

DIMENSI PARTISI n GRAF AMALGAMASI BINTANG YANG DIHUBUNGKAN SUATU LINTASAN

Asmiati

Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung
asmiati308@yahoo.com

Abstract. Let $G = (V, E)$ be a connected graph, vertex $v \in V(G)$, and $S \subset V(G)$. For an ordered k -partition, $\pi = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$, the representation v with respect to π is the k -vector $r(v|\pi)$, $v \in V(G)$, are distinct. The minimum k for which there is a resolving k -partition of $V(G)$ is the partition dimension of G , denoted by $pd(G)$. In this paper, we determine the partition dimension for certain amalgamation of stars, namely $nS_{k,m}$.

Keywords: resolving partition, partition dimension, amalgamation of stars.

1. PENDAHULUAN

Dimensi partisi pada suatu graf diperkenalkan [1] pada tahun 1998. Berikut ini diberikan definisi dan sifat-sifat dari dimensi partisi pada suatu graf yang diambil dari [2].

Misalkan $G = (V, E)$ suatu graf, $v \in V(G)$ dan $S \subset V(G)$. Jarak dari titik v ke himpunan S , dinotasikan dengan $d(v, S)$ adalah, $\min\{d(v, x), x \in S\}$ dengan $d(v, x)$ adalah jarak dari titik v ke x . Misalkan $\pi = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ adalah partisi dari $V(G)$ dengan S_1, S_2, \dots, S_k kelas-kelas dari π . Representasi v terhadap π , dinotasikan dengan $r(v|\pi)$, adalah k -tupel terurut $(d(v, S_1), d(v, S_2), \dots, d(v, S_k))$. Selanjutnya, π disebut partisi pembeda dari $V(G)$ jika $r(u|\pi) \neq r(v|\pi)$ untuk setiap dua titik berbeda $u, v \in V(G)$. Dimensi partisi dari G , dinotasikan $pd(G)$, adalah nilai k terkecil sehingga G mempunyai partisi pembeda dengan k kelas.

Dimensi partisi untuk sebarang graf belum dapat ditentukan, jadi belum terdapat formula umum untuk dimensi partisi sembarang graf, demikian halnya juga untuk pohon. Pada [1] telah didapatkan dimensi partisi pada beberapa kelas graf diantaranya, lintasan, graf bintang ganda, graf ulat, lingkaran, graf lengkap, graf bipartite lengkap.

Asmiati [3] telah mendapatkan dimensi partisi pada graf amalgamasi bintang. Selanjutnya, Baskoro dan Darmaji [4] berhasil mendapatkan dimensi partisi dari operasi perkalian korona dua buah graf. Tomescu [5] telah berhasil mengkarakterisasi graf berorde $n \geq 9$ berdimensi partisi $(n-2)$. Sejauh penelusuran literatur belum ada kajian tentang dimensi partisi dari n buah graf amalgamasi bintang yang dihubungkan suatu lintasan. Pada paper ini akan ditentukan dimensi partisi dari graf tersebut.

2. HASIL DAN PEMBAHASAN

Amalgamasi bintang, $S_{m,k}$ dengan $k \geq 1$, $m \geq 2$ adalah graf yang diperoleh dari $(m-1)$ buah graf bintang S_{k+1} , dengan cara menyatukan sebuah daun dari setiap graf S_{k+1} . Titik penyatuan tersebut sebagai titik pusat $S_{m,k}$. Misalkan terdapat n buah $S_{m,k}$, yang mana setiap pusat $S_{m,k}$ dihubungkan oleh suatu lintasan. Selanjutnya, subdivisi dua titik pada lintasan yang berada diantara dua $S_{m,k}$, maka diperoleh graf $nS_{m,k}$. Misalkan titik pusat untuk setiap $S_{m,k}$, dinotasikan dengan m_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Titik yang berjarak satu dari m_i , $i = 1, 2, \dots, n$, disebut titik tengah, dinotasikan dengan l_t^i , $i = 1, 2, \dots, n$; $t = 1, 2, \dots, (m-1)$. Daun ke- j dari titik tengah l_t^i , dinotasikan dengan l_{tj}^i ,

$j = 1, 2, \dots, k$. Titik-titik hasil subdivisi lintasan dinotasikan dengan $x_i, i = 1, 2, \dots, n$. Berikut ini adalah lemma yang dapat digunakan untuk mengkonstruksi batas bawah dari dimensi partisi graf.

Lemma 2.1 [1] *Diberikan G graf terhubung dengan partisi pembeda π dari $V(G)$, untuk $u, v \in V(G)$, jika $d(u, w) = d(v, w)$ untuk setiap $w \in V(G) - \{u, v\}$, maka u dan v merupakan elemen yang berbeda dari π .*

Bukti:

Misalkan π partisi pembeda dari $V(G)$ dan andaikan $u = v$. Oleh karena $d(u, w) = d(v, w)$ untuk setiap $w \in V(G)$, maka $r(u|\pi) = r(v|\pi)$. Kontradiksi dengan π partisi pembeda dari $V(G)$, jadi pengandaian salah. ■

Pada bagian ini akan didiskusikan dimensi partisi pada graf $nS_{m,k}$.

Teorema 2.2 *Dimensi Partisi Graf $nS_{m,k}$ dengan $k \geq 1, m \geq 2$ adalah :*

$$pd(nS_{m,k}) = \begin{cases} k, & 1 \leq n \leq \lfloor \frac{k}{m-1} \rfloor \\ k + 1, & \text{lainnya} \end{cases}$$

Bukti :

a. Kasus $1 \leq n \leq \lfloor \frac{k}{m-1} \rfloor$

Akan ditentukan batas bawah dimensi partisi pada graf $nS_{m,k}$ untuk

$1 \leq n \leq \lfloor \frac{k}{m-1} \rfloor$. Karena setiap titik di l_{ij}^i dengan $t = 1, 2, 3, \dots, (m-1)$ bertetangga dengan k daun, maka berdasarkan Lemma 2.1 diperoleh $pd(nS_{m,k}) \geq k$.

Batas atas dimensi partisi graf $nS_{m,k}$ untuk $1 \leq n \leq \lfloor \frac{k}{m-1} \rfloor$, misalkan :

a. $S_1 = \{x_i \mid i \in [1, \lfloor \frac{k}{m-1} \rfloor]\}$

b. $S_2 = \{m_i \mid i \in [1, \lfloor \frac{k}{m-1} \rfloor]\}$

c. Titik-titik pada l_t^i untuk $i = 1, 2, 3, \dots, \lfloor \frac{k}{m-1} \rfloor$ dan $t = 1, 2, 3, \dots, (m-1)$ berturut-turut masuk ke dalam kelas partisi $\{S_1, S_2, S_3, \dots, S_k\}$.

d. Daun-daun pada l_{ij}^i merupakan kombinasi dari kelas-kelas partisi $\{S_1, S_2, S_3, \dots, S_k\}$,

Karena representasi dari setiap titik pada graf $nS_{m,k}$. Untuk $k \geq m$ dan

$1 \leq n \leq \lfloor \frac{k}{m-1} \rfloor$ adalah berbeda, sehingga $pd(nS_{m,k}) \leq k$. Akibatnya $pd(nS_{m,k}) \leq k$ untuk $1 \leq n \leq \lfloor \frac{k}{m-1} \rfloor$.

b. Kasus n lainnya

Akan ditentukan batas bawah graf $nS_{m,k}$ untuk $n \geq \lfloor \frac{k}{m-1} \rfloor$. Karena setiap titik

l_t^i dengan $t = 1, 2, 3, \dots, (m-1)$ dan $i = 1, 2, 3, \dots, n$ bertetangga dengan k daun, maka berdasarkan Lemma 2.1, diperoleh $pd(nS_{m,k}) \geq k$. Andaikan titik-titik pada graf $nS_{m,k}$ dipartisi menjadi k partisi yaitu $\pi = \{S_1, S_2, S_3, \dots, S_k\}$. Akibatnya

terdapat daun-daun pada l_{ij}^i untuk suatu t dan $j = 1, 2, 3, \dots, k$ (misalnya l_{ts}^i dan $l_{tp}^i, s \neq p$) akan masuk kedalam kelas partisi yang sama. Sehingga $r(l_{ts}^i | \pi) = r(l_{tp}^i | \pi)$. Hal ini kontradiksi dengan pengandaian. Jadi $pd(nS_{m,k}) \geq k + 1$ untuk $n \geq \lfloor \frac{k}{m-1} \rfloor$.

Selanjutnya ditentukan batas atas $pd(nS_{m,k})$. Untuk menunjukkan

$pd(nS_{m,k}) \leq k+1$. Misalkan $\pi = \{S_1, S_2, S_3, \dots, S_{k+1}\}$. Himpunan titik-titik di $V(nS_{m,k})$ untuk $n \geq \lfloor \frac{k}{m-1} \rfloor$ dipartisi sebagai berikut :

a. $S_1 = \{l_{11}^1\}$

b. $S_2 = \{m_i \mid i \in [1, n]\}$

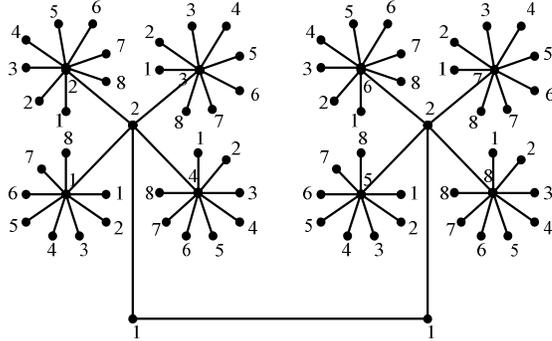
c. $S_3 = \{x_i \mid i \in [1, n]\}$

d. Titik-titik pada l_t^i untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n$ dan $t = 1, 2, 3, \dots, (m-1)$ berturut-turut masuk ke dalam kelas partisi $\{S_2, S_3, \dots, S_k\}$

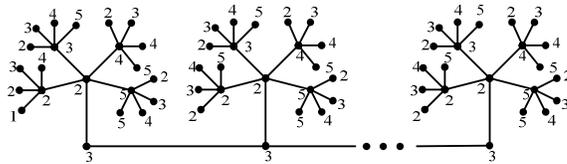
Daun-daun pada l_{ij}^i , kecuali l_{11}^1 merupakan kombinasi dari kelas-kelas partisi $\{S_2, S_2, S_3, \dots, S_{k+1}\}$. Terdapat satu titik yang terdapat pada kelas partisi pertama dan titik tersebut merupakan titik ujung dari lintasan terpanjang pada graf $nS_{m,k}$. Akibatnya representasi dari semua titik pada graf $nS_{m,k}$ adalah berbeda.

Sehingga diperoleh $pd(nS_{m,k}) \leq k+1$. Akibatnya $pd(nS_{m,k}) = k+1$, untuk $n \geq \lfloor \frac{k}{m-1} \rfloor$. ■

Berikut ini diberikan contoh graf dengan partisi pembedanya.



Gambar 2.1 Partisi Pembeda pada graf $nS_{5,8}$ untuk $1 \leq n \leq 2$.



Gambar 2.2 Partisi Pembeda pada graf $nS_{5,4}$ untuk $n \geq 1$.

Pada Gambar 2.1 merupakan konstruksi batas atas dimensi partisi graf $nS_{5,8}$. Karena pada graf $nS_{5,8}$, nilai $m=5$ dan $k=8$, maka $1 \leq n \leq \lfloor \frac{8}{5-1} \rfloor = 2$. Mendesain partisi pembeda setiap titik di $nS_{5,8}$ untuk $1 \leq n \leq 2$ mengikuti pembuktian Kasus (a).

Demikian juga halnya pada Gambar 2.2, merupakan konstruksi batas atas dimensi partisi graf $nS_{5,4}$ untuk $n \geq 1$. Cara membentuk partisi pembeda titik-titik di graf $nS_{5,4}$ untuk $n \geq 1$, mengikuti pembuktian pada Kasus (b).

3. PENUTUP

Dimensi partisi graf $nS_{m,k}$ dengan $k \geq 1$, $m \geq 2$ adalah k untuk $1 \leq n \leq \lfloor \frac{k}{m-1} \rfloor$ dan $(k+1)$ untuk lainnya.

4. DAFTAR PUSTAKA

- [1] Chartrand, G., Salehi, E. dan Zang, P., (1998), On the partition dimension of a graph, *Congr. Numer.*, 130, 157-168.
- [2] Chartrand, G., Salehi, E. dan Zang, P., (2000), The partition dimension of a graph, *Aequationes Math.*, 59, 45-54.
- [3] Asmiati, Partition dimension of amalgamation of stars, (2012), *Bulletin of Mathematics*, 4 (2), 161-167.
- [4] Baskoro, E. dan Darmaji, (2012), The partition dimension of corona product of two graphs, *Far East J. Math. Sci.*, 66(12), 181-196.
- [5] Tomescu, I., (2008), Discrepancies between metric dimension and partition dimension of a connected graph, *Discrete Math.*, 308, 5026-5031.