REDUKSI MASALAH CAUCHY ABSTRAK *DEGENERATE* KE MASALAH CAUCHY ABSTRAK *NONDEGENERATE*

Susilo Hariyanto
Jurusan Matematika FMIPA UNDIP
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H, Semarang 50275

Abstract. In this article, we investigate how to reduce an abstract degenerate Cauchy problem to an abstract nondegenerate Cauchy problems. This problem is discussed in the Hilbert space which can be writen as an orthogonal direct sum of *Ker M* and $\overline{Ran\, M^*}$. Under certain assumptions, abstract degenerate Cauchy problems can be reduced to abstract nondegenerate Cauchy problems which is easier to solve. If we have a solution of abstract nondegenerate Cauchy problem, then using certain transformation we can find the solution of abstract degenerate Cauchy problems.

Key words: Degenerate Cauchy Problems, Nondegenerate Cauchy Problems

.

1. PENDAHULUAN

Masalah Cauchy abstrak *degenerate* mulai mendapatkan perhatian bagi para peneliti kurang lebih dalam sepuluh tahun terakhir. Dalam kasus dimensi berhingga masalah ini dapat dipahami lebih mudah dan lengkap dibandingkan dalam kasus berdimensi takhingga. Hal ini disebabkan dalam kasus dimensi hingga dimungkinkan membawa matrik *M* dan *A* (1.1) bersama-sama ke bentuk normal.

Diperhatikan masalah Cauchy abstrak,

$$\frac{d}{dt}Mz(t) = Az(t), \qquad (1.1)$$

dengan *M*, *A* operator-operator linear dari ruang Hilbert H ke ruang Hilbert K dan operator *M* belum tentu mempunyai invers. Permasalahan (1.1) disebut *degenerate*, jika operator *M* tidak mempunyai invers.

Berikut akan diselidiki cara mereduksi masalah Cauchy abstrak *degenerate* ke masalah Cauchy abstrak *nondegenerate*. Jika cara ini dapat ditemukan, maka untuk menyelesaikan masalah Cauchy abstrak *degenerate* dapat dikerjakan dengan menyelesaikan terlebih dahulu masalah Cauchy *nondegenerate* yang selanjutnya dikonversi ke penyelesaian dari masalah Cauchy *degenerate*. Oleh sebab itu akan di-selidiki asumsi-asumsi yang diperlukan agar Masalah Cauchy abstrak *degenerate* dapat dibawa ke masalah Cauchy abstrak *nondegenerate* yang lebih mudah untuk dicari penyelesaiannya.

Masalah Cauchy abstrak dalam kasus dimensi berhingga telah dibahas secara lengkap beserta contoh dan aplikasinya dalam teori kontrol [3]. Masalah Cauchy dalam kasus dimensi tak hingga diantaranya dibicarakan oleh [5]. Dalam pembahasannya diasumsikan bahwa operator *M* self adjoint dan non negatif. Selain itu masalah Cauchy dalam ruang Banach juga telah dibahas [1]. Masalah Cauchy abstrak *nondegenerate* secara lengkap sudah dibahas oleh [4]. Aplikasi masalah Cauchy *nondegenerate* pada limit nonrelativistik dari persamaan dirac juga telah dibahas oleh [6].

2. KONSEP DASAR

Penyelesaian masalah Cauchy abstrak *degenerate* berkaitan dengan infinitesimal generator suatu semigrup kontinu kuat. Teori-teori tentang semigrup kontinu kuat dibahas oleh [2]. Adapun sebagai penunjang penelitian ini diperlukan teori-teori tentang operator linear pada ruang Hilbert, yang diantaranya telah dibahas oleh [7]. Berikut akan diberikan beberapa definisi dan teorema dasar yang diperlukan untuk pembahasan selanjutnya.

Definisi 2.1. [7] Operator $T : H_1 \to H_2$ dikatakan tertutup jika dipenuhi: Jika barisan $\{f_n\} \subset D(T)$ konvergen di dalam H_1 dan barisan $\{Tf_n\}$ konvergen di dalam H_2 , maka $\lim f_n \in D(T)$ dan $T(\lim f_n) = \lim Tf_n$.

Definisi 2.2. [2]
Diberikan $S(\cdot) : [0,\infty) \to \mathrm{H}$ keluarga operator terbatas pada X . $S(\cdot)$ disebut semigrup jika

(i) $S(0) = I,$

(ii) $S(t+s) = S(t)\, S(s), \quad t,s \ge 0$.

Selanjutnya jika dipenuhi :

(iii) $\lim\limits_{t \to 0^+} S(t)x = x, \text{ untuk setiap } x \in \mathrm{X},$

maka $S(\cdot)$ disebut semigrup kontinu kuat.

Definisi 2.3. [2]
Diberikan $S(\cdot)[0,\infty) \to H$. Semigrup kontinu kuat pada X. Operator linear A dikatakan infinetisimal generator dari $S(\cdot)$,

jika $Ax = \lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{h}(S(h)x - x),$

untuk

$$x \in D(A) = \left\{ x \in \mathrm{X} \mid \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(S(h)x - x) \quad ada \right\}.$$

Teorema 2.4 [4]. Diberikan A operator linear terdefinisi *dense* dengan $\rho(A) \neq \phi$. Masalah nilai awal, $\frac{d}{dt}u(t) = Au(t)$, t>0 dan ($u(0)=x$) mempunyai penyelesaian tunggal yang turunannya kontinu pada $[0,\infty)$ untuk setiap nilai awal yang diberikan jika dan hanya jika A merupakan infinetisimal generator dari suatu semigrup kontinu kuat.

Adapun penyelesaian masalah Cauchy abstrak pada persamaan (1.1) yang dimaksud dalam pembahasan ini didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.5. Penyelesaian *strict* dari masalah Cauchy abstrak (1.1) adalah suatu fungsi kontinu $z : [0,\infty) \to \mathrm{H}$ sehingga $z(t) \in D(A) \cap D(M)$ untuk semua $t \ge 0$, $Mz(t)$ mempunyai turunan yang kontinu dan memenuhi persamaan (1.1).

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam mereduksi masalah Cauchy abstrak *degenerate* ke *nondegenerate* diperlukan beberapa pengertian dan asumsi di bawah ini.
Misalkan dibentuk suatu himpunan $D_A = \{z(t) \in D(A) | Az(t) \in \overline{(Ran\, M)}\}$. Dengan menggunakan definisi 2.5, dapat disimpulkan bahwa setiap penyelesaian *strict* masalah Cauchy abstrak *degenerate* memenuhi $z(t) \in D_A$ untuk semua $t \ge 0$, dengan

$$D_A = \{z(t) \in D(A) | Az(t) \in \overline{(Ran\, M)}\}.$$

Asumsi 3.1. Operator A, M tertutup dan terdefinisi *dense*.

Teorema 3.2. Dengan Asumsi 3.1 operator $A|_{D_A}$ tertutup.

Bukti.
Misalkan $\{z_n(t)\} \subset D_A \subset D(A)$ sedemikian hingga $\lim z_n(t) = u(t)$ dan $\lim Az_n(t) = v(t)$. Karena A tertutup maka $u(t) \in D(A)$ dan $Au(t) = v(t)$. Akan teta-pi perlu diingat bahwa untuk setiap $z_n(t) \in D_A$, maka $Az_n(t) \in \overline{(Ran\, M)}$. Oleh karena itu $v(t) \in \overline{(Ran\, M)}$ sehingga $u(t) \in D_A$. ■

Karena M operator tertutup, maka *Ker M* merupakan ruang bagian tertutup dari H. Misalkan *P* proyeksi *ortogonal* pada *Ker M*, akibatnya $P^T = 1 - P$ juga merupakan proyeksi *ortogonal* pada $(Ker\, M)^{\perp}$. Karena *M* tertutup dan terdefinisi *dense* dalam H, maka M^* tertutup dan terdefinisi *dense* dalam K. Untuk selanjutnya misalkan pula *Q* proyeksi *orthogonal* pada *Ker* M^*, akibatnya $Q^T = 1 - Q$ juga merupakan proyeksi *ortogonal* pada $(Ker\ M^*)^{\perp}$. Dengan demikian dapat dituliskan

$$PH = Ker\, M,\ P^T H = \overline{(Ran\, M^*)},$$

QK= *Ker M** dan Q^TK= $\overline{(Ran\ M)}$.

Operator *M injektif* jika dan hanya jika *Ker M*={0}. Oleh karena itu agar dimungkinkan mereduksi operator *M* yang belum tentu mempunyai *invers* ke operator yang mempunyai *invers* terlebih dahulu didefinisikan operator pembatasan dari *M* pada
$(Ker\ M)^{\perp} \cap D(M)$ sebagai berikut.
$M_r = M|_{D(M_r)}$, dengan $D(M_r) = (\ker M)^{\perp} \cap D(M)$.
Operator $M|_{D(M_r)} = M_r$ mempunyai *invers* seperti tertuang dalam lemma berikut.

Lemma 3.3 Operator M_r mempunyai invers. Misalkan $\left(P^T\right)^{-1}\{x(t)\}$ merupakan bayangan *invers* dari $x(t) \in (Ker\ M)^{\perp}$ terhadap proyeksi P^T yaitu
$(P^T)^{-1}\{x(t)\} = \{x(t) + y(t) \mid y(t) \in KerM\}$,
$x(t) \in (Ker\ M)^{\perp}$.
Apabila diperhatikan himpunan
$\left(P^T\right)^{-1}\{x(t)\}$ belum tentu merupakan *singleton.*

Selanjutnya akan didefinisikan operator A_0 yang merupakan operator pembatas dari operator *A* pada $(Ker\ M)^{\perp}$ seba gai berikut

$$A_0\{x(t)\} = \left\{\left(P^T\right)^{-1}\{x(t)\} \cap \mathrm{D}_A\right\}$$

$$A_0\{x(t)\} \subset \overline{(Ran\ M)}, \qquad (1.2)$$

untuk setiap $x(t) \in D(A_0)$
dengan, $D(A_0)=$

$$\left\{ x(t) \in (Ker\ M)^{\perp} \mid \left(P^T\right)^{-1}\{x(t)\} \cap D_A \neq \phi \right\}.$$

Operator A_0 bernilai tunggal jika $\left(P^T\right)^{-1}\{x(t)\} \cap D_A$ merupakan singleton. Untuk itu diperlukan asumsi sebagai berikut.

Asumsi 3.4. $PD_A \subset D_A$ dan operator $(QAP)|_{PD_A}$ mempunyai invers yang terbatas.

Teorema 3.5. Dengan Asumsi 3.1 dan 3.4, vektor $z(t) \in H$ merupakan anggota ruang bagian D_A jika dan hanya jika $z(t) \in D(A)$ dan $Pz(t) = -(QAP)^{-1}QAP^T z(t)$.

Akibat 3.6. Setiap $x(t) \in P^T D_A \subset (\ker M)^{\perp}$ menyatakan dengan tunggal $z(t) \in D_A$ sehingga $x(t) = P^T z(t)$ dan
$z(t) = (1-(QAP)^{-1}QA)\, x(t)$.

Menurut Akibat 3.6 dapat disimpulkan bahwa himpunan

$$\left(P^T\right)^{-1}\{x(t)\} \cap \mathrm{D}_A$$

merupakan singleton.

Selanjutnya berdasarkan Akibat 3.6 dapat didefinisikan operator Z_A yaitu sebagai berikut.

$$Z_A = P^T - (QAP)^{-1}QAP^T.$$

Operator Z_A terdefinisi pada

$$D(Z_A) \supset P^T D_A.$$

Pembatasan $Z_A|_{P^T D_A}$ adalah $1-(QAP)^{-1}QA$ pada $P^T D_A$ yang merupakan *invers* dari proyeksi $P^T|_{D_A}$ dalam arti $Z_A P^T = 1$ pada D_A dan $P^T Z_A = 1$, pada $P^T D_A$.

Jadi operator A_0 (lihat 2) dapat dinyatakan menjadi $A_0 = A\, Z_A$, pada $D(A_0) = P^T D_A$ dan untuk setiap $z(t) \in D_A$ diperoleh $A_0 x(t) = Az(t)$ dengan $x(t) = P^T z(t)$.

Asumsi 3.7. Operator A mempunyai invers yang terbatas.

Operator *A* tertutup dan mempunyai *invers* terbatas ekuivalen dengan operator *A injektif* dengan *Ran A* = K. Hal ini berakibat $A|_{D_A}$ mempunyai *invers* terbatas yaitu

$$A|_{D_A} : D_A \to Q^T K,$$

$$(A|_{D_A})^{-1} : Q^T K \to D_A.$$

Dengan demikian operator $A_0^{-1} = (A\, Z_A)^{-1} = P^T A^{-1}|_{Q^T K}$ terbatas dan terdefinisi pada $Q^T K$.

Dengan asumsi-asumsi di atas, maka untuk setiap $z \in D_A$ diperoleh $Az = A_0\, x$, dengan $x = P^T z$. Lebih lanjut untuk

$z \in D(M)$ diperoleh Mz=$M_r x$, dengan $x = P^T z$ n dan operator $\mathrm{M_r}$ *invertibel*. Jadi masalah Cauchy abstrak *degenerate* (1.1) dapat direduksi ke bentuk *nondegenerate*:

$$\frac{d}{dt} M_r\, x(t) = A_0 x(t), \qquad x(0) = P^T z_0 .$$

4. PENUTUP

Untuk mencari penyelesaian masalah Cauchy abstrak *degenerate* dapat dilakukan dengan terlebih dahulu mereduksi masalah Cauchy *degenerate* ke masalah Cauchy *nondegenerate* yang lebih mudah dicari penyelesaiannya. Bentuk ini lebih mudah diselesaikan karena operator M invertibel. Selanjutnya untuk mencari penyelesaian masalah Cauchy *degenerate* digunakan operator tertentu yang mengawankan setiap penyelesaian *nondegenerate* ke *degenerate* ke penyelesaian masalah Cauchy abstrak *degenerate*. Oleh karena itu sebagai saran, studi tentang operator tertentu tersebut sangat menarik untuk dikaji lebih lanjut.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Favini, A. (1985), *Degenerate and Singular Evolution Equations in Banach Space*, Math. Optim. **6**: 17-44

[2] Kappel, F., Schappacher, W. (2000), *Strongly Continuous Semigroups, An Introduction*.

[3] Dai, L.(1989), *Singular Control Systems*, Lecture Notes in Control and Inform. Sci., **118**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.

[4] Pazi, A. (1983), *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York.

[5] Carrol, RW., Sholwater,R.E.(1976), *Singular ang Degenerate Cauchy Problems*, Math. Sci. Engrg., **127**, Academic Press, New York-San Fransisco-London.

[6] Thaller, B., Thaller, S. (1996), *Factorization of Degenerate Cauchy Problems: The Linear Case*, J. Operator Theory: 121-146.

[7] Weidman, J. (1980), *Linear Opera-tors in Hilbert Spaces*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York .