NEUTROSOFIK LIMIT DAN PENGHITUNGANNYA

Suryoto
Departemen Matematika Fakultas Sains dan Matematika Universitas Diponegoro
Jl. Prof. H. Soedarto, SH, Tembalang, Semarang 50275
suryoto_math@undip.ac.id

Abstract. Neutrosophic limit means the limit of a neutrosophic function. This article discusses the neutrosophic limit and the algebraic aspects related, including neutrosophic function, neutrosophic mereo-limit, neutrosophic limit and it's calculation. The rules and the calculation method of neutrosophic limit similar to the rules and the method for calculating the classical limit, only the role of independent variables in the classical limit is taken over by a closed interval which is a subset of the set of real numbers.

Keywords : neutrosophic function, neutrosophic mereo-limit, neutrosophic limit.

1. PENDAHULUAN

Neutrosofik limit adalah perluasan dari limit klasik, limit ini merupakan limit dari neutrosofik fungsi. Neutrosifik limit ini telah diperkenalkan oleh Smarandache [1] pada tahun 2015. Jadi konsep limit ini relatif masih baru dalam khasanah ilmu matematika, khususnya di bidang kalkulus. Untuk membahas neutrosofik limit, perlu diperkenalkan suatu unsur neutrosofik yang dinamakan indeterminasi yang dapat diartikan sebagai suatu ketidak-pastian. Pada [2], [3], dan [4] telah diperkenalkan unsur neutrosofik sebagai suatu unsur yang bersifat idempoten terhadap operasi perkalian dan dikenal dengan istilah indeterminate atau indeterminasi. Unsur ini memegang peranan penting dalam pembahasan yang berkaitan dengan konsep ke-neutrosofik-an secara umum. Pada makalah ini unsur neutrosofik sebagai suatu indeterminasi dinotasikan dengan I.

Pada makalah ini dibahas tentang neutrosofik limit dan aspek aljabar yang terkait, terutama yang berkaitan dengan definisi dasar neutrosofik limit, analasis limit dengan definisi $\varepsilon - \delta$ dan penghitungan neutrosofik limitnya.

2. HASIL DAN PEMBAHASAN

2.1.Neutrosofik Fungsi

Sebagai awal pembahasan berikut ini diberikan pengertian neutrosofik fungsi. Namun sebelumnya diberikan lebih dahulu beberapa definisi dasar sebagai berikut

Definisi 2.1[1] *Suatu neutrosofik relasi himpunan bagian r antara dua himpunan A dan B adalah himpunan semua pasangan terurut (S_A, S_B), dengan S_A himpunan bagian dari A dan S_B himpunan bagian dari B, dengan suatu indeterminate*

Di dalam suatu neutrosofik relasi r selain memuat pasangan terurut (S_A, S_B) dengan derajat keanggotaan 1, ada kemungkinan juga memuat pasangan terurut (S_C, S_D), dengan S_C himpunan bagian dari A dan S_D himpunan bagian dari B, yang mungkin menjadi anggota r tetapi tidak diketahui berapa derajat keanggotaannya atau menjadi anggota tidak sepenuhnya dengan nilai neutrosofik (T, I, F), dimana $T < 1$ adalah derajat keanggotaan di dalam r, I menyatakan derajat keanggotaan dari indeterminate, dan F menyatakan bukan anggota dari r.

Contoh 2.2 Diberikan relasi $r : \{1, 3, 5\} \to \{0, 2, 4, 6\}$ dengan

$$r = \begin{Bmatrix} (\{1\}, \{0, 2\}), (\{3,5\}, \{4, 6\}) \\ (\{1, 3\}, \{4\})_{(0.7,0.1,0.1)}, (\{5\}, \{2, 4\})_{?} \end{Bmatrix}$$

maka dari relasi ini dapat dilihat bahwa $(\{1\}, \{0, 2\})$ dan $(\{1\}, \{0, 2\})$ adalah anggota tegas dari r, sedangkan $(\{1, 3\}, \{4\})$ menjadi anggota sebagian di dalam r, yaitu 70% menjadi anggota, 10%

keanggotaan indeterminate, dan 10% bukan anggota r, dan $(\{5\},\{2,4\})$ ada kemungkinan menjadi anggota r, tetapi tidak diketahui berapa derajat keanggotaannya di dalam r.

Definisi 2.3 [1] *Suatu neutrosofik fungsi himpunan bagian $f : P(A) \to P(B)$ adalah suatu neutrosofik relasi himpunan bagian sedemikian hingga jika terdapat himpunan bagian S dari A dengan $f(S) = T_1$ dan $f(S) = T_2$, maka $T_1 \equiv T_2$.*

Sebagai bentuk/kejadian khusus dari suatu neutrosofik relasi, suatu neutrosofik relasi tegas antara dua himpunan A dan B adalah relasi klasik (relasi tegas) yang mempunyai beberapa indeterminate. Suatu neutrosofik relasi tegas dapat memuat pasangan terurut klasik yang pasti (a,b), dengan $a \in A$ dan $b \in B$ dan pasangan terurut potensial (c,d), dengan $c \in A$ dan $d \in B$, yang tidak ada kepastian apakah ada atau tidaknya relasi antara c dan d, akan tetapi jika ada relasi antara c dan d, maka prosentasenya senantiasa lebih kecil dari 100%.

Contoh 2.4 Diberikan neutrosofik relasi $r: \{1,2,3\} \to \{4,5,6,7\}$ yang didefinisikan sebagai dengan

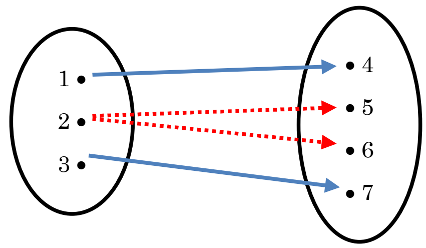
$$r = \begin{Bmatrix} (1,4),(2,5),(3,6)_{[0.6,0.2,0.1]}, \\ (3,7)_?,(2,7)_? \end{Bmatrix}$$

maka dapat dilihat bahwa pasangan terurut $(1,4),(2,5)$ adalah anggota tegas atau anggota pasti dari r (100% anggota r), sedangkan pasangan terurut $(3,6)$ hanya 60% menjadi anggota r, 20% keanggotaan indeterminate, dan 10% bukan anggota r, dan pasangan $(2,7)$ serta $(3,7)$ tidak diketahui berapak derajat keanggotaannya di dalam r.

Definisi 2.5 [1] *Suatu neutrosofik fungsi tegas $f: A \to B$ adalah neutrosofik relasi tegas sedemikian hingga jika terdapat anggota $a \in A$ dengan $f(a) = b$ dan $f(a) = c$, dengan $b, c \in B$ maka $b \equiv c$.*

Dalam hal ini, neutrosofik fungsi secara umum tidak lain adalah neutrosofik relasi. Berikut ini akan diberikan beberapa contoh neutrosofik fungsi.

Contoh 2.6 Ditinjau fungsi $f: \{1,2,3\} \to \{4,5,6,7\}$ yang didefinisikan dengan $f(1) = 4$, $f(2) = 5$ atau $f(2) = 6$, dan $f(3) = 7$, atau secara diagram dipunyai



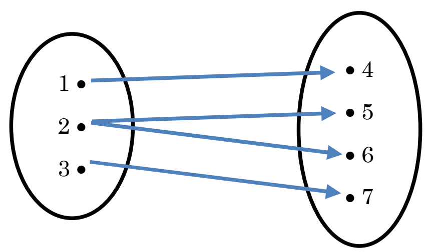
Gambar 2.1 Diagram Penyajian

Garis putus-putus menyatakan bahwa tidak adanya kepastian apakah 2 berelasi dengan 5 ataukah 2 berelasi dengan 6.

Dalam bentuk himpunan pasangan terurut, fungsi f tersebut dituliskan sebagai

$$f = \left\{(1,4), \boxed{(2,5)}_?, \boxed{(2,6)}_?, (3,7)\right\}$$

Contoh 2.7 Ditinjau fungsi $g: \{1,2,3\} \to \{4,5,6,7\}$ yang didefinisikan dengan $g(1) = 4$, tetapi $g(2) = 5$ dan $f(2) = 6$ serta $f(3) = 7$, atau secara diagram dipunyai



Gambar 2.2 Diagram Penyajian

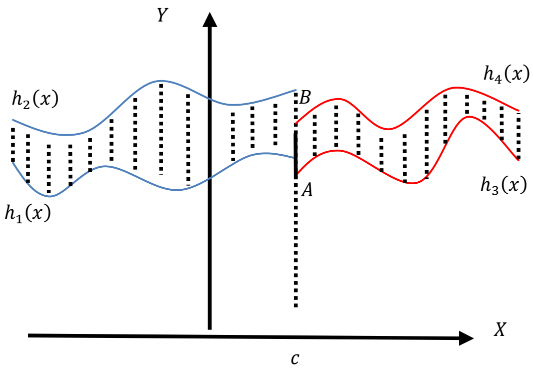
Dalam bentuk himpunan diperoleh

$$g = \{(1,4),(2,5),(2,6),(2,7)\}.$$

Contoh 2.8 Ditinjau suatu neutrosofik fungsi sepotong-sepotong $h : \mathrm{R} \to P(\mathrm{R})$ dengan

$$h(x) = \begin{cases} [h_1(x), h_2(x)], \text{untuk } x < c \\ [h_3(x), h_4(x)], \text{untuk } x \geq c \end{cases}$$

dalam bentuk neutrosofik grafiknya sebagai berikut :

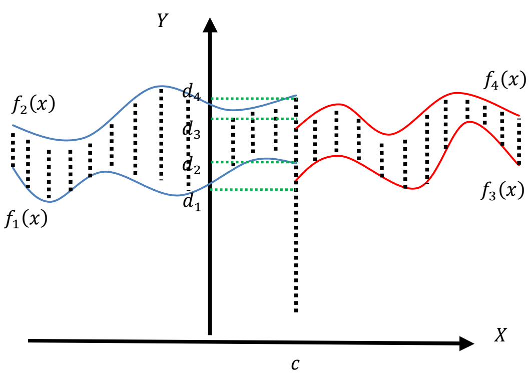


Gambar 2.3 Grafik neutrosofik fungsi h

Dari neutrosofik fungsi tersebut diperoleh $h(c) = [h_3(c), h_4(c)]$ yang merupakan sebuah segmen garis vertikal $\overline{AB}$.

2.2.Neutrosofik Limit Fungsi

Neutrosofik limit fungsi yang dimaksud pada pembahasan ini adalah limit dari suatu neutrosofik fungsi. Sebagai awal pembahasan ditinjau grafik dari neutrosofik fungsi $f : \mathrm{R} \to P(\mathrm{R})$ berikut.



Gambar 2.4 Grafik neutrosofik fungsi f

dengan neutrosofik fungsi f-nya adalah

$$f(x) = \begin{cases} [f_1(x), f_2(x)], \text{untuk } x \le c \\ [f_3(x), f_4(x)], \text{untuk } x > c \end{cases}$$

yang merupakan fungsi sepotong-sepotong.

Dengan menggunakan metode neutrosofik grafik diperoleh neutrosofik limit kiri

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = [d_2, d_4]$$

dan neutrosofik limit kanannya

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = [d_1, d_3]$$

Terkait dengan dua neutrosofik limit sepihak tersebut, berikut ini diberikan definisi tentang neutrosofik mereo-limit suatu fungsi yang dikarakterisasi oleh irisan kedua neutrosofik limit tersebut yang bukan merupakan himpunan kosong.

Definisi 2.9 [1] *Diberikan neutrosofik fungsi $f(x)$. Neutrosofik mereo-limit dari $f(x)$ didefinisikan sebagai irisan dari neutrosofik limit kiri dan neutrosofik limit kanan, bilamana irisan tersebut bukan merupakan himpunan kosong, sedangkan jika irisan kedua neutrosofik limit tersebut merupakan himpunan kosong, maka dikatakan neutrosofik mereo-limit dari $f(x)$ tidak ada. Selanjutnya neutrosofik limit dari $f(x)$ ada jika neutrosofik limit kiri dan neutrosofik limit kanannya ada dan sama, jika tidak demikian, maka dikatakan neutrosofik limit dari $f(x)$ tidak ada.*

Berikut ini diberikan contoh neutrosofik mereo-limit dari suatu neutrosofik fungsi.

Contoh 2.10 Dari fungsi f pada Bagian 2.2, diperoleh

$\lim_{x \to c} f(x) = [d_2, d_4] \cap [d_1, d_3] = [d_1, d_3] \neq \emptyset$

jadi neutrosofik mereo-limit dari f ada, akan tetapi karena

$\lim_{x \to c^-} f(x) = [d_2, d_4] \neq [d_1, d_3] = \lim_{x \to c^+} f(x)$

maka f tidak mempunyai neutrosofik limit, atau dengan kata lain, neutrosofik limit dari f tidak ada.

2.3.Definisi $\varepsilon - \delta$ untuk Neutrosofik Limit

Sebelum membahas definisi $\varepsilon - \delta$ untuk neutrosofik limit dari suatu fungsi, diberikan terlebih dulu pengertian norm di dalam pembahasan teori limit.

Ditinjau fungsi $\mu : P(\mathrm{R}) \to \mathrm{R}^+$ dengan R menyatakan himpunan semua bilangan real dan $P(\mathrm{R})$ menyatakan himpunan kuasa dari himpunan R. Untuk sebarang himpunan $S \in P(\mathrm{R})$, didefinisikan

$$\mu(S) = \{|x| : x \in S \cup Fr(S)\}$$

dengan $|x|$ menyatakan nilai mutlak dari x dan $Fr(S)$ merupakan himpunan batas-batas dari S, dengan demikian

$$\mu(S) = \text{maks}\,\{|\inf(S)|, |\sup(S)|\}.$$

Definisi $\varepsilon - \delta$ untuk Neutrosofik Limit Kiri dan Limit Kanan

Misalkan $f : P(\mathrm{R}) \to P(\mathrm{R})$ suatu neutrosofik fungsi. Definisi $\varepsilon - \delta$ dari neutrosofik limit kiri merupakan perluasan dari definisi limit kiri klasik, dimana peran nilai mutlak $|\cdot|$ digantikan dengan notasi $\eta(\cdot)$, demikian pula peran skalar digantikan dengan himpunan atau dengan kata lain himpunan dapat dipandang sebagai pendekatan dari skalar. Dengan demikian dipunyai definisi berikut ini.

Definisi 2.11 *Suatu neutrosofik fungsi $f(x)$ dikatakan mempunyai limit kiri L di $x = c$, dituliskan*

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = L$$

jika untuk sebarang $\epsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga jika $\eta(x,c)_{c^-} < \delta$ maka $\eta(f(x), L)_{c^-} < \varepsilon$.

Sementara itu untuk neutrosofik limit kanannya dapat didefinisikan dengan cara serupa, seperti diberikan oleh definisi berikut.

Definisi 2.12 *Suatu neutrosofik fungsi $f(x)$ dikatakan mempunyai limit kanan L di $x = c$, dituliskan*

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = L$$

jika untuk sebarang $\epsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga jika $\eta(x,c)_{c^+} < \delta$ maka $\eta(f(x), L)_{c^+} < \varepsilon$.

Selanjutnya, untuk definisi umum neutosofik limit diberikan oleh definisi berikut.

Definisi 2.13 *Suatu neutrosofik fungsi $f(x)$ dikatakan mempunyai limit L di $x = c$, dituliskan*

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

jika untuk sebarang $\epsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga jika $\eta(x,c) < \delta$ maka $\eta(f(x), L) < \varepsilon$.

Berikut diberikan contoh terkait dengan definisi $\varepsilon - \delta$ untuk neutrosofik limit fungsi.

Contoh 2.14 Dari fungsi f pada bagian 2.2, jika diambil $c = 3$, serta diberikan sebarang $\varepsilon > 0$, maka

$$\eta([f_1(x), f_2(x)], [d_2, d_4]) = \underset{\substack{\eta(x,3)<\delta \\ x<3}}{\text{maks}} \{|\inf\,[f_1(x), f_2(x)] - \inf\,[d_2, d_4]|, |\sup\,[f_1(x), f_2(x)] - \sup\,[d_2, d_4]|\}$$

$$= \underset{\substack{\eta(x,3)<\delta \\ x<3}}{\text{maks}} \{|f_1(x) - d_2|, |f_2(x) - d_4|\} < \varepsilon.$$

Sementara itu $\eta(x,3) < \delta$ dapat diartikan sebagai $|x - 3| < \delta$, sebagaimana dalam kalkulus klasik. Selanjutnya

$$\underset{\substack{\eta(x,3)<\delta \\ x<3}}{\text{maks}} \{|f_1(x) - d_2|, |f_2(x) - d_4|\} < \varepsilon$$

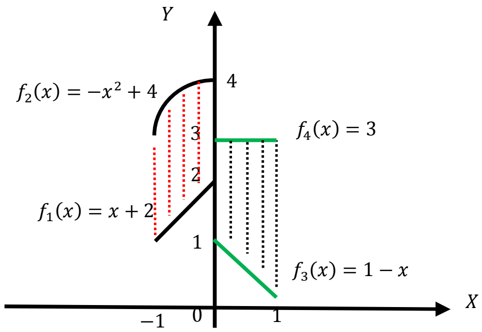
diartikan sebagai $|f_1(x) - d_2| < \varepsilon$ dan $|f_2(x) - d_4| < \varepsilon$, jika $|x - 3| < \delta$ dan $x \leq 3$.

Selanjutnya diberikan contoh analisis $\varepsilon - \delta$ untuk neutrosofik limit kiri dan limit kanan dari suatu neutrosofik fungsi.

Contoh 2.15 Pandang neutrosofik fungsi $f : \mathrm{R} \to P(\mathrm{R})$ yang didefinisikan dengan

$$f(x) = \begin{cases} [f_1(x), f_2(x)], \text{untuk } x \leq 0 \\ [f_3(x), f_4(x)], \text{untuk } x > 0 \end{cases}$$

dimana $f_1(x) = x + 2$, untuk $x \in [-1, 0]$; $f_2(x) = -x^2 + 4$, untuk $x \in [-1, 0]$; $f_3(x) = 1 - x$, untuk $x \in [0, 1]$; dan $f_4(x) = 3$, untuk $x \in [0, 1]$. Grafik dari fungsi neutrosofik f adalah :



Gambar 2.5 Grafik neutrosofik fungsi f

Diambil sebarang $\varepsilon > 0$, dari fungsi sepotong-sepotong $f_1(x)$ dan $f_2(x)$ diperoleh $|f_1(x) - 2| = |(x + 2) - 2| = |x| < \varepsilon$, bilamana $|x - 0| = |x| < \delta$ Dengan demikian dapat dipilih $\delta = \varepsilon$. Selanjutnya

$$\begin{aligned} |f_2(x) - 4| &= |(-x^2 + 4) - 4| = |-x^2| \\ &= |x^2| < \varepsilon, \end{aligned}$$

jika $|x| < \delta$, sehingga dapat dipilih $\delta = \sqrt{\varepsilon}$.
Jadi untuk sebarang $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta = \min\{\varepsilon, \sqrt{\varepsilon}\} = \varepsilon$ (karena $0 < \varepsilon < 1$), yang memperlihatkan bahwa neutrosofik limit kirinya ada. Dengan cara serupa, jika diambil sebarang $\varepsilon > 0$, untuk neutrosofik limit kanannya diperoleh :

$$\begin{aligned} &\eta([f_3(x), f_4(x)], [1,3]) \\ &= \underset{\substack{\eta(x,0) < \delta \\ x > 0}}{\text{maks}} \{|\inf\,[f_3(x), f_4(x)] - \inf\,[1,3]|, |\sup\,[f_3(x), f_4(x)] - \sup\,[1,3]|\} \\ &= \underset{\substack{\eta(x,0) < \delta \\ x > 0}}{\text{maks}} \{|f_3(x) - 1|, |f_4(x) - 3|\} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

yang berarti bahwa $|f_3(x) - 1| < \varepsilon$ dan $|f_4(x) - 3| < \varepsilon$, bilamana $|x - 0| = |x| < \delta$ dan $x > 0$. Dengan demikian

$$\begin{aligned} |f_3(x) - 1| &= |(1 - x) - 1| = |-x| = |x| \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

sehingga dapat dipilih $\delta = \varepsilon$ dan

$$|f_4(x) - 3| = |3 - 3| = 0 < \varepsilon$$

yang senantiasa benar untuk setiap $\varepsilon > 0$. Jadi dalam hal ini dapat diambil $\delta = \varepsilon$ dan benar bahwa neutrosofik limit kanannya juga ada.
Selanjutnya akan diiriskan neutrosofik limit kiri dan neutrosofik limit kanan tersebut untuk mendapatkan neutrosofik mereo-limitnya. Terlihat bahwa neutrosofik mereo-limit dari fungsi $f(x)$ tidak ada, karena jika diambil $\varepsilon = 0.1 > 0$ tidak ada $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sedemikian hingga jika $|x| < \delta$ diperoleh

$$\eta([f_1(x), f_2(x)], [2,3]) < 0.1$$

dan $\eta([f_3(x), f_4(x)], [2,3]) < 0.1$, karena pada persekitaran titik 0 nilai mutlak dari $|f_3(x) - 2|$ lebih besar dari 1.

2.4. Penghitungan Neutrosofik Limit

Pada bagian ini akan dihitung (ditentukan) neutrosofik limit suatu fungsi dengan memanfaatkan perhitungan limit klasik.

Contoh 2.9
Ditinjau neutrosofik limit berikut :

$$\lim_{x \to -2} \frac{x + 2x - [1,3]x - [2,6]}{x + 2}$$

Dengan mensubstitusikan $x = -2$ ke limit tersebut diperoleh

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to -2} \frac{x^2 + 2x - [1,3]x - [2,6]}{x + 2} \\ &= \frac{(-2)^2 + 2 \cdot (-2) - [1,3] \cdot (-2) - [2,6]}{-2 + 2} \\ &= \frac{4 - 4 - [1 \cdot (-2), 3 \cdot (-2)] - [2,6]}{0} \\ &= \frac{0 - [-6,-2] - [2,6]}{0} \\ &= \frac{[2,6] - [2,6]}{0} \\ &= \frac{[2 - 6, 6 - 2]}{0} = \frac{[-4,4]}{0} \end{aligned}$$

yang menghasilkan bentuk tak tentu $\frac{0}{0}$, karena $0 \in [-4,4]$.
Selanjutnya dengan cara memfaktorkan suku pada pembilang diperoleh

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to -2} \frac{x^2 + 2x - [1,3]x - [2,6]}{x + 2} \\ &= \lim_{x \to -2} \frac{(x - [1,3]) \cdot (x + 2)}{x + 2} \\ &= \lim_{x \to -2} (x - [1,3]) \end{aligned}$$

$$= -2 - [1,3] = [-2,-2] - [1,3]$$
$$= -([2,2] + [1,3]) = [-5,-3].$$

Hasil penghitungan limit ini dapat dibuktikan kebenarannya (dibandingkan) dengan penghitungan limit secara klasik, yaitu dengan cara menggantikan peranan koefisien bernilai interval dengan koefisien biasa berupa bilangan.

Selanjutnya akan diberikan contoh penghitungan neutrosofik limit yang memuat bentuk tak rasional.

Contoh 2. 10 Ditinjau limit neutrosofik

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{[2,5]x+1}-1}{x}$$

Dengan mensubsitusikan nilai $x = 0$ ke limit tersebut diperoleh

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{[2,5]x+1}-1}{x} = \frac{\sqrt{[2,5]\cdot 0+1}-1}{0}$$
$$= \frac{\sqrt{[2\cdot 0, 5\cdot 0]+1}-1}{0}$$
$$= \frac{\sqrt{[0,0]+1}-1}{0}$$
$$= \frac{\sqrt{0+1}-1}{0} = \frac{0}{0}$$

suatu bentuk tak tentu.

Dengan mengalikan faktor sekawan dari pembilangnya, limit tersebut menjadi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{[2,5]x+1}-1}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{[2,5]x+1}-1}{x} \cdot \frac{\sqrt{[2,5]x+1}+1}{\sqrt{[2,5]x+1}+1}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{[2,5]x+1}\right)^2 - (1)^2}{x\left(\sqrt{[2,5]x+1}+1\right)}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{[2,5]x+1-1}{x\left(\sqrt{[2,5]x+1}+1\right)}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{[2,5]x}{x\left(\sqrt{[2,5]x+1}+1\right)}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{[2,5]}{\sqrt{[2,5]x+1}+1}$$
$$= \frac{[2,5]}{\sqrt{[2,5]\cdot 0+1}+1}$$
$$= \frac{[2,5]}{\sqrt{1}+1} = \frac{[2,5]}{2} = \left[\frac{2}{2}, \frac{5}{2}\right] = \left[1, 2\frac{1}{2}\right].$$

Dengan cara serupa hasil penghitungan limit ini dapat dibuktikan kebenarannya melalui penghitungan limit klasiknya, dengan cara mengambil parameter $\alpha \in [2,5]$ dan menghitung limitnya dengan mengalikan faktor sekawan dari pembilang diperoleh

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\alpha x+1}-1}{x} = \frac{\alpha}{2} \in \frac{[2,5]}{2} = \left[1, 2\frac{1}{2}\right].$$

Berikut ini diberikan contoh penghitungan neutrosofik limit dengan jenis yang lain.

Contoh 2.11 Diberikan neutrosofik fungsi

$$f(x) = \frac{x^2 + (1-I)x}{2x+3-4I},$$

maka diperoleh

$$\lim_{x\to 1+2I} f(x) = \lim_{x\to 1+2I} \frac{x^2 + (1-I)x}{2x+3-4I}$$
$$= \frac{(1+2I)^2 + (1-I)(1+2I)}{2(1+2I)+3-4I}$$
$$= \frac{1+4I+4I^2+1-I+2I-2I^2}{2+4I+3-4I}$$
$$= \frac{2+5I+2I^2}{5} = \frac{2+5I+I}{5}$$
$$= \frac{2+7I}{5} = \frac{2}{5} + \frac{7}{5}I,$$

dengan I indeterminasi dan bersifat $0 \cdot I = 0$ dan $I^2 = I$.

2.5.Sifat-sifat Neutrosofik Limit

Serupa dengan konsep limit klasik seperti pada [5], sifat-sifat utama yang berlaku pada limit juga dipenuhi oleh neutrosofik limit, seperti diberikan teorema berikut.

Teorema 2.12 *Misalkan n suatu bilangan asli, k suatu konstanta dan $f(x)$ serta $g(x)$ neutrosofik fungsi yang mempunyai limit di c, maka berlaku*

a. $\lim_{x\to c} k = k = [k,k]$
b. $\lim_{x\to c} kf(x) = k \lim_{x\to c} f(x)$
c. $\lim_{x\to c} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) \pm \lim_{x\to c} g(x)$
d. $\lim_{x\to c} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x)$

$e.\ \lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to c} f(x)}{\lim\limits_{x\to c} g(x)}$, asalkan $\lim\limits_{x\to x} g(x) \neq 0$.

$f.\ \lim\limits_{x\to c}[f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x\to c} f(x)\right]^n$

$g.\ \lim\limits_{x\to c}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to c} f(x)}$, asalkan $\lim\limits_{x\to x} f(x) > 0$.

Bukti : Untuk pembuktian sifat-sifat pada teorema ini serupa dengan pembuktian sifat-sifat utama dari limit klasik. Berikut ini akan diberikan beberapa bukti dari teorema tersebut.

a. Diberikan sebarang $\varepsilon > 0$, maka terdapat $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sedemikian hingga jika $\eta(x, c) < \delta$ maka $\eta(f(x), k) < \varepsilon$ atau $\eta(k, k) < \varepsilon$. Karena $\eta(k, k) = 0$ dan $0 < \varepsilon$, maka definisi terpenuhi.

b. Misalkan $\lim_{x\to c} f(x) = L$ dan diberikan sebarang $\varepsilon > 0$ maka terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga jika $\eta(x, c) < \delta$ maka $\eta(kf(x), kL) < \varepsilon$. Karena $\lim_{x\to x} f(x) = L$ maka untuk sebarang $\frac{\varepsilon}{k} > 0$ terdapat $\delta_1 > 0$ sedemikian hingga jika $\eta(x,c) < \delta_1$ maka $\eta(f(x), L) < \frac{\varepsilon}{k}$. Dengan demikian $\eta(kf(x), kL) = k\eta(f(x), L) < k \cdot \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon$.

c. Bagian (c) hanya dibuktikan untuk
$$\lim_{x\to c}[f(x) + g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)$$
Misalkan $\lim_{x\to c} f(x) = L_1$ dan $\lim_{x\to c} g(x) = L_2$. Diberikan sebarang $\varepsilon > 0$ maka terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga jika $\eta(x,c) < \delta$ maka $\eta(f(x) + g(x), L_1 + L_2) < \varepsilon$. Dengan menggunakan ketidaksamaan segitiga diperoleh
$$\eta(f(x) + g(x), L_1 + L_2) \leq \eta(f(x), L_1) + \eta(g(x), L_2)$$
Karena $\lim_{x\to c} f(x) = L_1$, maka untuk sebarang $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ terdapat $\delta_1 > 0$ sedemikian hingga jika $\eta(x,c) < \delta_1$ maka $\eta(f(x), L_1) < \frac{\varepsilon}{2}$. Selanjutnya karena $\lim_{x\to c} g(x) = L_2$, maka terdapat $\delta_2 > 0$ sedemikian hingga jika $\eta(x,c) < \delta_2$ maka $\eta(g(x), L_2) < \frac{\varepsilon}{2}$. Terakhir dengan mengambil $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, maka diperoleh $\eta(f(x) + g(x), L_1 + L_2) \leq \eta(f(x), L_1) + \eta(g(x), L_2) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Sedangkan untuk
$$\lim_{x\to c}[f(x) - g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x)$$
dapat dibuktikan dengan cara serupa.

d. Misalkan $\lim_{x\to c} f(x) = L_1$ dan $\lim_{x\to c} g(x) = L_2$. Dari ketidaksamaan segitiga diperoleh
$$\begin{aligned}
\eta(f(x) \cdot g(x), L_1L_2) &= \eta(f(x) \cdot g(x) - L_2 f(x) + L_2 fx, L_1 L_2) \\
&\leq \eta\big(f(x)\big)\eta(g(x), L_2) + |L_2|\eta(f(x), L_1) \\
&\leq \eta\big(f(x)\big)\eta(g(x), L_2) + (1 + |L_2|)\eta(f(x), L_1)
\end{aligned}$$
Selanjutnya untuk sebarang $\varepsilon_1 > 0$ terdapat $\delta_1 > 0$ sedemikian hingga jika $\eta(x,c) < \delta_1$ maka $\eta(f(x), L_1) < \varepsilon_1$. Sekali lagi dengan ketidaksamaan segitiga diperoleh $\eta(f(x), L_1) > \eta\big(f(x)\big) - |L_1|$, akibatnya $\eta\big(f(x)\big) - |L_1| < \varepsilon_1$ atau $\eta\big(f(x)\big) < |L_1| + \varepsilon_1$. Dengan mengambil $\varepsilon_1 = 1$, maka $\eta\big(f(x)\big) < |L_1| + 1$. Sementara itu untuk sebarang $\varepsilon_2 > 0$ terdapat $\delta_2 > 0$ sedemikian hingga jika $\eta(x,c) < \delta_2$ maka $\eta(g(x), L_2) < \varepsilon_2$. Dengan mengambil $\varepsilon_2 = \frac{\frac{1}{2}\varepsilon}{1+|L_1|}$ maka diperoleh $\eta(g(x), L_2) < \frac{\frac{1}{2}\varepsilon}{1+|L_1|}$. Untuk sebarang $\varepsilon_3 > 0$ terdapat $\delta_3 > 0$ sedemikian hingga jika $\eta(x,c) < \delta_3$ maka $\eta(f(x), L_1) < \varepsilon_3$. Dengan mengambil $\varepsilon_3 = \frac{\frac{1}{2}\varepsilon}{1+|L_2|}$ maka diperoleh $\eta(f(x), L_1) < \frac{\frac{1}{2}\varepsilon}{1+|L_2|}$. Dengan demikian diperoleh
$$\eta(f(x) \cdot g(x), L_1L_2)$$

$$< (1 + |L_1|)\frac{\frac{1}{2}\varepsilon}{1 + |L_1|}$$
$$+(1 + |L_2|)\frac{\frac{1}{2}\varepsilon}{1+|L_2|}$$
$$= \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

Dengan memilih $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$, maka diperoleh jika $\eta(x, c) < \delta$ maka $\eta(f(x) \cdot g(x), L_1 \cdot L_2) < \varepsilon$.

e. Dibuktikan sejalan dengan pembuktian pada bagian (d).

f. Mengingat
$$[f(x)]^n = \underbrace{f(x) \cdot f(x) \cdot \cdots \cdot f(x)}_{\text{sebanyak } n \text{ faktor}},$$
maka diperoleh
$$\lim_{x \to c}[f(x)]^n$$
$$= \lim_{x \to c}[f(x) \cdot f(x) \cdot \cdots \cdot f(x)]$$
Selanjutnya dengan memanfaatkan hasil pada bagian (d) diperoleh
$$\lim_{x \to c}[f(x)]^n = \lim_{x \to c} f(x) \cdot$$
$$\lim_{x \to c} f(x) \cdot \cdots \cdot \lim_{x \to c} f(x)$$
$$= [\lim_{x \to c} f(x)]^n.$$

g. Dapat dibuktikan sejalan dengan bukti bagian (f). ■

3. PENUTUP

Dari uraian pada bagian sebelumnya diperoleh hubungan antara limit fungsi klasik dan neutrosofik limit fungsi sebagai perumuman dari limit klasik, diantaranya adalah bahwa keduanya mempunyai kemiripan definisi, tetapi dari sifat-sifat yang berlaku pada umumnya tidak selamanya bersesuaian antara kedua limit tersebut. Terutama yang berkaitan dengan pendefinisian neutrosofik fungsi yang dipakai sebagai dasar pembahasan limitnya.

Dari hasil pembahasan sejauh ini diperoleh bahwa sifat-sifat utama yang berlaku pada limit klasik masih berlaku pada neutrosofik limit. Berkaitan dengan penghitungan neutrosofik limit, dengan memanfaatkan metode baku seperti metode analitik dan metode perasionalan, neutrosofik limit fungsi yang mempunyai bentuk tak tentu dapat ditentukan, asalkan limit ini ada.

4. DAFTAR PUSTAKA

[1] Smarandache, Florentin., (2015), "*Neutrosophic Precalculus and Neutrosophic Calculus*, Hexis, Phoenix – Arizona

[2] *Proceedings of The First International Conference on Neutrosophy*, *Neutroshopic Logic*, *Neutroshophic Set*, *Neutroshopic Probability and Statistics*, University of New Mexico, Gallup, 1 – 3 Desember 2001, ISBN : 1–931233–67–5.

[3] Smarandache, Florentin, (2003), *A Unifying Field in Logics : Neutroshopic Logic*. *Neutroshopy*, *Neutroshophic Set*, *Neutroshopic Probability*, American Research Press, Rehoboth, New Mexico.

[4] Smarandache, Florentin, (2014), Neutroshopic Theory and Its Applications, *Collected Papers*, Vol.1.

[5] Varberg, Dale, Purcell & Rigdon, (2006), *Calculus* 9th edition, University Edwardsville – Illinois