APLIKASI PRINSIP KURVA TUTUP

John Maspupu
Pusfat Sainsa LAPAN
Jl. Dr. Djunjunan 133, Bandung 40173

Abstract. In this paper we study the use of the closed graph principle applied to direct sum closed subspace of a Banach Space. We will first discuss the concept of a closed graph described in the form of theorem or principle. The properties of closed linear mapping related to the concept of a closed graph will also be explained in detail in the form of two lemmas. In order to prove the closed graph principle we utiliize an open mapping principle. The objective of this study is to show that each direct sum of a closed subspace will exactly resulted one linear mapping that has a property of bounded projection. Our results show that a uniqueness of bounded projection on Banach Space can always be obtained from direct sum of two closed subspace. Furthermore, open mapping can be generated from premise of a closed graph having certain conditions.

Keywords: Closed graph principle, Open mapping, Direct sum .

1. PENDAHULUAN

Salah satu penggunaan prinsip kurva tutup disini adalah untuk menunjukkan bahwa setiap hasil tambah langsung subruang-subruang tutup dari ruang Banach akan memunculkan tepat satu pemetaan linier yang bersifat proyeksi terbatas di ruang Banach tersebut. Secara eksplisit dapat dikatakan bahwa jika X adalah ruang Banach dan M,N masing-masing subruang tutup dari X dimana $X = M \oplus N$ maka terdapat tepat satu proyeksi terbatas M sepanjang N. Namun demikian permasalahannya adalah bagaimana menunjukkan peranan prinsip kurva tutup, untuk memunculkan tepat satu proyeksi terbatas dari hasil tambah langsung suatu subruang tutup juga bagaimana proses memunculkan pemetaan buka dari prinsip kurva tutup tersebut. Untuk itu semua analisis prosesnya akan dibahas didalam pembuktian teorema kurva tutup dan aplikasinya dapat dicermati dalam proses penerapan kurva tutup.

Berikut ini akan didefinisikan beberapa ungkapan yang terkait seperti kurva, pemetaan linier terbatas di ruang bernorm dan pemetaan linier tutup pada suatu ruang Banach. Definisi 1.1 dan Definisi 1.2 mengacu pada [1], sedangkan Definisi 1.3 dapat dilihat di [5].

Definisi 1.1. Misalkan X dan Y suatu ruang bernorm, $T : M \longrightarrow Y$ adalah pemetaan linier dengan M subruang dari X. Maka notasi $G(T) = \{(x, T(x)) \mid x \in M\}$ disebut kurva dari T. Selanjutnya norm dari G(T) didefinisikan sebagai berikut : $\|(x,T(x))\| = \|x\| + \|T(x)\|$.

Definisi 1.2. Misalkan X dan Y suatu ruang Banach, $T : M \longrightarrow Y$ adalah pemetaan linier dengan M subruang dari X. T disebut tutup jika barisan $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ di M dengan $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ dan $\lim_{n\to\infty} T(x_n) = y$, berlaku $x \in M$ dan $y = T(x)$.

Definisi 1.3. Misalkan X dan Y dua ruang bernorm. Pemetaan linier $T : X \longrightarrow Y$ dikatakan terbatas jika T kontinyu di X.

2. HASIL PEMBAHASAN

Dalam pembahasan ini akan ditunjukkan dua lemma yaitu Lemma 2.1 dan Lemma 2.2 yang dapat dilihat di [5]. Dua lemma tersebut menjelaskan sifat-sifat pemetaan linier tutup yang terkait dengan konsep kurva tutup. Selain itu juga diperkenalkan teorema kurva tutup dari [2,4] yang pembuktiannya menggunakan teorema pemetaan buka.

Lemma 2.1. Misalkan X dan Y suatu ruang Banach, T : M $\longrightarrow$ Y adalah pemetaan linier dengan M subruang dari X. T tutup jika M tutup dan terbatas.

Bukti.
Misalkan barisan $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ di M dengan $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ dan $\lim_{n\to\infty} T(x_n) = y$.
Karena M tutup dan T linier terbatas maka x$\in$ M dan menurut Definisi 1.3, T kontinyu, ini berarti T(x) = $\lim_{n\to\infty} T(x_n) = y$.
Jadi T tutup. ▪

Lemma 2.2. Misalkan X dan Y suatu ruang Banach, T : M $\longrightarrow$ Y adalah pemetaan linier dengan M subruang dari X. T tutup jika dan hanya jika G(T) tutup.

Bukti.
($\Rightarrow$) Ambil barisan $(x_n, T(x_n))_{n=1}^{\infty}$ di G(T) dengan $\lim_{n\to\infty}(x_n, T(x_n)) = (x, y)$.
Ini berarti $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ dan $\lim_{n\to\infty} T(x_n) = y$.
Karena T tutup maka x$\in$ M dan y = T(x), sehingga (x,y)$\in$ G(T). Jadi G(T) tutup.

($\Leftarrow$) Ini berarti barisan $(x_n, T(x_n))_{n=1}^{\infty}$ ada di G(T), sehingga $\lim_{n\to\infty}(x_n, T(x_n)) = (x, y)$.
Karena G(T) tutup maka (x,y) $\in$ G(T). Jadi x$\in$ M dan y = T(x). Dengan perkataan lain T tutup. ▪

Teorema 2.3. (Prinsip kurva tutup) Misalkan X dan Y suatu ruang Banach. T : M $\longrightarrow$ Y adalah pemetaan linier dengan M subruang dari X. T terbatas apabila M dan G(T) keduanya tutup.

Bukti.
Definisikan pengaitan φ : G(T) M, sebagai berikut φ : (x,T(x))$\mapsto$ x, untuk setiap (x, T(x))$\in$ G(T). Lebih dahulu akan ditunjukkan φ suatu pemetaan .
Untuk itu ambil (x_1 , T(x_1)) , (x_2 , T(x_2)) di G(T) dengan (x_1 ,T(x_1)) = (x_2, T(x_2)) maka $x_1 = x_2$ dan T(x_1) = T(x_2) .
Dengan demikian φ ((x_1 , T(x_1))) = x_1 = x_2 = φ ((x_2,T(x_2))). Jadi φ suatu pemetaan. Juga akan ditunjukkan φ suatu pemetaan linier. Ambil (x_1 , T(x_1)) , (x_2 , T(x_2)) di G(T) dengan α, β$\in$ R maka

φ (α (x_1,T(x_1)) + β (x_2,T(x_2)))
= φ ((αx_1, αT(x_1)) + (βx_2, βT(x_2)))
= φ ((αx_1 +βx_2 , αT(x_1) +βT(x_2)))
= αx_1 + βx_2
= α φ (x_1,T(x_1)) +β φ (x_2,T(x_2))

Jadi φ suatu pemetaan linier .
Karena ‖ φ (x , T(x)) ‖ = ‖ x ‖ ≤ ‖ x ‖ + ‖ T(x) ‖ = ‖(x , T(x))‖ maka terdapat K = 1 > 0 sehingga ‖ φ (x , T(x)) ‖ ≤ ‖ (x , T(x)) ‖ untuk setiap (x , T(x)) di G(T). Jadi φ suatu pemetaan terbatas.

Selanjutnya ambil x$\in$ M. Karena T : M $\longrightarrow$ Y adalah pemetaan linier maka terdapat T(x) di Y. Ini berarti terdapat (x, T(x)) di G(T) sehingga φ (x, T(x)) = x. Jadi φ juga suatu pemetaan pada.

Dapat diperlihatkan bahwa jika X dan Y dua ruang Banach maka X x Y juga ruang Banach. Karena G(T) tutup dan G(T) subruang dari X x Y maka G(T) juga ruang Banach. Demikian pula M tutup dan M subruang dari X maka M juga ruang Banach. Selain itu telah ditunjukkan bahwa φ suatu pemetaan linier, terbatas dan pada. Jadi menurut Teorema pemetaan buka di [4], φ adalah pemetaan buka. Kemudian akan ditunjukkan φ adalah pemetaan satu-satu atau Ker φ = {0}. Andaikan terdapat x ≠ 0 dengan x $\in$ Ker φ. Untuk itu tulis x = (x_1, T(x_1)). Karena x ≠ 0 maka x_1 ≠ 0. Dari definisi pengaitan φ diperoleh x_1 = φ (x_1, T(x_1)) atau x_1 = φ(x) = 0, ini bertentangan dengan x_1≠ 0. Jadi Ker φ = {0} atau φ adalah pemetaan satu-satu. Dengan demikian menurut Teorema pemetaan buka $φ^{-1}$ kontinyu [5]. Karena φ juga pemeta-an pada maka terdapat (x, T(x)) di G(T) sehingga x = φ (x, T(x)) untuk setiap x$\in$ M. Ini berarti $φ^{-1}$ (x) = $φ^{-1}$ (φ (x, T(x))) = ($φ^{-1}$ φ) (x, T(x)) = 1 (x, T(x)) = (x, T(x)).

Dengan mengacu pada [3,6] dapat diperlihatkan bahwa φ^{-1} juga pemetaan linier, sehingga menurut Definisi 1.3, φ^{-1} adalah suatu pemetaan terbatas. Terakhir akan ditunjukkan T terbatas. Pilih bilangan riil $K > 0$ sehingga $\| \varphi^{-1}(x) \| = \| (x, T(x)) \| \leq K \| x \|$ untuk setiap $x \in M$.
Dengan demikian $\| T(x) \| \leq \| T(x)\| + \| x \| = \| (x, T(x))\| \leq K \| x \|$ untuk setiap $x \in M$. Jadi T adalah suatu pemetaan terbatas. ▪

3. PROSES PENERAPAN KURVA TUTUP

Misalkan $x\in X$ karena $X = M \oplus N$ maka terdapat $y\in M$ dan $z\in N$ sehingga penulisan $x = y+z$ tunggal.
Definisikan $P : X \longrightarrow X$ dengan $P (x + y) = y$ untuk setiap $y\in M$ dan $z\in N$, maka P adalah proyeksi pada M sepanjang N. Dan D(P) = X jelas tutup karena X himpunan semesta. Selanjutnya akan ditunjukkan P pemetaan linier, R(P) = M dan Ker (P) = N = R (I - P), dengan I adalah pemetaan identitas.

Misalkan $x,x^1\in X$ dan $\alpha,\beta\in R$. Sebut $x = y+z$ dan $x^1 = y^1 + z^1$ dengan $y, y^1\in M$ dan $z, z^1\in N$.
Maka $\alpha x = \alpha y +\alpha z$ dan $\beta x^1 = \beta y^1+ \beta z^1$ jadi $\alpha x + \beta x^1 = \alpha y + \beta y^1 + \alpha z + \beta z^1$
Karena P proyeksi pada M sepanjang N maka $P(x) = y$ dan $P(x^1) = y^1$
Jadi $P(\alpha x + \beta x^1) = \alpha y + \beta y^1 = \alpha\, P(x) + \beta\, P(x^1)$.
Dengan perkataan lain P linier.
Tinjau $P : X \longrightarrow M$
Jelas $R(P) \subseteq M$ (3.1)

Ambil $y\in M$ dan pilih $x= y\in M \subseteq X$ sehingga $P(x)=y$, maka $y\in R (P)$.
Ini berakibat $M \subseteq R (P)$ .... (3.2)
Dari (3.1) dan (3.2) disimpulkan M = R (P). Ambil $x \in N \subseteq X$ dan tulis $x = x + 0$ dengan $0\in M$ dan $x \in N$. Karena P proyeksi pada M sepanjang N maka $P(x) = 0$, sehingga $x\in$ Ker (P).
Dan ini berarti $N \subseteq$ Ker (P). (3.3)

Ambil $x_0\in$ Ker (P) $\subseteq X$ maka $P(x_0) = 0$. Tulis $x_0 = y_0 + z_0$ dengan $y_0\in M$ dan $z_0\in N$, maka $y_0 = P(x_0) = 0$. Ini berakibat $x_0 = z_0\in N$.
Jadi Ker (P) $\subseteq N$. (3.4)

Dari (3.3) dan (3.4) disimpulkan Ker (P) = N. Tinjau $(I - P) : X \longrightarrow X$ dengan
$(I - P)(y + z) = z$ untuk setiap $y\in M$ dan $z\in N$. Maka (I - P) juga suatu proyeksi pada N sepanjang M.
Jelas $R(I - P) \subseteq N$ (3.5)
Ambil $z \in N$ dan pilih $x = z \in N \subseteq X$ sehingga $(I - P)(x) = z$ maka $z \in R (I - P)$.
Ini berakibat $N \subseteq R (I-P)$ (3.6)
Dari (3.5) dan (3.6) disimpulkan
$N = R (I - P)$.
Kemudian masih akan ditunjukkan lagi P tutup. Untuk itu misalkan barisan $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ di X, sehingga $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ dan $\lim_{n\to\infty} P(x_n) = y$. Karena X tutup maka jelas $x \in D(P) = X$. Juga karena M tutup dan $P(x_n) \in R(P) = M$,
Maka $y \in R(P)$ dan $P(y) = y$ (3.7)

Karena I pemetaan identitas maka $x_n - P(x_n) = (I - P)(x_n)$ dan jelas $x_n - P(x_n)\in R(I - P) = N$. Tetapi karena N juga tutup maka $\lim_{n\to\infty}(x_n - P(x_n)) = x - y \in N$.
Dan $P(x) - P(y) = P(x-y) = 0$. (3.8)

Dari (3.7) dan (3.8) diperoleh $P(x) - y = 0$ atau $y = P(x)$. Jadi P tutup dan menurut Lemma 2.3 di [5], G(P) juga tutup. Dengan menggunakan teorema 2.3 (prinsip kurva tutup) dapat disimpulkan bahwa P terbatas.

Sekarang akan ditunjukkan P tunggal. Untuk itu ambil $x\in X$ dan tulis $x = y+z$, dengan $y\in M$ dan $z\in N$. Misalkan T suatu proyeksi sehingga $T(y+z)=y$ untuk setiap $y\in M$ dan $z\in N$. Karena $P(y+z)=y$ untuk setiap $y\in M$ dan $z\in N$ maka $P(y+z)=T(y+z)$ untuk setiap $y\in M$ dan $z\in N$. Ini berakibat $P(x)=T(x)$ untuk setiap $x\in X$. Jadi P=T, atau dengan perkataan lain P tunggal.

4. PENUTUP

Dengan demikian disimpulkan bahwa ketunggalan proyeksi terbatas pada ruang Banach selalu dapat dimunculkan dari hasil tambah langsung subruang-subruang tutup ruang Banach tersebut.

Jika semua premis dalam teorema kurva tutup telah dipenuhi dengan syarat pemeta-an linier $T: M \longrightarrow Y$ adalah pemetaan pada maka dapat dikatakan bahwa T juga pemetaan buka. Ini berarti pemetaan buka dapat dimunculkan dari teorema kurva tutup dengan persyaratan seperti di atas. Selain itu dari Definisi 1.2. dapat ditafsirkan bahwa M tutup. Juga karena M subruang dari X sedangkan X adalah ruang Banach maka jelas M ruang Banach. Dengan argumentasi yang serupa dapat ditafsirkan bahwa G(T) tutup dan G(T) juga ruang Banach.

5. DAFTAR PUSTAKA

[1] Balakrishnan, A.V.(1981), *Applied Functional Analysis*, 2nd Edition, Springer Verlag, New York.

[2] De wilde, M.(1988), *Closed Graph Theorems and Webbed Space*, Research Notes in Mathematics 19, Pitman, Melbourne.

[3] Drager, L.D., Foote R.L. (1986), *The Contraction Mapping Lemma and the Inverse Function Theorem in Advance Calculus* , Amer. Math. Monthly, **93**: 52-54.

[4] Husain, T. (1975), *The Open Mapping and Closed Graph Theorems in Topological Vector Space*, Oxford University Press.

[5] Maspupu, J. (1990), *Aplikasi Prinsip Baire Kategori*, Tesis Program Magister Sains, Depth. Math. ITB.

[6] Nijenhnis A.(1974), *Strong Derivatives and Inverse Mapping*, Amer. Math. Monthly, **81**: 969-980.