c) Diberikan <$\mathbf{Z_2}$,.,+> merupakan suatu ring. Pertimbangkan bahwa {0} merupakan elemen kuasi regular kiri sebab untuk 0$\in$$\mathbf{Z_2}$ berlaku 0o0= 0+0-(0.0)=0 dan {0} merupakan elemen kuasi regular kanan sebab untuk 0$\in$ $\mathbf{Z_2}$ berlaku 0o0= 0+0-(0.0)=0. Karena {0} merupakan elemen kuasi regular kiri sekaligus elemen kuasi regular kanan maka {0} merupakan elemen kuasi regular dalam ring <$\mathbf{Z_2}$,.,+>. Akan tetapi {1} bukanlah elemen kuasi regular kiri dalam ring <$\mathbf{Z_2}$,.,+> sebab untuk setiap y$\in$$\mathbf{Z_2}$ berlaku yo1 = y+1 - (y.1)$\neq$0 dan {1} juga bukan elemen kuasi regular kanan dalam ring <$\mathbf{Z_2}$,.,+> sebab untuk setiap $z \in \mathbf{Z_2}$ berlaku $1oz = 1+z - (1.z) \neq 0$. Pertimbangkan lagi bahwa {0} merupakan ideal kiri dari $<\mathbf{Z_2},.,+>$ dan setiap elemennya merupakan elemen kuasi regular kiri, sehingga {0} merupakan ideal kuasi regular kiri. Juga {0} merupakan ideal kanan dari $<\mathbf{Z_2},.,+>$ dan setiap elemennya merupakan elemen kuasi regular kanan, sehingga {0} merupakan ideal kuasi regular kanan.

Setelah pengertian-pengertian elemen kuasi regular dan ideal kuasi regular diberi contoh berikut dituliskan sifat-sifatnya dalam teorema 2.2.

Teorema 2.2(Brown,2003)

Diberikan T suatu ring maka berlaku,

a) Suatu elemen $x \in T$ merupakan kuasi regular kiri (kanan) $\Leftrightarrow$ (1-x) mempunyai invers kiri (kanan) di T.
b) Suatu elemen $x \in T$ merupakan kuasi regular $\Leftrightarrow$ $(1-x) \in U(T)$.
c) Jika U merupakan ideal kiri atau ideal kanan dari T dimana U adalah kuasi regular maka setiap elemen di U adalah kuasi regular.

Bukti :

a) Suatu elemen $x \in T$ merupakan kuasi regular kiri (kanan) $\Leftrightarrow$ (1-x) mempunyai invers kiri (kanan) di T.

$\Rightarrow$

Misalkan x kuasi regular kiri di T maka $0=yo\ x=y+x-xy$, untuk suatu $y \in T$. Perhatikan bahwa $(1-y)(1-x)=1-x-y+xy=1-(y+x-xy)=1-0 =1$. Karena $(1-y)(1-x)=1$ maka (1-x) mempunyai invers kiri.

$\Leftarrow$

Diketahui (1-x) punya invers kiri. Misalkan $z(1-x)=1$, untuk suatu z di T. Tulis $z=1-y$, untuk suatu y di T, maka $(1-y)(1-x)=1$ akibatnya $y\ o\ x=0$. Akibatnya x adalah kuasi regular kiri dari A.

Catatan : untuk kuasi regular kanan bukti serupa.

b) Suatu elemen $x \in T$ disebut kuasi regular $\Leftrightarrow$ $(1-x) \in U(T)$.

$\Rightarrow$

Karena diketahui x adalah elemen kuasi regular di T maka yox=0= xoz, untuk suatu y,z di T. Karena operasi “o” assosiatif, kita mempunyai y = yo0 = yo(xoz) = yox)oz = 0oz=z, karena itulah maka yox=0=xoy. Kemudian seperti pada bagian a) didapat kesimpulan bahwa (1-y)(1-x)=1,artinya 1-x $\in$ U(T).

$\Leftarrow$

Diketahui (1-x)$\in$U(T), dibuktikan U merupakan kuasi regular. Karena (1-x)$\in$U(T), maka untuk suatu z anggota T berlaku bahwa z(1-x)=(1-x)z=1, tulis z=1-y untuk suatu y anggota T. Selanjutnya juga berlaku (1-y)(1-x)=1-x-y+xy=1-(x+y-xy)=1. Akibatnya x+y-xy=0 sehingga xoy=0. (1-x)(1-y)=1-y-x+xy=1-(y+x-xy)=1. Akibatnya y+x-xy=0 sehingga y o x =0. Dengan demikian didapat x o y =0= y o x maka x adalah kuasi regular.

c) Misalkan U adalah ideal kiri dari T, U adalah kuasi regular, dan x sebarang elemen di U, maka dari definisi kita mengetahui bahwa x adalah kuasi regular kiri. Dengan demikian diperoleh y+x-xy=yox=0, untuk suatu y di T. Karena U ideal kiri dari T, maka mengakibatkan y di U. Dengan kata lain y adalah kuasi regular kiri. Misalkan berlaku zoy=0. Seperti pada b) z=zo0=zo(yox)=(zoy)ox=0ox=x. Karena itulah xoy=0=yox. Akibatnya x adalah kuasi regular dan karena x elemen sebarang di U, maka berlaku setiap anggota U merupakan kuasi regular .‖

Untuk mempelajari sifat-sifat ideal kuasi regular lebih lanjut perlu didefinisikan pengertian Jacobson Radikal kiri dan Jacobson Radikal kanan dalam definisi 2.3 berikut ini.

Definisi 2.3(Brown,1993)

Sekarang akan didefinisikan Jacobson Radikal kiri dari T, diberi notasi (J(T)). dimana

$J(T)=\cap \{Ann_T(M) \mid M$ suatu T-Modul kiri yang tak terreduksi $\}$, dan Jacobson Radikal kanan dari T, diberi notasi ($J^r(T)$) dimana

$J^r(T)=\cap \{Ann_T(M) \mid M$ suatu T-Modul kanan yang tak terreduksi $\}$.

Untuk pengertian Modul kiri yang tak terreduksi dan modul kanan yang tak terreduksi pembaca dapat mempelajari dalam(Adkin,1992). Selanjutnya kaitan antara Jacobson radikal dan ideal kuasi regular dituliskan dalam teorema 2.4.

Teorema 2.4 (Brown,1993)

Jika T suatu ring, maka berlaku

a) J(T) ialah suatu ideal kuasi regular kiri dari T dan memuat setiap ideal kuasi regular kiri dari T .
b) $J(T)=\{z\in T|$ tz adalah kuasi regular kiri , $\forall t\in T$ }

Bukti :

a) Akan dibuktikan dulu J(T) adalah suatu ideal kuasi regular kiri dari T. Misalkan $z\in T$. Andaikan z bukan kuasi regular kiri. Karena z bukan kuasi regular kiri maka 1-z tidak punya invers kiri di T (menurut Teorema 2.3.a). Ini sama halnya mengatakan bahwa T(1-z) adalah ideal kiri sejati dari T. Menggunakan Teorema Zorn, kita dapat menemukan ideal kiri maksimum U dari T sedemikian hingga T(1-Z) $\subseteq$U. Sehingga dapat disimpulkan $z\in U$. Karena itu $1\in U$. Hal ini tidak mungkin. Jadi pengandaian diingkar, kesimpulannya z adalah kuasi regular kiri. Jadi J(T) adalah ideal kuasi regular kiri. Sekarang akan ditunjukkan J(T) memuat setiap ideal kuasi regular kiri dari T. Ambil sebarang B, dengan B adalah ideal kuasi regular dari T .

   Andaikan B tidak termuat di J(T).

   Mengingat theorema 2.4 maka terdapat ideal maksimum kiri U dari T sedemikian hingga B tidak termuat di U. Karena U maksimum dan U < U+B, U+B=T. Dengan kata lain 1=z+B untuk suatu z di U dan b di B. Karena B ideal kuasi regular kiri maka $b \in B$ adalah kuasi regular kiri. Karena itu z = 1-b pasti mempunyai invers kiri di T (alasannya Teorema 2.3.a). Karena yz=1 dan karena U ideal kiri dari T maka 1 di U. Hal ini tidak mungkin, sehingga pengandaian diingkar dan dapat ditarik kesimpulan bahwa B termuat di U. Jadi setiap ideal kuasi regular kiri dari T termuat di J(T).

b) $J(T) \subseteq \{z \in T |$ tz adalah kuasi regular kiri , $\forall t \in T \}$,jelas dari a).

Sekarang ambil sebarang $z \in T$ dan tz kuasi regular kiri , $\forall t \in T$. Sehingga Tz adalah ideal kuasi regular kiri dari T, menurut a) $T(z) \subseteq J(T)$. Jadi $J(T)=\{ z \in T|$ tz adalah kuasi regular kiri , $\forall t \in T \}$. ||

Sifat 2.5(Brown,1993)

Jacobson Radikal kanan dari T sama dengan Jacobson Radikal kiri dari T. Secara notasi dapat disajikan $J(T)=J^r(T)$. Dengan $J^r(T) = \cap\{ Ann_T(M)|M$ adalah T-Modul kanan yang tak terreduksi $\}$.

Bukti:

Dari definisi $J^r(T)$ maka $J^r(T)$ adalah ideal dari T dan setiap elemen di $J^r(T)$ adalah kuasi regular kanan. Dari Teorema 2.4.b maka setiap elemen di $J^r(T)$ adalah kuasi regular kiri.

Jadi didapat

$J^r(T) \subseteq J(T)$..(1)

Kemudian dari theorema 2.5 a jika diterapkan pada $J^r(T)$, maka

$J(T) \subseteq J^r(T)$...(2)

Dari (1) dan (2) didapat $J^r(T)= J(T)$.||

Akibatnya sifat-sifat yang berlaku untuk J(T) dapat berlaku pula untuk $J^r(T)$, jadi theorema berlaku pula atau terbukti pula untuk bagian "kanan" yaitu :

Sifat 2.6(Brown,1993)

a) J(T) adalah suatu ideal kuasi regular kanan dari T dan memuat setiap ideal kuasi regular kanan dari T.

b) $J(T)=\{z \in T|$ zt adalah kuasi regular kanan, untuk setiap $t \in T\}$.

3. KESIMPULAN

Dari pembahasan di atas disimpulkan bahwa

a) Elemen kuasi regular kiri dari suatu ring adalah elemen dari suatu ring yang memenuhi $y+x - yx=0$, untuk suatu y anggota ring itu
b) Elemen kuasi regular kanan dari suatu ring adalah elemen dari suatu ring yang memenuhi $x+z - xz=0$, untuk suatu z anggota ring itu
c) Ideal kuasi regular kiri (kanan) dari suatu ring merupakan ideal kiri (kanan) dari suatu ring yang setiap elemen-elemennya adalan elemen kuasi regular kiri
d) Jacobson Radikal kiri (kanan) merupakan ideal kuasi regular kiri dari suatu ring dan memuat setiap ideal kuasi regular kiri (kanan) dari ring itu.

DAFTAR PUSTAKA

Adkins,Wiliam.A., *Algebra An Approach Via Module Theory*. Springer-Verlag, New York, 1992.

Brown,W.C., *Matrices Over Commutative Rings*, Marcel Dekker, New York, 1993.

Fraligh,J.B., *A First Course in Abstract Algebra*, Addison-Wesley Publishing Company, New York, 1996 .