

KONSTRUKSI INTEGRAL MENGGUNAKAN FUNGSI SEDERHANA – δ PADA $[a, b]$

Abdul Aziz¹, YD. Sumanto²

^{1,2} Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Matematika, Universitas Diponegoro
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H., Tembalang, Semarang, 50275

Abstract. In this paper, we construct the δ – simple function using the δ - fine Perron partition. By this function, we define integral, which is called H^0 integral.

Keywords : δ - fine Perron partition , δ – simple function, H^0 integral.

1. PENDAHULUAN

Di dalam dunia modern saat ini banyak teori matematika yang telah diterapkan untuk membantu umat manusia dalam memenuhi kebutuhannya. Teori – teori ini merupakan landasan dan jaminan akan validnya suatu metode yang diterapkan dalam kehidupan sehari – hari. Di dalam matematika dikenal integral Henstock. Henstock mengkonstruksi integralnya dengan menggunakan partisi Perron – δ fine. Integral Henstock telah menjadi topik yang menarik bagi para peneliti. Banyak peneliti mengkaji sifat-sifat integral Henstock, baik secara teori maupun aplikasinya. Misalnya [1] telah mengkaji integral Henstock dalam ruang real \mathbb{R} dan digeneralisasi oleh [2] dalam ruang Euclidean \mathbb{R}^n dan mengaplikasikannya dalam medan vektor. Penulis akan memanfaatkan partisi Perron – δ fine untuk membentuk fungsi sederhana – δ . Selanjutnya dari fungsi sederhana – δ akan dikonstruksi integral baru.

2. HASIL DAN PEMBAHASAN

2.1 Partisi Perron δ – Fine

Berikut dibahas definisi dari partisi Perron δ – fine pada $[a, b]$ beserta jaminan eksistensinya.

Definisi 2.1[5] Diberikan interval $[a, b] \subset \mathfrak{R}$, dan δ fungsi positif pada $[a, b]$. P disebut

partisi Perron δ – fine pada $[a, b]$ jika $P = \{[x_{i-1}, x_i], \xi_i | i = 1, 2, 3, \dots, n\}$ dengan $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ dan $[x_{i-1}, x_i] \subset (\xi_i - \delta(\xi_i), \xi_i + \delta(\xi_i))$ dengan $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$.

Berikut ini adalah lemma yang menjamin eksistensi partisi Perron δ – fine.

Lemma 2.2 [1] Jika $\delta(\varepsilon) > 0$, untuk $\xi \in [a, b]$, maka terdapat partisi Perron δ – fine $P = \{[x_{i-1}, x_i], \xi_i | i = 1, 2, 3, \dots, n\}$ dan $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ sedemikian sehingga berlaku $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ dan $[x_{i-1}, x_i] \subset (\xi_i - \delta(\xi_i), \xi_i + \delta(\xi_i))$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Bukti :

Diberikan $[a, b] \subset \mathfrak{R}$ dan fungsi positif δ pada $[a, b]$, selanjutnya dibentuk $G = \{(\xi - \delta(\xi), \xi + \delta(\xi)) | \xi \in [a, b]\}$ liput terbuka dari $[a, b]$. Karena $[a, b]$ kompak maka G mempunyai liput bagian hingga, misalkan $\{(\xi_k - \delta(\xi_k), \xi_k + \delta(\xi_k)) | 1, 2, \dots, n\}$

diambil $x_0 = a$ dan $x_n = b$ $x_i \in (\xi_i - \delta(\xi_i), \xi_i + \delta(\xi_i)) \cap (\xi_{i+1} - \delta(\xi_{i+1}), \xi_{i+1} + \delta(\xi_{i+1}))$, $\xi_i \leq x_i \leq \xi_{i+1}$, $i =$

$1, 2, 3, \dots, n - 1$

Dari sini diperoleh

$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \subset (\xi_i - \delta(\xi_i), \xi_i + \delta(\xi_i))$ ■

Lemma 2.3[4] Diberikan P adalah partisi Perron δ – fine pada $[a, b]$. $[c, d] \subseteq [a, b]$ maka terdapat partisi Perron δ – fine pada $[c, d]$ dengan c dan d sebagai salah satu titik ujungnya

Bukti :

Diberikan fungsi positif- δ pada interval $[a, b]$. Selanjutnya dipilih $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, di mana $[a, b] \subset \cup_1^n (\xi_k - \delta(\xi_k), \xi_{k+1} + \delta(\xi_{k+1}))$ sehingga dengan mengambil $c \in (\xi_r - \delta(\xi_r), \xi_r + \delta(\xi_r)) \cap (\xi_{r+1} - \delta(\xi_{r+1}), \xi_{r+1} + \delta(\xi_{r+1}))$ dengan $\xi_r \leq c \leq \xi_{r+1}$ untuk $1 \leq r \leq n$ dan mengambil $d \in (\xi_s - \delta(\xi_s), \xi_s + \delta(\xi_s)) \cap (\xi_{s+1} - \delta(\xi_{s+1}), \xi_{s+1} + \delta(\xi_{s+1}))$ dengan $\xi_s \leq d \leq \xi_{s+1}$ untuk suatu r, s dengan $1 < r < s < n$.

Diambil $x_0 = a$ dan $x_n = b$
 $x_i \in (\xi_i - \delta(\xi_i), \xi_i + \delta(\xi_i)) \cap (\xi_{i+1} - \delta(\xi_{i+1}), \xi_{i+1} + \delta(\xi_{i+1}))$, $\xi_i \leq x_i \leq \xi_{i+1}$
 dengan $i = 1, 2, 3, \dots, n - 1$, $x_r = c$ dan $x_s = d$

Dari sini diperoleh partisi Perron $\delta - fine$ pada $[a, b]$

$$P = \{([x_0 = a, x_1], \xi_1), \dots, ([x_{r-1}, x_r = c], \xi_r), ([x_r = c, x_{r+1}], \xi_{r+1}), \dots, ([x_{s-1}, x_s], \xi_s), ([x_s = d, x_{s+1}], \xi_{s+1}), \dots, ([x_{n-1}, x_n = b])\}$$

dimana c dan d sebagai titik ujung. ■

Teorema 2.4 [3] Jika P dan Q masing – masing partisi Perron $\delta - fine$ pada $[a, b]$ dan $[c, d]$ maka $P \cup Q$ adalah partisi Perron $\delta - fine$ pada $[a, b] \cup [c, d]$.

Bukti :

Diberikan fungsi positif δ , $P = \{[x_{i-1}, x_i], \xi_i | i = 1, 2, 3, \dots, m\}$ partisi Perron $\delta - fine$ pada $[a, b]$, dan $Q = \{[Y_{k-1}, Y_k], \xi_k | k = 1, 2, 3, \dots, m\}$ partisi Perron $\delta - fine$ pada $[c, d]$. Karena δ fungsi positif pada $[a, b]$ dan $[c, d]$, akibatnya δ juga merupakan fungsi positif pada $[a, b] \cup [c, d]$. Dari sini diperoleh $P \cup Q = \{[x_{i-1}, x_i], \xi_i | i = 1, 2, 3, \dots, m\} \cup \{[Y_{k-1}, Y_k], \xi_k | k = 1, 2, 3, \dots, m\}$ merupakan partisi Perron $\delta - fine$ pada $[a, b] \cup [c, d]$. ■

2.2 Integral pada Fungsi Sederhana- δ

Pada bagian ini dibahas tentang integral pada fungsi sederhana – δ yang

erat kaitannya dengan integral yang diuraikan penulis setelah bagian ini. Selain itu, juga dibahas tentang sifat – sifat sederhana yang berlaku di dalamnya.

Definisi 2.5 [13] Jika $\phi = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{E_i}$ fungsi sederhana – δ pada interval $[a, b] \subset \mathfrak{R}$ dengan $E_i = [x_{i-1}, x_i]$ $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$, $E_n = [x_{n-1}, x_n]$, $x_0 = a$, dan $x_n = b$ maka integral ϕ pada interval $[a, b]$ terhadap x adalah

$$\int_a^b \phi dx = \sum_{i=1}^n c_i (x_i - x_{i-1})$$

Teorema berikut merupakan sifat dasar integral fungsi sederhana – δ .

Teorema 2.6 [13] Jika ϕ dan ψ fungsi – fungsi sederhana – δ pada interval $[a, b] \subseteq \mathfrak{R}$ dan $k \in \mathfrak{R}$ maka

$$a. \int_a^b k\phi dx = k \int_a^b \phi dx$$

$$b. \int_a^b (\phi + \varphi) dx = \int_a^b \phi dx + \int_a^b \varphi dx$$

Bukti :

a. $\phi = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{E_i}$ dan $\varphi = \sum_{j=1}^m d_j \chi_{D_j}$

$$\text{maka } \int_a^b k\phi dx = \sum_{i=1}^n (kc_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$= k \sum_{i=1}^n (c_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$= k \int_a^b \phi dx$$

b. $\phi + \psi = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\sum_{k=1}^{r_{ij}} (c_i + d_j) \chi_{H_k})$

merupakan fungsi sederhana – δ dengan $\{[Z_{ijk-1}, Z_{ijk}], \xi_{ijk} | k = 1, 2, 3, \dots, r_{ij}\}$ partisi Perron $\delta - fine$ pada $P_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \cap [y_{j-1}, y_j]$, $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$.

$$\text{Jadi diperoleh } \int_a^b (\phi + \varphi) dx$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{r_{ij}} (c_i + d_j)(z_k - z_{k-1})$$

$$= \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{r_{ij}} c_i (z_k - z_{k-1})) + \sum_{j=1}^m (\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{r_{ij}} d_j (z_k - z_{k-1}))$$

$$= \sum_{i=1}^n (c_i \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{r_{ij}} (z_k - z_{k-1})) + \sum_{j=1}^m (d_j \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{r_{ij}} (z_k - z_{k-1}))$$

$$= \sum_{i=1}^n (c_i \sum_{j=1}^m |P_{ij}|) + \sum_{j=1}^m (d_j \sum_{i=1}^n |P_{ij}|)$$

$$= \sum_{i=1}^n c_i (x_i - x_{i-1}) + \sum_{j=1}^m d_j (y_j - y_{j-1})$$

$$= \int_a^b \phi \, dx + \int_a^b \phi \, dx \blacksquare$$

2.3 Integral H^0

Pada bab ini dibahas tentang integral H^0 beserta sifat – sifat sederhana yang berlaku di dalamnya.

Definisi 2.7 Fungsi $f : [a, b] \rightarrow \mathfrak{R}$ dikatakan terintegral H^0 pada $[a, b]$ jika terdapat bilangan $I \in \mathfrak{R}$ sedemikian sehingga untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif $-\delta$ pada $[a, b]$ sedemikian sehingga $P = \{[x_{i-1}, x_i], \xi_i | i = 1, 2, 3, \dots, n\}$ partisi Perron $\delta - fine$ pada $[a, b]$ maka terdapat $\phi = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{E_i}$ merupakan fungsi sederhana $-\delta$ atas P dengan f berelasi dengan ϕ dan memenuhi $|I - \int \phi| < \varepsilon$.

Selanjutnya I disebut nilai integral H^0 pada $[a, b]$ dan ditulis

$$I = (H^0) \int_a^b f(x) \, dx$$

Teorema 2.8 Jika $f \in H^0([a, b])$ maka nilai integral H^0 pada $[a, b]$ tunggal.

Bukti :

Misalkan $(H^0) \int_a^b f(x) \, dx = I_1$ dan $(H^0) \int_a^b f(x) \, dx = I_2$

Diberikan sebarang bilangan $\varepsilon > 0$, terdapat fungsi positif $-\delta$ pada $[a, b]$.

Karena $(H^0) \int_a^b f(x) \, dx = I_1$ maka dapat ditemukan fungsi positif δ_1 pada $[a, b]$ sedemikian sehingga jika

$P_1 = \{[x_{i-1}, x_i], \xi_i | i = 1, 2, 3, \dots, n\}$ partisi Perron $\delta_1 - fine$ pada $[a, b]$ maka terdapat fungsi sederhana $-\delta_1 \phi_1$ atas P_1 pada $[a, b]$ dengan f berelasi dengan ϕ_1 dan $|I_1 - \int \phi_1| < \frac{\varepsilon}{2}$. Selanjutnya karena

$(H^0) \int_a^b f(x) \, dx = I_2$ maka dapat ditemukan fungsi positif δ_2 pada $[a, b]$ sehingga jika $P_2 = \{[y_{k-1}, y_k], \xi_k | k = 1, 2, 3, \dots, m\}$ adalah partisi Perron $\delta_2 - fine$ pada $[a, b]$ maka terdapat fungsi sederhana $-\delta_2 \phi_2$ atas P_2 pada $[a, b]$ dengan f berelasi dengan ϕ_2 dan $|I_2 - \int \phi_2| < \frac{\varepsilon}{2}$. Selanjutnya dibentuk fungsi

98

positif $\delta(x) = \min(\delta_1(x), \delta_2(x))$ untuk setiap $x \in [a, b]$ dan $P = \{[x_{i-1}, x_i], \xi_i | i = 1, 2, 3, \dots, n\}$ partisi Perron $\delta - fine$ pada $[a, b]$ dan $\phi = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{E_i}$ merupakan fungsi sederhana $-\delta$ atas P pada $[a, b]$ dengan f berelasi dengan ϕ . Karena $\delta(x) \leq \delta_1(x)$ dan $\delta(x) \leq \delta_2(x)$ maka P juga merupakan partisi Perron $\delta_1 - fine$ dan partisi Perron $\delta_2 - fine$ pada $[a, b]$. Akibatnya ϕ merupakan fungsi sederhana $-\delta_1$ sekaligus fungsi sederhana $-\delta_2$ pada $[a, b]$. Dari sini diperoleh $|I_1 - \int \phi_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ dan $|I_2 - \int \phi_2| < \frac{\varepsilon}{2}$. Selanjutnya

$$|I_1 - I_2| = \left| I_1 - \int \phi + \int \phi - I_2 \right|$$

$$\leq |I_1 - \int \phi| + |\int \phi - I_2|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Terbukti bahwa $I_1 = I_2$. ■

Teorema 2.9 Misalkan $f, g : [a, b] \rightarrow \mathfrak{R}$ dan $f, g \in H^0([a, b])$ berlaku :

a. $kf \in H^0([a, b])$ dan

$$(H^0) \int_a^b kf(x) \, dx = k(H^0) \int_a^b f(x) \, dx$$

b. $f + g \in H^0([a, b])$

Selanjutnya ditulis $(H^0) \int_a^b (f + g) \, dx = (H^0) \int_a^b f(x) \, dx + (H^0) \int_a^b g(x) \, dx$

Bukti :

a. Diberikan sebarang bilangan $\varepsilon > 0$, karena $f(x)$ terintegral H^0 pada $[a, b]$, misal $I = (H^0) \int f(x) \, dx$ akibatnya untuk bilangan ε yang diberikan terdapat fungsi $\delta_1 > 0$ sedemikian sehingga jika $P_1 = \{[x_{i-1}, x_i], \xi_i | i = 1, 2, 3, \dots, n\}$ partisi Perron $\delta - fine$ pada $[a, b]$ maka terdapat fungsi sederhana $-\delta_1 \phi_1$ atas P_1 pada $[a, b]$ dengan f berelasi dengan ϕ_1 dan

$$\left| I - \int_a^b \phi_1 \right| < \frac{\varepsilon}{|k|+1}$$

Selanjutnya dibentuk $\phi^* = k\phi_1$ fungsi sederhana $-\delta_1$ atas P_1 pada $[a, b]$.

Karena f berelasi dengan ϕ_1 , maka

$$|kf(\xi) - k\phi(\xi)| = |k||f(\xi) - \phi(\xi)| < |k|\varepsilon$$

Akibatnya kf berelasi dengan ϕ^* .

Dari sini diperoleh

$$\begin{aligned} \left| kI - \int_a^b \phi^* \right| &= \left| kI - \int_a^b k\phi_1 \right| \\ &= \left| kI - k \int_a^b \phi_1 \right| \\ &= |k| \left| I - \int_a^b \phi_1 \right| \\ &< \frac{|k|\varepsilon}{|k|+1} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

Terbukti bahwa kf terintegral H^0 .

Karena $\int_a^b k\phi_1 = k \int_a^b \phi_1$ akibatnya

$$(H^0) \int_a^b kf = (H^0) k \int_a^b f$$

b. Diberikan sebarang bilangan $\varepsilon > 0$, karena $f(x)$ terintegral H^0 pada $[a, b]$, misalkan $I_1 = (H^0) \int f dx$ akibatnya untuk bilangan ε yang diberikan, terdapat fungsi $\delta_1 > 0$ sedemikian sehingga jika $P_1 = \{[x_{i-1}, x_i], \xi_i | i = 1, 2, 3, \dots, n\}$ adalah partisi Perron δ -fine pada $[a, b]$ maka terdapat fungsi sederhana ϕ_1 atas P_1 pada $[a, b]$ dengan $f \diamond \phi_1$ dan

$$\left| I_1 - \int_a^b \phi_1 \right| < \varepsilon.$$

Karena $g(x)$ terintegral H^0 pada $[a, b]$, misalkan $(H^0) \int_a^b g(x) dx = I_2$ akibatnya

untuk bilangan ε yang diberikan terdapat fungsi $\delta_2 > 0$ sedemikian sehingga jika $P_2 = \{[y_{k-1}, y_k], \xi_k | k = 1, 2, 3, \dots, m\}$ partisi Perron δ -fine pada $[a, b]$ maka terdapat fungsi sederhana ϕ_2 atas P_2 dengan $g \diamond \phi_2$ dan $\left| I_2 - \int_a^b \phi_2 \right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Dibentuk fungsi positif $\delta^* = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, selanjutnya dibentuk pula $P^* = P_1 \cap P_2$ partisi Perron δ -fine pada $[a, b]$.

Lalu dibentuk $\phi^* = \phi_1 + \phi_2$ fungsi sederhana δ^* atas P^* . Oleh karena $f \diamond \phi_1$ dan $g \diamond \phi_2$ akibatnya $|f(\xi) + g(\xi) - \phi_1(\xi) - \phi_2(\xi)| \leq |f(\xi) - \phi_1(\xi)| + |g(\xi) - \phi_2(\xi)| = \varepsilon + \varepsilon$

Dari sini diperoleh $f + g$ berelasi dengan $\phi_1 + \phi_2$.

Selanjutnya

$$\begin{aligned} \left| (I_1 + I_2) - \int_a^b \phi^* \right| \\ &= \left| (I_1 + I_2) - \int_a^b (\phi_1 + \phi_2) \right| \\ &= \left| I_1 + I_2 - \int_a^b \phi_1 - \int_a^b \phi_2 \right| \\ &\leq \left| I_1 - \int_a^b \phi_1 \right| + \left| I_2 - \int_a^b \phi_2 \right| \end{aligned}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Diperoleh

$$\begin{aligned} \int (f + g)(x) dx &= I_1 + I_2 \\ &= (H^0) \int f(x) dx + (H^0) \int g(x) dx \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 2.10 Jika fungsi $f \in H^0([a, b])$ dan $f \in H^0([b, c])$, maka $f \in H^0([a, b])$ dan dapat ditulis $(H^0) \int_a^c f = (H^0) \int_a^b f + (H^0) \int_b^c f$.

Bukti :

Diberikan sebarang bilangan $\varepsilon > 0$, karena $f(x)$ terintegral H^0 pada $[a, b]$ maka terdapat $I_1 \in \mathfrak{R}$ dan untuk sebarang ε yang diberikan terdapat fungsi $\delta_1 > 0$ sehingga jika $P_1 = \{([x_0, x_1], \xi_1) \dots ([x_{k-1}, x_k], \xi_k)\}$ adalah partisi Perron δ_1 -fine pada $[a, b]$ dengan $x_0 = a$ maka terdapat $\phi_1 = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{E_i}$ yang merupakan fungsi sederhana δ_1 atas P_1 pada $[a, b]$ dengan f berelasi dengan ϕ_1 dan $\left| I_1 - \int_a^b \phi_1 \right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Karena $f(x)$ terintegral H^0 pada $[b, c]$ maka terdapat $I_2 \in \mathfrak{R}$ dan untuk sebarang ε yang diberikan terdapat fungsi $\delta_2 > 0$ sedemikian sehingga jika

$P_2 = \{([y_0, y_1], \xi_1) \dots ([y_{n-1}, y_n], \xi_n)\}$ adalah partisi Perron δ_2 -fine pada $[b, c]$ dengan $y_0 = b, y_n = c$ maka terdapat $\phi_2 = \sum_{j=1}^n c_j \chi_{F_j}$ fungsi sederhana δ_2 atas P_2 pada $[b, c]$ dengan g berelasi dengan ϕ_2 dan $\left| I_2 - \int_b^c \phi_2 \right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Diambil fungsi positif

$$\delta^* = \begin{cases} \delta_1(x) & x \in [a, b] \\ \delta_2(x) & x \in [b, c] \end{cases}$$

Selanjutnya dibentuk $P^* = P_1 \cup P_2 = \{([x_0, x_1], \xi_1) \dots ([x_k, x_{k+1}], \xi_k), \dots, ([x_{k+n-1}, x_{k+n}], \xi_{k+n})\}$ partisi Perron δ -fine pada $[a, b] \cup [b, c]$, dengan $x_k = b$,

$$x_{k+1} = y_i,$$

$$\xi_{k+1} = \xi_i \text{ untuk } i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Dari partisi ini dapat dibentuk fungsi sederhana δ

$$\phi^* = \sum_{i=1}^k c_i \chi_{E_i} + \sum_{j=k+1}^n c_j \chi_{F_j}$$

atas P^* dengan $E_i = [x_{i-1}, x_i]$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, k$, $E_k = [x_{k-1}, x_k]$ dengan $x_k = b$, $F_j = [x_{j-1}, x_j]$ untuk $j=k+1, k+2, \dots, n-1$, dan $E_n = [x_{n-1}, x_n]$ dengan $x_{k+n} = c$, di mana f berelasi dengan ϕ^* .

Selanjutnya diperoleh

$$\begin{aligned} & \left| I_1 + I_2 - \int_a^b \phi^* \right| \\ &= \left| I_1 + I_2 - \sum_{i=1}^n c_i(x_i - x_{i-1}) \right| \\ &= \left| I_1 + I_2 - \sum_{i=1}^k c_i(x_i - x_{i-1}) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=k+1}^n c_i(x_i - x_{i-1}) \right| + \\ &\leq \left| I_1 - \sum_{i=1}^k c_i(x_i - x_{i-1}) \right| + \\ &\quad \left| I_2 - \sum_{i=k+1}^n c_i(x_i - x_{i-1}) \right| \\ &= \left| I_1 - \int_a^b \phi_1 \right| + \left| I_2 - \int_b^c \phi_2 \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Selanjutnya

$$\begin{aligned} (H^0) \int_a^c f(x) dx &= I_1 + I_2 = (H^0) \int_a^b f + \\ (H^0) \int_b^c f \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 2.11 (Kriteria Cauchy)

Suatu fungsi $f \in H^0([a, b])$ jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif δ sehingga jika $P_1 = \{[x_{i-1}, x_i], \xi_i | i = 1, 2, 3, \dots, n\}$ dan $P_2 = \{[y_{j-1}, y_j], \xi_j | j = 1, 2, 3, \dots, n\}$ adalah partisi - partisi Perron δ - fine pada $[a, b]$ maka terdapat $\phi_1 = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{E_i}$ yang merupakan fungsi sederhana $-\delta$ atas P_1 pada $[a, b]$ dimana f berelasi dengan ϕ_1 dan $\phi_2 = \sum_{j=1}^n c_j \chi_{F_j}$ adalah fungsi sederhana $-\delta$ atas P_2 pada $[a, b]$ dengan f berelasi dengan ϕ_2 dan memenuhi $\left| \int_a^b \phi_1 - \int_a^b \phi_2 \right| < \varepsilon$.

Bukti :

\Rightarrow Diberikan sebarang bilangan $\varepsilon > 0$, karena $f(x)$ terintegral H^0 maka terdapat bilangan $I \in \mathfrak{R}$ dan untuk ε yang diberikan terdapat fungsi $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika sedemikian sehingga jika $P_1 = \{[x_{i-1}, x_i], \xi_i | i = 1, 2, 3, \dots, k\}$ partisi Perron δ - fine pada $[a, b]$ maka terdapat fungsi sederhana $-\delta$ ϕ_1 atas P_1 pada $[a, b]$ dengan f berelasi dengan ϕ_1 dan

$\left| I_1 - \int_a^b \phi_1 \right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Selanjutnya jika $P_2 = \{[y_{k-1}, x_k], \xi_k | k = 1, 2, 3, \dots, n\}$ adalah partisi Perron δ - fine pada $[a, b]$ maka terdapat fungsi sederhana $-\delta$ ϕ_2 atas P_2

pada $[a, b]$ dengan f berelasi dengan ϕ_2 dan $\left| I_2 - \int_a^b \phi_2 \right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{Dari sini diperoleh } \left| \int_a^b \phi_1 - \int_a^b \phi_2 \right| &= \\ \left| \int_a^b \phi_1 - I + I - \int_a^b \phi_2 \right| &= \\ \leq \left| \int_a^b \phi_1 - I \right| + \left| I_2 - \int_a^b \phi_2 \right| & \\ < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

\Leftarrow Diberikan sebarang $\varepsilon > 0$, terdapat fungsi positif $\delta_1 > 0$ pada $[a, b]$. Selanjutnya jika P_1 dan P_2 merupakan partisi Perron δ_1 - fine maka terdapat fungsi sederhana δ_1 ϕ_1 atas P_1 dan fungsi sederhana δ_1 ϕ_1 atas P_1' dengan $\left| \int \phi_1 - \int \phi_1' \right| < \varepsilon$. Selanjutnya diambil fungsi positif δ_2 , dengan $0 < \delta_2 < \delta_1$. Akibatnya, jika P_2 dan P_2' merupakan partisi - partisi Perron δ_2 - fine maka terdapat fungsi sederhana $-\delta_2$ ϕ_2 atas P_2 dan fungsi sederhana δ_2 ϕ_2 atas P_2' dengan $\left| \int \phi_2 - \int \phi_2' \right| < \varepsilon$.

Selanjutnya diambil fungsi positif δ_3 dimana $0 < \delta_3 < \delta_2 < \delta_1$. Akibatnya, jika P_3 dan P_3' merupakan partisi - partisi Perron δ_3 - fine maka terdapat fungsi sederhana $-\delta_3$ ϕ_3 atas P_3 dan fungsi sederhana δ_3 ϕ_3 atas P_3' dengan $\left| \int \phi_3 - \int \phi_3' \right| < \varepsilon$. Proses ini dilakukan terus menerus hingga diperoleh suatu barisan bilangan $A = \{ \int \phi_k | k = 1, 2, 3, \dots \}$. Karena untuk setiap P_k partisi Perron δ - fine maka untuk $i, j = 1, 2, 3, \dots$ berlaku $\left| \int \phi_i - \int \phi_j \right| < \varepsilon$. Dari sini diperoleh A terbatas. Selanjutnya berdasarkan teorema Bolzano Weirstrass A mempunyai titik limit yang dimisalkan I . Dengan kata lain A mempunyai barisan bagian yang konvergen ke I , dimisalkan $\int \phi_N$. Hal ini berarti untuk setiap bilangan ε yang diberikan terdapat bilangan asli N sehingga $\left| \int \phi_N - I \right| < \varepsilon$. Dari sini untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$, terdapat fungsi positif δ_N sedemikian sehingga jika P_N adalah partisi Perron δ_N - fine maka terdapat fungsi sederhana $-\delta_N$ atas P_N dengan f berelasi dengan ϕ_N dan

$$|\int \phi_N - I| < \varepsilon. \blacksquare$$

Teorema 2.12 Jika $f(x)$ fungsi yang terintegral Riemann pada $[a, b]$ maka $f(x)$ terintegral H^0 pada $[a, b]$.

Bukti :

Diberikan sebarang bilangan $\varepsilon > 0$, karena $f(x)$ terintegral Riemann akibatnya terdapat $I \in \mathfrak{R}$ dan untuk ε yang diberikan, terdapat δ^* konstan di mana $\delta^* > 0$ sedemikian sehingga jika p adalah partisi pada $[a, b]$ di mana $|P| = |x_i - x_{i-1}| < \delta^*$ dan untuk $\xi_i \in [x_i - x_{i-1}]$ maka $|S(p, f) - I| < \varepsilon$,
 Dengan $S(p, f) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$
 Diambil fungsi $\delta = \delta^* > 0$.

Karena $\xi_i \in [x_i - x_{i-1}]$ maka $\xi_i \in [x_i - x_{i-1}] \subset (\xi_i - \delta, \xi_i + \delta)$
 Oleh karena itu partisi Riemann di atas juga merupakan partisi Perron $\delta - fine$.
 Selanjutnya dengan mengambil $c_i = f(\xi_i)$, dibentuk fungsi sederhana $-\delta$ atas P yaitu :

$$\phi = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{E_i} = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \chi_{E_i}$$

karena

$$|f(\xi) - \phi(\xi)| = \left| f(\xi) - \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \chi_{E_i} \right| = 0 < \varepsilon.$$

Akibatnya f berelasi dengan ϕ ,

Dari sini diperoleh $\int_a^b \phi = S(p, f)$

$$\text{Selanjutnya } \left| \int_a^b \phi dx - I \right| = |S(p, f) - I| < \varepsilon. \blacksquare$$

3. PENUTUP

Berdasarkan pembahasan diperoleh kesimpulan bahwa Partisi Perron $-\delta fine$ dapat digunakan untuk membentuk fungsi sederhana $-\delta$ yang digunakan untuk membentuk integral baru yang disebut H^0 dan eksistensi dari nilai integral H^0 dijamin oleh sifat ketunggalan dan sifat $-\delta$ sifat linier yang berlaku di dalamnya.

4. DAFTAR PUSTAKA

- [1] Lee P.Y. (1989), *Lanzhou Lectures on Henstock Integration*, World Scientific, Singapore.
- [2] Indrati, Ch.R., Surodjo, Budi. (2000), *Aplikasi Integral Henstock-Kurzweil pada Medan Vektor*, Lembaga Penelitian UGM, Yogyakarta.
- [3] Gordon, R.A. (1994), *The Integral of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*, Mathematical Society, USA.
- [4] Lee P.Y. & Vyborny, R. (2000), *Integral: An Easy Approach after Kurzweil and Henstock*, Cambridge University Press, Cambridge
- [5] Sumanto, Y.D. (2002), *Jenis - jenis integral Henstock - Bochner pada ruang Eucild \mathfrak{R}^n* , Tesis, Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta.