SOLUSI-SOLUSI PERIODIK PADA PERLUASAN FRACTIONAL VAN-DER POL TAK LINEAR

S. B. Waluya
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Semarang
stevanusbudi@yahoo.com

Abtract. In this paper will be studied a Generalized Non Linear Rayleigh Oscillator. It will be shown that the recently developed perturbation method based on integrating factors can be used to approximate first integrals and periodic solutions. Not only approximations of first integrals will be given, but it will also be shown how in a rather efficient way the existence and stability of time-periodic solutions can be obtained from these approximations.

Keyword: periodic solutions, perturbation method, Non Linear Rayleigh Oscillator

1. PENDAHULUAN

Dalam terori Perturbasi persamaan Van der Pol yang mempunyai bentuk

$$\ddot{Y} + Y = \varepsilon(1 - Y^2)\dot{Y}, \qquad (1.1)$$

dimana ε adalah parameter yang cukup kecil yang memenuhi $0, \varepsilon << 1$, $\dot{Y}$ adalah turunan Y terhadap waktu t, merupakan persamaan yang sangat populer yang dapat memberikan contoh lengkap tentang keberadaan dan keunikan (ketunggalan) suatu solusi dari persamaan differensial orde dua yang diperturb (diganggu). Sekarang apakah keberadaan dan keunikan solusi tersebut masih bisa dipertahankan manakala suku perturbasinya yakni $\dot{Y}$ yang di sebelah kanan dari persamaan (1.1) diperumum yakni menjadi $\dot{Y}^{\frac{2m+1}{2n+1}}$? Perlu dicatat bahwa banyak peneliti yang telah mempelajari secara detail dan luas dengan berbagai macam metoda dari perluasan persamaan Van der Pol (1.1). Misalnya saja Mickens dalam makalahnya di [3] telah mempelajari secara detail perluasan persamaan (1.1) yakni

$$\ddot{Y} + Y = \varepsilon(1 - Y^2)\dot{Y}^{\frac{1}{3}}, \qquad (1.2)$$

Dia menggaproksimasi solusi-solusi periodik dengan menggunakan metoda aproksimasi pertama dari Krylov dan Bogoliubov. Juga ketika perluasan persamaan Van der Pol (1.1) yakni

$$\ddot{Y} + Y^{\frac{1}{3}} = \varepsilon(1 - Y^2)\dot{Y}, \qquad (1.3)$$

telah dipelajari secara detail oleh Mickens dalam makalahnya [2] dengan menggunakan metoda aplikasi dari teorema Lienard-Levinson-Smith. Mickens mengaproksimasi solusi periodik dengan menggunakan metoda harmonic balance. Kemudian dengan menggunakan metoda perturbasi yang didasarkan pada faktor-faktor integral Waluya dan Van Horssen di [7] memperumum persamaan (1.1) menjadi

$$\ddot{Y} + Y^{\frac{2m+1}{2n+1}} = \varepsilon(1 - Y^2)\dot{Y}, \qquad (1.4)$$

dimana $m, n \in N$. Pengembangan teori perturbasi yakni perturbasi yang didasarkan pada faktor-faktor integral telah banyak digunakan dalam menganalisa berbagai macam persamaan differensial tak linear (lihat [4,5],[7]-[10]). Banyak metode-metoda perturbasi lain seperti halnya metoda *averaging* (lihat [6]), metoda *multiple time-scale* (lihat [5, 6]), metoda *harmonic balance* (lihat [6]) dan yang lain-lain yang digunakan oleh banyak peneliti untuk menganalisa persamaan diferensial tak linear. Dalam makalah ini akan juga dianalisa perumuman dari persamaan Van der Pol yang berbentuk

$$\ddot{Y} + Y = \varepsilon(1 - Y^2)\dot{Y}^{\frac{2m+1}{2n+1}}, \qquad (1.5)$$

dimana $m, n \in N$ dengan menggunakan metoda perturbasi yang didasarkan pada faktor-faktor integral. Persamaan (1.5) merupakan perumuman dari persamaan (1.2) yang telah diteliti oleh Mickens dalam makalahnya [3]. Makalah ini diuraikan sebagai berikut. Pada bagian ke dua dari makalah ini ditunjukkan bagaimana aproksimasi dari integral-integral pertama dapat dikonstruksi dengan menggunakan metoda perturbasi yang didasarkan pada faktor integral. Eksistensi dan kestabilan dari solusi periodik dapat diberikan dalam bagian ke tiga. Bagian ke empat dari makalah ini berisi penutup.

2. Aproksimasi Integral Pertama

Dalam bagian ini kita akan tunjukkan bagaimana metoda perturbasi yang didasarkan pada faktor-faktor integral dapat diterapkan pada perluasan Fractional Van der Pol tak linear. Perhatikan kembali persamaan perluasan Fractional Van der Pol tak linear

$$\ddot{X} + X = \varepsilon(1 - X^2)\dot{X}^{\frac{2m+1}{2n+1}}, \qquad (2.1)$$

Solusi-solusi tanpa gangguan dari (2.1), yakni dengan $\varepsilon = 0$ membentuk sebuah keluarga dari orbit-orbit periodik. Keluarga ini akan memenuhi seluruh bidang phase (*phase plane*) $(X, \dot{X})$. Setiap orbit periodik bersesuaian dengan sebuah konstanta energi $E = \frac{1}{2}\dot{X}^2 + \frac{1}{2}X^2$. Sebuah konstanta energi E bersesuaian dengan sebuah sudut phase ψ yang didefinisikan dengan $\psi = \arcsin(\frac{X}{\sqrt{2E}})$. Kita gunakan transformasi $(X, \dot{X}) \mapsto (E, \psi)$, dan kita dapatkan

$$\begin{cases} \dot{E} = \varepsilon\dot{X}f = g_1(E,\psi), \\ \dot{\psi} = 1 - \varepsilon\frac{X}{2E}f = g_2(E,\psi), \end{cases} \qquad (2.2)$$

dimana $f = (1 - X^2)^{\frac{2m+1}{2n+1}}$. Dengan mengalikan persamaan pertama dan kedua dalam (2.2) dengan faktor-faktor integral μ_1 dan μ_2 berturut-turut, maka berdasarkan teori dari faktor-faktor integral yang dinyatakan dalam makalah [4, 5] bahwa μ_1 dan μ_2 harus memenuhi

$$\begin{cases} \frac{\partial\mu_1}{\partial\psi} = \frac{\partial\mu_1}{\partial E}, \\ \frac{\partial\mu_1}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial E}(\mu_1 g_1 + \mu_2 g_2), \\ \frac{\partial\mu_2}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial\psi}(\mu_1 g_1 + \mu_2 g_2). \end{cases} \qquad (2.3)$$

Dengan memperluas μ_1 dan μ_2 dalam deret pangkat dalam ε dan dengan mensubstitusikan $g_1; g_2$ dan perluasan faktor-faktor integral ke dalam (2.3), dan dengan memisahkan dan mengumpulkan suku-suku yang berpangkat sama dalam ε, kita akhirnya mendapat masalah-masalah $O(\varepsilon^n)$, untuk n=0,1,2,... (lihat juga [4, 5],[8]-[10]). Masalah $O(\varepsilon^0)$ adalah

$$\begin{cases} \frac{\partial\mu_{1,0}}{\partial\psi} = \frac{\partial\mu_{2,0}}{\partial E}, \\ \frac{\partial\mu_{1,0}}{\partial t} = -\frac{\partial\mu_{2,0}}{\partial E}, \\ \frac{\partial\mu_{2,0}}{\partial t} = -\frac{\partial\mu_{2,0}}{\partial\psi}. \end{cases} \qquad (2.4)$$

dan untuk $n \geq 1$ masalah-masalah $O(\varepsilon^n)$ adalah

$$\begin{cases} \frac{\partial\mu_{1,n}}{\partial\psi} = \frac{\partial\mu_{2,n}}{\partial E}, \\ \frac{\partial\mu_{1,n}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial E}(\mu_{1,n-1}\, g_{1,1} + \mu_{2,n-1}\, g_{2,1} + \mu_{2,n}), \\ \frac{\partial\mu_{2,n}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial\psi}(\mu_{1,n-1}\, g_{1,1} + \mu_{2,n-1}\, g_{2,1} + \mu_{2,n}). \end{cases} \qquad (2.5)$$

dimana $\varepsilon g_{1,1} = g_1, \varepsilon g_{2,1} = g_2 - 1$. Masalah $O(^2 0)$ dalam persamaan (2.4) dapat mudah diselesaikan dan menghasilkan $\mu_{1,0} = h_{1,0}(E, \psi - t), \mu_{2,0} = h_{2,0}(E, \psi - t)$ dengan $\frac{\partial h_{1,0}}{\partial\psi} = \frac{\partial h_{2,0}}{\partial E}$. Fungsi-fungsi $h_{1,0}$ dan $h_{2,0}$ masih sebarang dan sekarang akan dipilih sesederhana mungkin. Kita pilih $h_{1,0} \equiv 1$ dan $h_{2,0} \equiv 0$, dan juga (lihat juga [4, 5], [8]-[10])

$$\mu_{1,0} = 1, \mu_{2,0} = 0 \qquad (2.6)$$

Maka, dari masalah order ε dalam (2.5) $\mu_{1,1}$ dan $\mu_{2,1}$ diperoleh

$$\begin{cases} \mu_{1,1} = -\frac{\partial}{\partial E}\left(\int^{t}(1-X^2)\dot{X}^{\frac{2m+2n+2}{2n+1}}d\bar{t}\right), \\ \\ \mu_{2,1} = -\frac{\partial}{\partial \psi}\left(\int^{t}(1-X^2)\dot{X}^{\frac{2m+2n+2}{2n+1}}d\bar{t}\right). \end{cases} \tag{2.7}$$

Sebuah aproksimasi F_1 dari sebuah integral pertama F = *constant* dari sistem (2.2) dapat diperoleh dari (2.6), (2.7), dan teori dari faktor-faktor integral yang dinyatakan dalam makalah [4, 5], [8]-[10], dan menghasilkan

$$F_1 = E - \varepsilon\int^{t}(1-X^2)\dot{X}^{\frac{2m+2n+1}{2n+1}}d\bar{t}, \tag{2.8}$$

dengan

$$\dot{X} = \sqrt{2E}\cos\psi. \tag{2.9}$$

Prosedur sederhana untuk mengkonstruksi integral pertama dapat juga dilihat dalam makalah-makalah [8]-[10]. Seberapa baik F_1 mengaproksimasi F dalam integral pertama $F = constant$ mengikuti dari teorema-teorema yang dinyatakan dalam makalah terdahulu [4, 5],[8]-[10]. Dalam kasus ini dapat ditunjukkan bahwa (menggunakan teori dalam [4, 5],[8]-[10])

$$\frac{dF_1}{dt} = \varepsilon\mu_{1,1}g_1 + \varepsilon\mu_{2,1}(g_2 - 1) = \varepsilon^2\Re_1(E,\psi) \tag{2.10}$$

dimana g_1 dan g_2, dan $\mu_{1,1}$ dan $\mu_{2,1}$ diberikan berturut-turut dengan (2.2) dan (2.7). Telah diketahui bahwa (lihat bagian 3 dalam [9] untuk bukti dan referensi) bahwa sebuah sistem dari dua persamaan diferensial orde satu mempunyai dua, dan tidak dapat mempunyai lebih dari dua, integral-integral pertama secara fungsional. Aproksimasi lain (bebas secara fungsional) dari sebuah integral pertama dapat diperoleh dengan mengambil

$$\mu_{2,0} = 1, \mu_{1,0} = 0 \tag{2.11}$$

dari pada (2.6). Masalah $O(\varepsilon)$ dalam (2.5) dapat juga dipecahkan dan menghasilkan

$$\begin{cases} \mu_{1,1} = \frac{\partial}{\partial E}\left(\int^{t}\left(\frac{X}{2E}(1-X^2)\dot{X}^{\frac{m+n+1}{2n+1}}\right)d\bar{t}\right), \\ \\ \mu_{2,1} = \frac{\partial}{\partial \psi}\left(\int^{t}\left(\frac{X}{2E}(1-X^2)\dot{X}^{\frac{m+n+1}{2n+1}}\right)d\bar{t}\right). \end{cases} \tag{2.12}$$

Sebuah aproksimasi F_2 dari sebuah integral pertama F = *constant* dari sistem (2.2) dapat juga diperoleh dari (2.11), (2.12), dan teori tentang faktor-faktor integral dalam [4,5],[8]-[10], dan menghasilkan

$$F_2(E,\psi,t) = (\psi - t) + \varepsilon\left[\int^{t}\left(\frac{X}{2E}(1-X^2)\dot{X}^{\frac{m+n+1}{2n+1}}\right)d\bar{t}\right] \tag{2.13}$$

Seberapa baik F_2 mengaproksimasi sebuah integral pertama $F = constant$ mengikuti dari teorema-teorema dalam [4,5],[8]-[10]. Dalam kasus ini kita punyai

$$\frac{dF_2}{dt} = \varepsilon\mu_{1,1}g_1 + \varepsilon\mu_{2,1}(g_2 - 1) = \varepsilon^2\Re_2(E,\psi) \tag{2.14}$$

dimana g_1 dan g_2, dan $\mu_{1,1}$ dan $\mu_{2,1}$ diberikan berturut-turut dengan (2.2) dan (2.12).

3. Solusi-solusi Periodik

Dalam bagian sebelumnya telah ditunjukkan aproksimasi secara asimtotik dari integral-integral pertama. Dalam bagian ini kita akan menunjukkan keberadaan, stabilitas solusi periodik tak trivial dengan menggunakan aproksimasi integral-integral pertama tersebut. Misalkan $T < \infty$ adalah periode dari sebuah solusi periodik dan misalkan c_1 adalah sebuah konstanta dalam integral pertama $F(E,\psi,t;\varepsilon) = constant$ dimana solusi periodik ada. Perhatikan $F = c_1$ untuk $t = 0$ dan $t = T$.

Kita aproksimasi F dengan F_1 (diberikan dengan (2.8)), eliminasi c1 dengan pengurangan, kita kemudian dapatkan (menggunakan fakta bahwa $E(0) = E(T)$ untuk sebuah solusi periodik)

$$\varepsilon\left(\int_0^T (1-X^2)\dot{X}^{\frac{2m+2n+1}{2n+1}}\,d\bar{t}\right) = O(\varepsilon^2) \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon\left(\int_{X(0)}^{X(T)} (1-X^2)\dot{X}^{\frac{2m+2n+1}{2n+1}}\,dX\right) = O(\varepsilon^2). \tag{3.1}$$

Tanpa mengurangi keumuman dapat diasumsikan bahwa pada saat $t=0$ posisi di $(X(0),\dot{X}(0))=(A,0)$ dengan $A>0$. Karena sifat simetri dari orbit-orbit yang tak diganggu dalam bidang phase maka kita punyai $\left(X(\frac{T}{2}),\dot{X}(\frac{T}{2})\right)=(-A,0)$. Dari (3.1) dapat kita peroleh

$$\varepsilon I(E) =)(\varepsilon^2), \tag{3.2}$$

dimana $I(E) = 4\int_0^A (1-X^2)\dot{X}^{\frac{2m+1}{2n+1}}dX$.

Untuk mendapatkan sebuah solusi periodik untuk (1.5) kita harus menemukan sebuah energi *E* sedemikian sehingga *I*(*E*) sama dengan nol (lihat juga [7, 8]). Dapat mudah diperiksa bahwa masalah yang sama (yakni, menemukan nilai nol dari *I*(*E*)) diperoleh ketika teknik pemetaan Poincar´e atau metoda Melnikov diterapkan (lihat juga [1,6]). Untuk menemukan energi *E* ini kita tulis kembali *I*(*E*) dalam (menggunakan (2.9))

$$I(E) = 4I_1(E)\left(1-\frac{I_2(E)}{I_1(E)}\right), \tag{3.3}$$

dimana

$$\begin{cases} I_1(E) = \displaystyle\int_0^A (2E-X^2)^{\frac{2m+1}{4n+2}}dX, \\ I_2(E) = \displaystyle\int_0^A X^2(2E-X^2)^{\frac{2m+1}{4n+2}}dX. \end{cases} \tag{3.4}$$

Dapat diperiksa bahwa $E(t)=\frac{1}{2}\dot{X}(t)^2+\frac{1}{2}X(t)^2$ dan $E(0)=\frac{1}{2}A^2$. Dari (2.2) kita dapat lihat bahwa *E* adalah konstan sampai pada order $O(\varepsilon)$ dengan skala waktu $0(1)$. Dengan menggunakan transformasi $X = Au$ dalam (3.4) dan menggunakan fakta bahwa $E=E(0)+O(\varepsilon)$ untuk $0\le t\le T$ dapat mudah diperlihatkan dari (3.2)-(3.4) bahwa (3.2) dapat ditulis dalam

$$4\varepsilon I_1(E)(1-Q) = O(\varepsilon^p), \tag{3.5}$$

dengan $p>1$

dimana

$$Q = 2E\frac{J_2(m,n)}{J_1(m,n)}, \tag{3.6}$$

dan dimana

$$\begin{cases} J_1(m,n) = \displaystyle\int_0^1 (1-u^2)^{\frac{2m+1}{4n+2}}du = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{2m+4n+3}{4n+2})}{2\Gamma(\frac{m+3n+2}{2n+1})}, \\ J_2(m,n) = \displaystyle\int_0^1 u^2(1-u^2)^{\frac{2m+1}{4n+2}}du = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{2m+4n+3}{4n+2})}{4\Gamma(\frac{m+3n+2}{2n+1})}. \end{cases} \tag{3.7}$$

dengan Γ adalah fungsi gamma. Mudah dilihat bahwa $J_1(m,n)>0$ dan $J_2(m,n)>0$ untuk semua nilai $m,n\in N$. Mudah juga dilihat dari (3.6) bahwa $\frac{dQ}{dE}=2\frac{J_2(m,n)}{J_1(m,n)}>0$. Ini mengakibatkan bahwa *Q* adalah monoton naik keras. Karena *Q* monoton naik keras dalam *E* kita dapat simpulkan bahwa terdapat dengan tunggal, tak trivial nilai *E* sedemikian sehingga *I*(*E*) = 0. Untuk hasil ini dapat disimpulkan (lihat juga [[8], section 4.2]) bahwa terdapat dengan tunggal, tak trivial, stabil solusi periodik untuk (1.5). Misalkan bahwa pada $t=0,\ X(0)=A_0$ dan $\dot{X}(0)=0$ untuk solusi periodik.

Maka,

$$\frac{1}{2}\dot{X}^2+\frac{1}{2}X^2=\frac{1}{2}A_0^2\equiv E_0 \tag{3.8}$$

dimana E_0 adalah energi sedemikian sehingga kita punyai solusi periodik. Jelas E_0 memenuhi (lihat juga (3.3) dan (3.5))

$$E_0=\frac{J_1(m,n)}{J_2(m,n)}=\frac{\Gamma(\frac{m+5n+3}{2n+1})}{\Gamma(\frac{m+3n+2}{2n+1})}, \tag{3.9}$$

sampai pada $O(\varepsilon^{p-1})$ dengan $p>1$. Periode dari solusi periodik dapat dihitung sampai $O(\varepsilon^p)$ dengan *p* > 1 dari (3.8), menghasilkan

$$\frac{dX}{dt}=\pm\sqrt{A_0^2-X^2}, \tag{3.10}$$

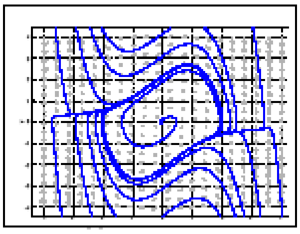
atau ekuivalen dengan

$$\frac{dX}{dt} = \pm\sqrt{A_0^2 - X^2}. \qquad (3.11)$$

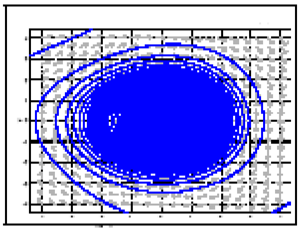
Kemudian dengan mengintegralkan (3.11) terhadap t dari $t = 0$ sampai $\frac{T}{2}$ dan kita peroleh

$$T = 2\pi . \qquad (3.12)$$

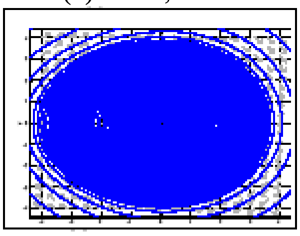
Beberapa phase portrait untuk bebarapa nilai dari m dan n dapat diberikan dalam Gambar 1.



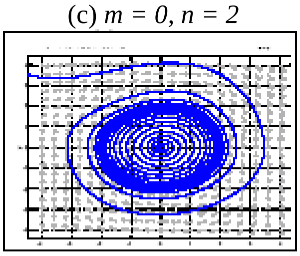
(a) $m = 0, n = 0$



(b) $m = 0, n = 1$



(c) $m = 0, n = 2$



(d) $m = 1, n = 2$

Gambar 1. Phase Portrait persamaan perluasan Fractional Van der Pol untuk beberapa nilai m dan n .

4. PENUTUP

Telah ditujukkan dalam bagian terdahulu bahwa metoda perturbasi yang didasarkan pada faktor integral dapat digunakan untuk mengaproksimasi integral-integral pertama persamaan (1.5) yang merupakan perluasan dari suatu persamaan fractional Van der Pol yang telah diteliti oleh Mickens dalam makalahnya [3]. Dalam bab 5 telah ditunjukkan bahwa keberadaan dan keunikan dari solusi-solusi periodik dari perluasan fractional Van der Pol persamaan (1.5) masih tetap dapat dipertahankan seperti saat $m = n = 0$. Dengan melihat hasil dari metoda ini yakni dapat diterapkan untuk kasus umum, maka perlu dikaji untuk kasus-kasus lain yang lebih besar yang lebih komplek.

5. DAFTAR PUSTAKA

[1] Arnold, V. I. (1978), *Ordinary Differential Equations*, The MIT Press, Cambridge.

[2] Mickens, R. E. (2002), *Analysis of Non-linear Oscillators having Non-Polynomial Elastic Terms*, Journal of Sound and Vibration **255**: 789-792.

[3] Mickens, R. E. (2003), *Fractional Van der Pol Equations*, Journal of Sound and Vibration **259**: 457-460.

[4] Van Horssen, W. T. (1999), *A Perturbation Method Based on Integrating Factors*, SIAM Journal on Applied Mathematics **59**: 1427-1443.

[5] Van Horssen, W. T. (1999), *A Perturbation Method Based on Integrating Vectors and Multiple Scales*, SIAM journal on Applied Mathematics **59**: 1444-1467.

[6] Verhulst, F. (1996), *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag, Berlin.

[7] Waluya, S. B., and W. T. Van Horssen (2003), *On the Periodic Solutions of a Generalized Nonlinear Van der Pol Oscillator*, Journal of Sound and Vibration **268**: 209-215.

[8] Waluya, S. B., and W. T. Van Horssen (2002), *Asymptotic Approximations of First Integrals for a Nonlinear Oscillator*, Nonlinear Analysis TMA **51**: 1327-1346.

[9] Waluya, S. B., and W. T. Van Horssen, 2002, *On Approximations of First Integrals for a System of Weakly Nonlinear, Coupled Harmonic Oscil-*

lators, Nonlinear Dynamics **30**: 243-266.

[10] Waluya, S. B., and W. T. Van Horssen, 2003, *On Approximations of First Integrals for Strongly Nonlinear Oscillators*, Nonlinear Dynamics **32**: 109-141.