JURNAL MATEMATIKA DAN KOMPUTER
Vol. 7. No. 3, 1 - 7, Desember 2004, ISSN : 1410-8518

AKAR-AKAR POLINOMIAL SEPARABEL SEBAGAI PEMBENTUK PERLUASAN NORMAL

(Oleh: Sulastri Daruni , Bayu Surarso, Bambang Irawanto)

Abstrak

Misalnya F adalah lapangan perluasan dari lapangan K dan f(x) adalah polinomial tidak tereduksi dalam K maka f(x) dapat difaktorkan sebagai hasil kali dari faktor linear dalam lapangan pemisahnya . Jika akar-akar dari polinomial tersebut tidak ada yang ganda maka polinomial tersebut merupakan polinomial separabel. Selanjutnya untuk Lapangan pemisah yang memuat kesemua akar-akar yang berlainan dari polinomial tak tereduksi f(x) maka lapangan pemisah tersebut merupakan perluasan normal.

Kata kunci : *lapangan pemisah, polinomial separabel, perluasan normal*

1. PENDAHULUAN

Lapangan sebagai satu bentuk khusus dari ring juga mempunyai sublapangan sebagaimana dalam ring terdapat subring. Ring lebih luas dari subring, demikian juga lapangan pasti lebih luas dibandingkan dengan sublapangannya.Selanjutnya lapangan F disebut lapangan perluasan dari lapangan K jika F adalah sublapangan dari lapangan F (Raisinghania, Agarwal, 1980).

Jika K adalah lapangan dan f(x) polinomial dalam lapangan K maka f(x) dapat dibentuk sebagai hasil kali dari faktor linear dalam F[x] dimana F[x] adalah semua polinomial polynomial dengan koefisien koefisien didalam F Sehingga dikatakan bahwa lapangan perluasan F atas lapangan K adalah lapangan pemisah atas lapangan K terhadap polinomial f(x). Selanjutnya polinomial f(x) dapat disajikan sebagai $f(x) = c\,(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_n)$ dengan $c \neq 0 \in K$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$ dan $F = K(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ kemudian jika akar-akar dari polinomial f(x) tersebut dalam lapangan pemisahnya tidak ada akar ganda maka polinomial tidak tereduksi f(x) dalam lapangan K adalah separabel dalam K.

Berdasarkan dua hal diatas yaitu lapangan pemisah dan polinomial separabel maka dalam tulisan ini ditunjukkan hubungan keduanya menjadi satu bentuk perluasan lapangan yaitu perluasan normal.

2. LAPANGAN PEMISAH

Misal K adalah lapangan dengan f(x) polinomial yang tidak konstan dalam K[x] , dimana K[x] adalah himpunan semua polynomial polynomial dengan koefisien koefisien di dalam K maka terdapatlah lapangan perluasan F atas lapangan K dengan $\alpha \in F$ sedemikian sehingga $f(\alpha) = 0$.(Fraleigh, 1994)

$\alpha \in F$ disebut aljabar atas lapangan K dengan $K \subseteq F$ jika $f(\alpha) = 0$ untuk suatu $f(x) \neq 0 \in K[x]$, dan jika α bukan aljabar atas lapangan K maka α disebut sebagai elemen transendental.

Misal f(x) polinomial atas lapangan K yang mempunyai derajat positif n dan koefisien pemimpin c. Jika $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ adalah akar-akar yang berbeda dari f(x) dalam K, maka $f(x) = c(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)$. (Raisinghania, Agarwal, 1980)

$\bar{F}$ disebut penutup aljabar atas lapangan F jika $\bar{F}$ aljabar atas lapangan F dan setiap polinomial $f(x) \in K[x]$, terpisah secara pasti dalam lapangan $\bar{F}$ (sedemikian sehingga lapangan $\bar{F}$ memuat semua elemen aljabar atas lapangan F). Lapangan $K \subseteq \bar{F}$ adalah lapangan pemisah dari $\{f_i(x) / i \in I\}$ atas lapangan F jika lapangan K adalah subfield terkecil dari lapangan $\bar{F}$ yang memuat lapangan F dan semua akar dalam lapangan $\bar{F}$ dari setiap $f_i(x)$, untuk $i \in I$. (Fraleigh, 1994)

Suatu lapangan $K \subseteq \bar{F}$ adalah lapangan pemisah atas lapangan F , jika $K \subseteq \bar{F}$ adalah lapangan pemisah dari himpunan sebarang dari polinomial-polinomial dalam F[x], dimana F[x] adalah himpunan dari polinomial-polinomial dengan koefisien koefisien di dalam F.

Theorema 2.1 (Dean, R A, 1996)

Untuk semua lapangan K dan semua $f(x) \in K[x]$ sedemikian sehingga $\deg(f(x)) > 1$, terdapatlah lapangan perluasan F atas lapangan K yang merupakan lapangan pemisah untuk f(x) atas lapangan K.

JURNAL MATEMATIKA DAN KOMPUTER
Vol. 7. No. 3, 1 - 7, Desember 2004, ISSN : 1410-8518

Bukti :

Akan dibuktikan dengan induksi pada deg (f(x)) = n. Jika deg (f(x)) = 1 maka f(x) polinomial linear dan K = F. Diasumsikan benar untuk semua polinomial-polinomial yang berderajat lebih kecil dari n, maka akan dibuktikan benar untuk deg(f(x)) = n . Misal p(x) $\in$ K[x]adalah faktor tak tereduksi dari f(x) (mengingat K[x] suatu DFT / daerah faktorisasi tunggal). Menurut bukti teorema Kronecker maka terdapatlah lapangan $F \cong \frac{K[x]}{(p(x))}$ yang merupakan lapangan perluasan atas lapangan K dan p(x) mempunyai akar $\alpha_1 \in F$ Sehingga diperoleh p(x) $= (x-\alpha_1)q(x) \in$ F [x] dan f(x) = $(x-\alpha_1)q(x)g(x)$. Karena q(x) .g(x)mempunyai derajat (n-1), maka dengan hipotesis induksi terdapat lapangan pemisah F untuk q(x) .g(x) yang memuat akar-akar α_1, $\alpha_{2,......,}$ $\alpha_{n.}$ dari f(x) . Sehingga f(x) terfaktorisasi linear dalam F[x] dan K (α_1, $\alpha_{2,......,}$ α_n) $\subseteq$ F adalah lapangan pemisah dari f(x) atas lapangan K. Misal F lapangan perluasan atas lapangan K , maka polinomial f(x) $\in$ K[x] terpisah dalam lapangan F jika f(x) terfaktor dalam hasil kali dari faktor linear dalam F[x].

Dari teorema tersebut berakibat bahwa jika K$\subseteq \bar{F}$adalah lapangan pemisah atas lapangan F, maka setiap polinomial tak tereduksi dalam F[x] mempunyai akar dalam lapangan K yang terpisah dalam lapangan K. (Fraleigh, 1994)

3. POLINOMIAL SEPARABEL

Polinomial tak tereduksi f(x) dalam lapangan K adalah separabel dalam K jika semua akar-akar dari f(x) dalam lapangan pemisahnya tak mempunyai akar-akar ganda dalam lapangan pemisahnya , sehingga f(x) mempunyai bentuk f(x) = c(x-α_1)(x-α_2)…..(x-α_n) dimana α_i berbeda semua, dimana i = 1,2,…, n .

Selanjutnya misal f(x) polinomial tak tereduksi atas lapangan K , maka f(x) mempunyai akar ganda dalam lapangan perluasan jika dan hanya jika f ‘(x) = 0.(Raishinghania, Agarwal, 1980) Sehingga berakibat bahwa jika f(x) polinomial tak tereduksi atas lapangan K dengan akar-akar α dalam lapangan perluasannya sedemikian sehingga f(α) = 0 dan f ‘(α) $\neq$ 0 maka f(x) tidak mempunyai akar ganda atau akar-akarnya berbeda. Polinomial tidak tetap atas lapangan K separabel dalam lapangan K jika semua faktor tidak tereduksinya separabel atas lapangan K.

Jika $K \subseteq F$ adalah perluasan aljabar maka elemen aljabar $\alpha \in F$ separabel dalam lapangan K jika polinomial minimal untuk $\alpha \in K$ adalah separabel yaitu mempunyai semua akar-akar yang berbeda.(Raisinghania, Agarwal, 1980)

Misalkan f(x) polinomial dalam lapangan K, sebuah elemen $\alpha \in F$ merupakan akar tunggal dari f(x) jika $(x-\alpha) \mid f(x)$, tetapi jika $(x-\alpha)^n \mid f(x)$ dimana n > 1 dan untuk akar kelipatan lebih besar dari 1 maka disebut akar ganda atau akar berlipat.(Raisinghania, Agarwal 1980)

4. PERLUASAN NORMAL

Perluasan aljabar F atas lapangan K dikatakan sebagai perluasan normal dari lapangan K jika setiap polinomial tak tereduksi dalam K[x] yang mempunyai akar dalam lapangan pemisahnya terpisah secara pasti dalam F[x].

Teorema 4.1.(Raisinghania, Agarwal, 1980)

Misal F adalah perluasan aljabar berhingga atas lapangan K maka F normal atas K jika dan hanya jika F adalah lapangan pemisah dari polinomial atas lapangan K.

Bukti :

($\Rightarrow$) misal $F = K(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ adalah perluasan normal berhingga dari lapangan K sedemikian sehingga masing –masing dari $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ adalah aljabar dalam lapangan K.

Misal $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ adalah polinomial – polinomial minimal dalam lapangan K berturut –turut untuk $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

karena lapangan F normal atas lapangan K dan $f_1(x). f_2(x)\ldots f_n(x)$ polinomial – polinomial minimal untuk anggota – anggota dari lapangan F atas lapangan K maka lapangan pemisah dari masing – masing polinomial tersebut berada dalam lapangan F. Konsekuensinya adalah lapangan F merupakan lapangan pemisah dari polinomial $f(x)= f_1(x). f_2(x)\ldots.f_n(x)$ dalam lapangan K.

JURNAL MATEMATIKA DAN KOMPUTER
Vol. 7. No. 3, 1 - 7, Desember 2004, ISSN : 1410-8518

($\Leftarrow$) misal lapangan F adalah perluasan aljabar dari lapangan K yang merupakan lapangan pemisah dari beberapa polinomial f(x) dalam lapangan K dan α_1, α_2, …., α_n adalah akar – akar dari f(x) dalam lapangan F, maka : $F = K(\alpha_1, \alpha_2, …., \alpha_n)$.

Akan ditunjukkan bahwa lapangan F adalah perluasan normal dari lapangan K Untuk keperluan pembuktian maka harus ditunjukkan bahwa lapangan pemisah dari polinomial minimal untuk masing – masing anggota lapangan F berada dalam lapangan F.

Misal α elemen sebarang dari lapangan F dan g(x) adalah polinomial minimal untuk α dalam lapangan K. Dimisalkan jika mungkin g(x) mempunyai tidak ke semua akar – akarnya dalam lapangan F atau dengan kata lain α' adalah akar dari g(x) yang lain yang tidak berada dalam lapangan F.

Perluasan sederhana $K(\alpha)$ akan isomorfis ke perluasan sederhana $F(\alpha')$ sedemikian sehingga α dipetakan pada α' dan masing – masing anggota dari lapangan K sisa tertentu.

Selanjutnya lapangan F merupakan lapangan pemisah dari f(x) dalam lapangan K dan kemudian juga dalam $K(\alpha)$, karena $\alpha \in F$. demikian juga $F(\alpha')$ dibangun oleh akar – akar dari f(x) dalam $K(\alpha')$.

Jadi $F(\alpha')$ adalah lapangan pemisah dari f(x) dalam lapangan $K(\alpha')$.

Sehingga pemetaan isomorfis dari $K(\alpha)$ onto $K(\alpha')$ dapat diperluas ke pemetaan isomorfis F ke $F(\alpha')$ dengan kata lain bahwa masing – masing anggota dari lapangan K merupakan sisa tertentu.

Konsekuensinya, F dan $F(\alpha')$ harus mempunyai derajat yang sama dalam Lapangan K yaitu jika $F(\alpha')$ bukan merupakan perluasan sejati dari lapangan F.

Sehingga terjadi kontradiksi. Oleh karena itu lapangan F merupakan perluasan normal dari lapangan K.

Theorema 4.2 (Fraleigh, 1994)

Jika lapangan F adalah perluasan normal dari lapangan K dan L sedemikian sehingga K⊂ L⊂ F maka lapangan F juga merupakan perluasan normal dari lapangan L.

Bukti :

Untuk membuktikan bahwa lapangan F normal atas lapangan L akan ditunjukkkan bahwa lapangan L berada di lapangan F.

Misal α elemen sebarang dari lapangan F dan f(x) serta g(x) polinomial – polinomial minimum untuk α dalam lapangan K dan L berturut turut.

$F(x) \in K[x] \Rightarrow f(x) \in L[x] \quad (\therefore K \subset L)$

Karena g(x) merupakan polinomial minimum dalam lapangan L yang dipenuhi oleh α maka $g(x) \mid f(x)$

Sehingga masing – masing akar dari g(x) dalam lapangan F juga merupakan akar dari f(x) dalam lapangan F.

Tetapi berdasarkan asumsi yang telah diberikan bahwa masing – masing akar dari f(x) adalah dalam lapangan F. Oleh karena itu masing – masing akar dari g(x) adalah berada dalam lapangan F, sehingga lapangan F normal atas lapangan L

5. KESIMPULAN

Dari hasil pembahasan diperoleh kesimpulan :

1. Untuk lapangan K dan $f(x) \in K[x]$ sedemikian sehingga deg (f(x)) > 1 terdapatlah lapangan pemisah F untuk $f(x)$ atas lapangan K .
2. Jika lapangan K mempunyai karakteristik 0 maka polinomial tak tereduksi $f(x) \in K[x]$ separabel dalam K.
3. Perluasan normal adalah lapangan pemisah yang mempunyai akar-akar yang berlainan atas polinomial tak tereduksi $f(x) \in K[x]$.

DAFTAR PUSTAKA

Drozd, Yu A. and Kirichenko, V.V.1994. "*Finite Dimensional Algebra*". Springer – Verlag, USA.

Dean, R A, 1996, Element of abstract Algebra, John Willey & Sons, U S A

Fraleigh, John B. 1994. "*A First Course in Abstract Algebra*". Addison and Wesley Publising Company, USA, 1994.

Gallian, Joseph A. 1990."*Contemporary Abstract Algebra 2th*". D.C. Heath and Company, Canada.

Gilbert, Jimmie and Linda Gilbert.1990. "*Elements of modern Algebra 3th*".PWS-Kent Co., New York.

Irawanto, Bambang. 2001."*Galois field*". Tesis. FMIPA UGM.

Raisinghania, M.D. and Aggarwal, R.S.1980. "*Modern Algebra*". S. Chand & Company Ltd, New Delhi.