TRANSITIF KLOSUR DARI GABUNGAN DUA RELASI EKUIVALENSI PADA SUATU HIMPUNAN DENGAN STRUKTUR DATA DINAMIS

Sukmawati Nur Endah
Program Studi Ilmu Komputer Jurusan Matematika FMIPA UNDIP
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H, Semarang 50275

Abstract. A relation R on set A is an equivalence relation on A if and only if R is reflexive, symmetric and transitive. If two equivalence relations on set A are combined, the combination of them is not surely an equivalence relation, because it is not surely transitive relation. In this paper is found the smallest transitive relation (transitive closure) of the combination, to be an equivalence relation. Then the steps to determine transitive closure are programmed in Pascal programming language with dynamic data structure that is multilist.

Keywords: transitive closure, equivalence relation, dynamic data structure

1. PENDAHULUAN

Salah satu konsep dasar bidang matematika adalah relasi. Relasi pada himpunan *A* sering memenuhi sifat-sifat refleksif, simetris, dan transitif. Namun ada juga relasi yang tidak memenuhi salah satu dari ketiga sifat di atas. Hal ini dapat ditambahkan pasangan relasi pada *R* sampai mendapat relasi dengan sifat yang diinginkan. Untuk menambahkan sesedikit pasangan relasi baru yang mungkin, maka harus dicari relasi terkecil R' pada himpunan *A* yang mengandung *R* dan memiliki sifat yang diinginkan. Relasi R' seperti di atas disebut klosur (*closure*) dari *R* [4]. Dengan demikian suatu relasi dapat dicari refleksif klosur (*reflexive closure*), simetris klosur (*symmetric closure*), dan transitif klosur (*transitive closure*).

Salah satu aplikasi transitif klosur yang menarik adalah pada relasi ekuivalensi (*equivalence relation*). Misalkan *R* dan *S* adalah relasi ekuivalensi pada himpunan *A*. Jika *R* dan *S* digabungkan, maka $R \cup S$ belum tentu relasi ekuivalensi. Hal ini disebabkan $R \cup S$ belum tentu transitif. Untuk membentuk relasi ekuivalensi terkecil yang mengandung *R* dan S maka perlu dicari transitif klosur dari $R \cup S$ tersebut.

Permasalahan yang diambil dalam penulisan ini adalah menentukan relasi ekuivalensi terkecil yang mengandung dua relasi ekuivalensi pada suatu himpunan. Dengan kata lain, permasalahannya adalah menentukan transitif klosur dari gabungan dua relasi ekuivalensi. Kemudian diimplementasikan ke dalam program komputer dengan bahasa pemrograman Turbo Pascal dan menggunakan struktur data dinamis, yaitu senarai berantai.

Untuk membatasi ruang lingkup permasalahan, maka dalam penulisan ini diberikan batasan sebagai berikut:

1. Dua relasi ekuivalensi sebagai input untuk mencari relasi ekuivalensi terkecil yang mengandung keduanya merupakan relasi pada himpunan yang sama.
2. Penentuan transitif klosur menggunakan algoritma Warshall.
3. Program yang dibuat menggunakan struktur data dinamis.

Tujuan penulisan ini adalah

1. Untuk mencari relasi ekuivalensi terkecil yang memuat dua relasi ekuivalensi pada suatu himpunan.
2. Untuk memahami program dengan struktur data dinamis.

2. PEMBAHASAN

A. Transitif Klosur

Definisi 2.1. [2] Misalkan R relasi pada himpunan A. *Transitif klosur* dari R adalah relasi R' sedemikian hingga:

(i). R' adalah transitif

(ii). $R \subseteq R'$

(iii). Untuk suatu relasi transitif R'', jika $R \subseteq R''$ maka $R' \subseteq R''$.

Transitif klosur dari relasi R dinotasikan dengan $t(R)$.

Jika R relasi pada himpunan A, maka transitif klosurnya dapat dibentuk dengan menambahkan pada relasi R semua pasangan terurut yang diperlukan untuk membentuk relasi transitif yang baru. Tetapi bagian (iii) dari definisi 1 menyatakan bahwa tak ada pasangan yang ditambahkan kecuali kalau diperlukan. Jadi R′ adalah relasi transitif terkecil dan $R \subseteq R'$. Jika R transitif, maka relasi transitif terkecil yang mengandung R adalah R itu sendiri.

Teorema 2.1. [5] Misalkan R relasi pada himpunan A. R transitif jika dan hanya jika $t(R) = R$.

Bukti.

($\Rightarrow$) Jika R transitif, maka jelas R adalah relasi transitif terkecil yang mengandung R. Sehingga $R = t(R)$.

($\Leftarrow$) Jika $t(R) = R$, maka berdasarkan sifat (i) dari definisi 1, R adalah transitif. ■

Teorema 2.2. [2] Misalkan R relasi pada himpunan A maka $t(R) = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$.

Bukti.

Bukti ini dibagi dalam dua bagian, yaitu :

(i). $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i \subseteq t(R)$

Akan ditunjukkan terlebih dulu bahwa $R^n \subseteq t(R)$ untuk setiap $n > 0$.

(1). (Basis). Untuk $n=1$, berdasarkan definisi 1 bagian (ii) jelas bahwa $R^1 = R \subseteq t(R)$.

(2). (Induksi). Misalkan $R^k \subseteq t(R)$ benar untuk setiap $k \geq 1$, akan ditunjukkan bahwa $R^{k+1} \subseteq t(R)$. Ambil sebarang $(a,b) \in R^{k+1}$. $\Leftrightarrow (a,b) \in R^kR$ (sebab $R^{k+1} = R^kR$).

$\Leftrightarrow \exists c \in A \ni (a,c) \in R^k \wedge (c,b) \in R$.

$\Leftrightarrow (a,c) \in t(R) \wedge (c,b) \in t(R)$ (dari langkah induksi $R^k \subseteq t(R)$ dan langkah basis)

$\Leftrightarrow (a,b) \in t(R)$ (karena $t(R)$ transitif).

Karena sebarang $[(a,b) \in R^{k+1} \Rightarrow (a,b) \in t(R)]$, maka $R^{k+1} \subseteq t(R)$. Sehingga berdasarkan prinsip induksi matematik $R^n \subseteq t(R)$ untuk setiap $n \geq 1$.

Sesudah terbukti $R^n \subseteq t(R)$ untuk setiap $n \geq 1$, dapat disimpulkan bahwa $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i \subseteq t(R)$.

(ii). $t(R) \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$

Akan ditunjukkan terlebih dulu $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$ transitif. Misalkan (a,b) dan (b,c) sebarang elemen dari $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$. Untuk suatu integer $s \geq 1$ dan $t \geq 1$, $(a,b) \in R^s$ dan $(b,c) \in R^t$, sehingga $(a,c) \in R^{s+t}$. Jadi $(a,c) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$ dan oleh karena itu $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$ adalah transitif. Karena setiap relasi transitif yang mengandung R berisi $t(R)$, maka $t(R) \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$.

Dari (i) dan (ii) terbukti $t(R) = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$. ■

Definisi 2.2. [2] Misalkan R relasi pada himpunan A dan n bilangan bulat positif, maka *relasi R^n pada A* adalah relasi yang menunjukkan path dengan panjang n dalam R. Dengan menuliskan aR^nb berarti terdapat path dengan panjang n dari a ke b dalam R.

Definisi 2.3. [2] Misalkan R relasi pada himpunan A. *Relasi* $R^* = \{(a,b) \in A \times A \mid$ terdapat suatu path dalam R dari a ke $b\}$ disebut relasi keterhubungan (connectivity relation) pada A. Panjang dari path ini secara umum tergantung pada a dan b. Dengan menuliskan aR^*b berarti terdapat path dalam R dengan suatu panjang dari a ke b.

Teorema 2.3. [2] Jika R relasi pada himpunan A maka $R^* = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$.

Bukti.

Dari definisi 2, untuk setiap $n > 0$, $R^n = \{(a,b) \in A \times A \mid \text{terdapat path dalam } R \text{ dengan panjang } n \text{ dari } a \text{ ke } b\}$. Sehingga berdasarkan definisi 3, $R^* = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$.

Dari teorema 2 dan teorema 3, didapatkan transitif klosur $t(R) = R^*$. ■

Teorema 2.4. [5] Jika R relasi pada himpunan A yang mempunyai n elemen, maka $t(R) = R^* = \bigcup_{i=1}^{n} R^i$.

Bukti.

Teorema ini cukup ditunjukkan bahwa $R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} R^i$ untuk setiap $k > 0$. Misalkan $(x,y) \in R^k$, maka terdapat path terhubung dengan panjang k dari x ke y dalam digraphnya dan dengan menghapus cycle dari path ini, dapat dibentuk sebuah path terhubung sederhana dari x ke y. Karena path sederhana terpanjang yang mungkin dalam digraph dengan n vertek mempunyai panjang n, maka $(x,y) \in R^i$ untuk *suatu* $0 < i \le n$. Oleh karena itu $R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} R^i$ untuk k > 0. Jadi terbukti $t(R) = \bigcup_{i=1}^{n} R^i$. ■

Ada beberapa metode/cara untuk menentukan transitif klosur yaitu:

a. Metode graphical
b. Metode matriks
c. Algoritma Warshall

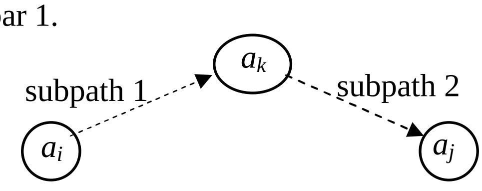
Dalam penulisan ini, metode yang digunakan dalam menentukan transitif klosur adalah algoritma Warshall.

Misalkan R adalah relasi pada himpunan $A = \{ a_1 , a_2 , ..., a_n\}$. Jika a_1 , a_2 , ..., a_n adalah path pada R maka semua vertek selain a_1 dan a_n disebut vertek-vertek interior (interior vertices) dari path tersebut.

Definisi 4 [4] Misalkan R adalah relasi pada himpunan $A = \{ a_1 , a_2 , ..., a_n\}$. Untuk $k = 1,2, \ldots,n$, matriks Boolean W_k mempunyai nilai 1 pada elemen ke (i,j) jika dan hanya jika terdapat path dari a_i ke a_j dalam R yang vertek interiornya (jika ada) berasal dari himpunan $A_k= \{a_1,a_2, ..., a_k\}$.

Dari definisi 4, matriks W_n mempunyai nilai 1 pada elemen ke (i,j) jika dan hanya jika terdapat path dalam R yang menghubungkan a_i ke a_j. Dengan kata lain $W_n = M_{R^*}$. Jika didefinisikan W_0 sebagai M_R, maka dipunyai barisan $W_0, W_1, \ldots, W_n$ dengan suku pertama adalah M_R dan suku terakhir = M_{R^*} (matriks transitif klosur dari R). Masing-masing matriks W_k ditentukan dari matriks W_{k-1}. Langkah-langkah dalam mencapai matiks R^* dari matriks R inilah yang dinamakan algoritma Warshall. Berikut akan ditunjukkan bagaimana menentukan matriks W_k dari matriks W_{k-1}.

Misalkan $W_k = [t_{ij}]$ dan $W_{k-1} = [s_{ij}]$. Jika $t_{ij} = 1$ maka harus ada path dari a_i ke a_j yang vertek interiornya berada dalam himpunan $A_k =\{a_1 , a_2 , ..., a_k\}$. Jika vertek a_k bukan vertek interior dari path ini, maka semua vertek interior harus berasal dari himpunan $A_{k-1} = \{ a_1 , a_2 , ..., a_{k-1}\}$, sehingga $s_{ij} = 1$. Jika a_k vertek interior dari path, maka situasinya seperti dalam gambar 1.



Gambar 1. a_k termasuk vertek interior dari path a_i ke a_j

Diasumsikan bahwa semua vertek interior adalah berbeda. Jadi a_k hanya terlihat sekali di dalam path ini, sehingga semua vertek interior dari subpath 1 dan subpath 2 harus berasal dari himpunan $\{ a_1 , a_2 , ..., a_{k-1}\}$. Ini berarti bahwa $s_{ik} = 1$ dan $s_{kj} = 1$.

Sehingga diperoleh $t_{ij} = 1$ jika dan hanya jika:

$$\left.\begin{array}{l} (i).\ s_{ij} = 1 \quad atau \\ (ii).\ s_{ik} = 1 \quad dan\ \ s_{kj} = 1 \end{array}\right\} \ldots \qquad (2.1)$$

Persamaan (2.1) merupakan dasar dari algoritma Warshall. Jika matriks W_{k-1} bernilai 1 pada elemen ke *(i,j)* maka dengan persamaan (2.1) (i) W_k juga bernilai 1 pada elemen ke *(i,j)*. Dengan menggunakan persamaan (2.1) (ii), nilai 1 yang baru dapat ditambahkan pada elemen ke *(i,j)* pada matrik W_k jika dan hanya jika kolom ke k dari W_{k-1} bernilai 1 di posisi i dan baris k dari W_{k-1} bernilai 1 pada posisi j. Jadi prosedur untuk menentukan W_k dari W_{k-1} sesuai dengan referensi [4] adalah sebagai berikut.

Langkah 1 : Transfer ke W_k semua nilai 1 dalam W_{k-1}.

Langkah 2 : Tandai lokasi p_1 , p_2 , ... dalam kolom k dari W_{k-1} yang inputnya 1 dan lokasi q_1,q_2 , ... dalam baris k dari W_{k-1} yang inputnya 1.

Langkah 3 : Letakkan 1 pada semua posisi p_i , q_j yang ditandai dari W_k (jika elemen pada (p_i,q_j) bernilai 0)

Contoh 1

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ dan relasi pada himpunan A adalah:

$R = \{(a,b) \in A \times A \,/\, a^2+b^2 = 5 \vee b=a+1\}$, sehingga $R = \{(1,2), (2,3), (3,4), (2,1)\}$.

Transitif klosur dari R dengan algoritma Warshall dapat diselesaikan sebagai berikut.

Matriks relasi R adalah:

$$M_R = W_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Karena himpunan A mempunyai 4 anggota, maka $n = 4$. Kemudian menentukan W_k, untuk $k = 1, 2, 3,$ dan 4

a. Menentukan W_1 $(k = 1)$

W_0 mempunyai nilai 1 pada lokasi ke 2 dari kolom 1 dan lokasi ke 2 pada baris 1. Jadi W_1 seperti W_0 ditambah nilai 1 yang baru pada elemen ke (2,2).

$$W_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b. Menentukan W_2 $(k = 2)$

Perhatikan kolom 2 dan baris 2 dari W_1. Matriks W_1 mempunyai nilai 1 pada lokasi 1 dan 2 dari kolom 2 dan lokasi 1, 2 dan 3 dari baris 2 sehingga untuk mendapatkan W_2, nilai 1 harus diletakkan pada elemen ke (1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2) dan (2,3) dari matriks W_1 (jika pada elemen tersebut belum bernilai 1). Jadi:

$$W_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c. Menentukan W_3 $(k = 3)$

Kolom ke 3 dari W_2 bernilai 1 pada lokasi 1 dan 2, dan baris ke 3 dari W_2 bernilai 1 pada lokasi 4. Untuk mendapatkan W_3, pada elemen ke (1,4) dan (2,4) dari W_2 harus bernilai 1, Jadi:

$$W_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d. Menentukan W_4 $(k = 4)$

W_3 mempunyai nilai pada lokasi 1, 2, 3 dari kolom 4 dan tidak ada nilai pada baris ke 4, sehingga tidak ada nilai 1 yang baru yang ditambahkan jadi $M_R^* = W_4 = W_3$.

M_R^* merupakan matriks transitif klosur dari R. Jadi transitif klosur dari R adalah:

$$t(R) = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,4)\}.$$

B. Relasi Ekuivalensi

Definisi 2.5. [1] Relasi R pada himpunan *i* disebut *refleksif* jika dan hanya jika aRa untuk setiap $a \in A$.

Dengan melihat matriks suatu relasi dapat ditentukan apakah relasi tersebut refleksif atau bukan. Diagonal utama dari matriks relasi refleksif semuanya bernilai 1.

Definisi 2.6. [1] Relasi pada himpunan A disebut *simetris* jika dan hanya jika aRb maka bRa, untuk semua $a, b \in A$.

Matriks relasi simetris $M_R = [m_{ij}]$ mempunyai sifat sebagai berikut :

Jika $m_{ij} = 1$ maka $m_{ji} = 1$ atau jika $m_{ij} = 0$ maka $m_{ji} = 0$. [4]

Jadi matriks tersebut simetris terhadap diagonal utama atau $M_R = M_R^T$.

Definisi 2.7. [1] Relasi R pada himpunan A disebut *transitif* jika dan hanya jika aRb dan bRc maka aRc, untuk semua $a, b, c \in A$.

Dilihat dari matriksnya, menentukan relasi transitif tidaklah semudah pada relasi refleksif dan simetris. Matriks relasi transitif $M_R = [m_{ij}]$ mempunyai ciri–ciri sebagai berikut:

Jika $m_{ij} = 1$ dan $m_{jk} = 1$ maka $m_{ik} = 1$

Definisi 8 [1] Relasi R pada himpunan A disebut *relasi ekuivalensi* jika dan hanya jika R mempunyai sifat refleksif, simetris dan transitif.

C. Transitif Klosur dari Gabungan Dua Relasi Ekuivalensi pada Suatu Himpunan

Salah satu aplikasi transitif klosur adalah pada relasi ekuivalensi. Misal R dan S adalah relasi ekuivalensi pada himpunan A, akan dicari suatu relasi ekuivalensi terkecil yang di dalamnya memuat R dan S. Untuk mencari relasi tersebut berarti sama dengan menentukan transitif klosur dari gabungan dua relasi ekuivalensi yang ada (R dan S).

Definisi 2.9. [2] Misalkan R relasi dari A ke B. *Invers dari relasi* R dinotasikan R^{-1} adalah relasi dari B ke A yang didefinisikan sebagai berikut

$$R^{-1} = \{(y,x) / xRy\}.$$

Teorema 2.4. [4] Misalkan R_1, R_2 relasi dari A ke B maka $(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$.

Bukti.

$(x,y) \in (R_1 \cup R_2)^{-1} \Leftrightarrow (y,x) \in R_1 \cup R_2$

$\Leftrightarrow (y,x) \in R_1 \vee (y,x) \in R_2$

$\Leftrightarrow (x,y) \in R_1^{-1} \vee (x,y) \in R_2^{-1}$

$\Leftrightarrow (x,y) \in R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$ ■

Teorema 2.5. [4] Misalkan R relasi pada A. R simetris jika dan hanya jika $R = R^{-1}$.

Bukti.

($\Rightarrow$) Bukti ini ada dua bagian, yaitu :

(i). Ambil sebarang $(x,y) \in R$. Karena R simetris maka $(y,x) \in R$. Dari definisi invers, maka $(x,y) \in R^{-1}$. Sehingga $R \subseteq R^{-1}$.

(ii). Ambil sebarang $(x,y) \in R^{-1}$. Dari definisi invers maka $(y,x) \in R$. Karena R simetris maka $(x,y) \in R$. Sehingga $R^{-1} \subseteq R$.

Jadi dari (i) dan (ii), terbukti $R = R^{-1}$.

($\Leftarrow$)Ambil sebarang $(x,y) \in R$. Dari definisi invers maka $(y,x) \in R^{-1}$. Karena $R = R^{-1}$ maka $(y,x) \in R$. Sehingga jika $(x,y) \in R$ maka $(y,x) \in R$. Berdasarkan definisi simetris, maka R simetris. ■

Teorema 6 [4] Jika R dan S relasi ekuivalensi pada himpunan A maka relasi ekuivalensi terkecil yang memuat R dan S adalah $(R \cup S)^*$.

Bukti.

Misalkan E adalah relasi persamaan (equality relation) yang didefinisikan sebagai berikut : $E = \{(x,x) / x \in A\}$. Suatu relasi adalah refleksif jika hanya jika relasi tersebut memuat E. $E \subseteq R$, $E \subseteq S$ sebab keduanya refleksif. Jadi $E \subseteq R \cup S \subseteq (R \cup S)^*$, sehingga $(R \cup S)^*$ juga refleksif.

Karena R dan S simetris, maka $R = R^{-1}$ dan $S = S^{-1}$. Jadi $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1} = R \cup S$, dan $R \cup S$ juga simetris. Oleh karena itu, semua path dalam $R \cup S$ mempunyai dua jalur yang arahnya berlawanan, sehingga $(R \cup S)^*$ juga simetris. Karena telah diketahui bahwa $(R \cup S)^*$ transitif, maka $(R \cup S)^*$ adalah relasi ekuivalensi yang memuat $R \cup S$. Relasi $(R \cup S)^*$ adalah yang terkecil, sebab tidak ada himpunan terkecil yang memuat $R \cup S$ yang dapat transitif, sesuai dengan definisi transitif klosur. ■

$(R \cup S)^*$ ini merupakan transitif klosur sekaligus relasi ekuivalensi terkecil dari gabungan dua relasi ekuivalensi R dan S pada himpunan A.

Contoh 2

Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dan relasi pada himpunan A adalah:

$R = \{(a,b) \in A \times A \,/\, a=b \vee (a$ ganjil, $b=a+1) \vee (a$ genap, $b=a-1)\}$, dan

$S = \{(a,b) \in A \times A \,/\, a=b \vee a^2+b^2=41\}$,

sehingga:

$R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (3,4), (4,3), (4,4), (5,5)\}$

$S = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (4,5), (5,4), (5,5)\}$

Jelas bahwa R dan S adalah relasi ekuivalensi. Akan dicari relasi ekuivalensi terkecil yang memuat R dan S. Matriks dari relasi R dan S adalah sebagai berikut:

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ dan}$$

$$M_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{R \cup S} = M_R \vee M_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Untuk mencari $M_{(R \cup S)}*$ dengan menggunakan algoritma Warshall. Pertama $W_0 = M_{R \cup S}$.

a). Menentukan W_1 $(k = 1)$
   Karena W_0 mempunyai nilai 1 di lokasi 1 dan 2 dari kolom 1 dan di lokasi 1 dan 2 pada baris 1, maka tidak ada nilai 1 yang baru yang ditambahkan pada W_0. Jadi $W_1 = W_0$.

b). Menentukan W_2 $(k = 2)$
   Karena W_1 mempunyai nilai 1 di lokasi 1 dan 2 dari kolom 2 dan di lokasi 1 dan 2 dari baris 2, maka tidak ada nilai 1 yang baru yang ditambahkan pada W_1. Jadi $W_2 = W_1$.

c). Menentukan W_3 $(k = 3)$
   Karena W_2 bernilai 1 di lokasi 3 dan 4 dari kolom 3 dan di lokasi 3 dan 4 dari baris 3, maka tidak ada nilai 1 yang baru yang ditambahkan pada W_2. Jadi $W_3 = W_2$.

d). Menentukan W_4 $(k = 4)$
   Karena W_3 bernilai 1 di lokasi 3, 4 dan 5 dari kolom 4 dan di lokasi 3, 4 dan 5 dari baris 4, maka untuk membentuk W_4 harus ditambahkan nilai 1 baru pada W_3 di elemen ke (3,5) dan (5,3). Jadi :

$$W_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e). Menentukan W_5 $(k = 2)$
   Karena W_4 mempunyai nilai 1 pada lokasi 3, 4 dan 5 dari kolom 5 dan lokasi 3, 4 dan 5 dari baris 5, maka tidak ada nilai 1 baru yang ditambahkan pada W_5. Jadi $W_4 = W_5$.

Jadi $t(R \cup S) = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (3,4), (3,5), (4,3), (4,4), (4,5), (5,3), (5,4), (5,5)\}$. Hasil $t(R \cup S)$ ini merupakan relasi ekuivalensi terkecil yang memuat R dan S.

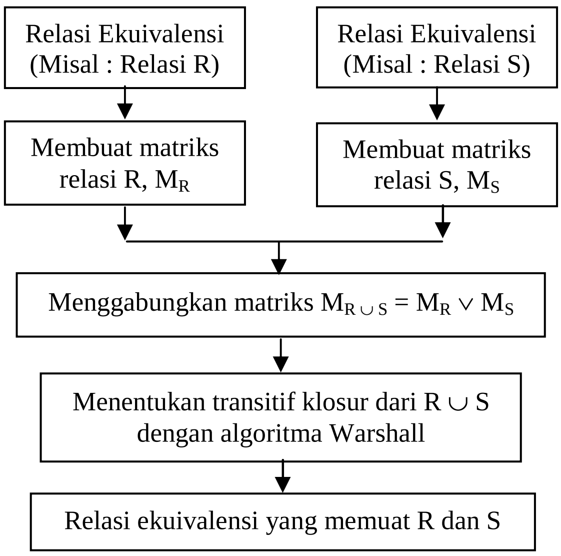
Penyelesaian dengan menggunakan program dapat dilihat pada contoh output di halaman selanjutnya.

D. Implementasi dalam Program Pascal dengan Struktur Data Dinamis

Dari pembahasan sebelumnya, langkah-langkah dalam menentukan transitif klosur dari gabungan dua relasi ekuivalensi pada suatu himpunan agar mendapatkan relasi ekuivalensi terkecil dapat digambarkan pada Gambar 2.

Langkah-langkah tersebut kemudian dibuat ke dalam program dengan bahasa pemrograman Turbo Pascal dan menggunakan struktur data dinamis.

Dalam membuat program, senarai yang digunakan adalah senarai banyak (multilist), sebab terkadang relasi yang ada pada suatu himpunan, hanya melibatkan beberapa elemen yang ada dalam himpunan tersebut. Sehingga struktur simpul matriks relasi dapat dilihat pada Gambar 3.



Gambar 2. Langkah-langkah menentukan relasi ekuivalensi terkecil dari gabungan dua relasi ekuivalensi pada suatu himpunan

Baris	Kolom
Bawah	Kanan

Gambar 3. Struktur simpul untuk matriks relasi

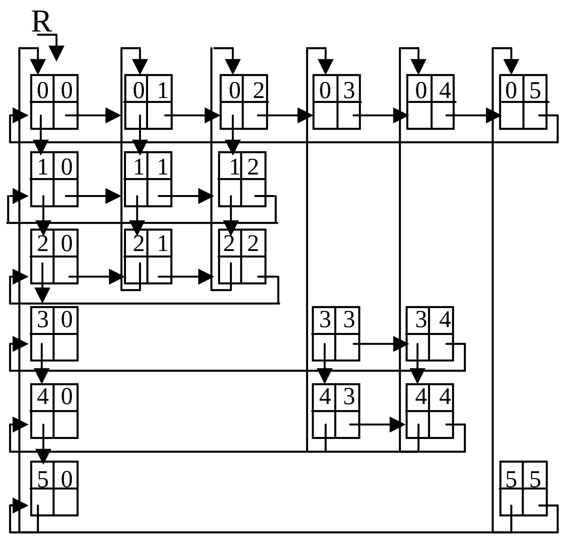
Baris dan Kolom menunjukkkan nomor baris dan nomor kolom yang bernilai 1. Tipe Baris dan Kolom adalah integer. Bawah dan Kanan masing-masing adalah pointer yang bertipe sama seperti gambar 3. Pointer Bawah menunjuk ke nomor baris berikutnya, pointer Kanan menunjuk ke kolom berikutnya.

Contoh 3

Matriks relasi *R* pada contoh *2* =

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Penyajian matriks di atas dengan senarai berantai banyak adalah sebagai berikut.



Gambar 4. Penyimpanan matriks relasi dengan senarai berantai banyak

Deklarasi simpul seperti di atas seperti dalam referensi [3] adalah:

```
type  Mat      = ^ Elemen;
      Elemen = record
                   Baris, Kolom   : integer;
                   Kanan, Bawah : Mat;
                   end;
```

Procedure yang digunakan dalam program adalah:

a) Procedure BUAT_SIMPUL:
   Digunakan untuk membuat simpul baru.
b) Procedure ADA_BARIS:
   Digunakan untuk mencek apakah nomor baris sudah ada.
c) Procedure ADA_KOLOM:
   Digunakan untuk mencek apakah nomor kolom sudah ada.
d) Procedure SISIP_ELEMEN:
   Digunakan untuk menyisipkan elemen matriks pada posisinya yang tepat.

e) Procedure TAMBAH_DATA:
Digunakan untuk menambah data pada relasi yang telah ada.
f) Procedure CETAK_MATRIKS:
Digunakan untuk mencetak bentuk matriks yang bernilai 1 dan 0.
g) Procedure CETAK_RELASI:
Digunakan untuk mencetak relasi dari suatu bentuk matriks.
h) Procedure GABUNGAN_MATRIKS:
Digunakan untuk menggabungkan dua buah matriks relasi.
i) Procedure TRANSITIF_KLOSUR:
Digunakan untuk menentukan transitif klosur dari sebuah matriks.
j) Procedure CEK_REFLEKSIF:
Digunakan untuk mengecek sifat refleksif dari suatu relasi.
k) Procedure CEK_SIMETRIS:
Digunakan untuk mengecek sifat simetris dari suatu relasi.
l) Procedure CEK_TRANSITIF:
Digunakan untuk mengecek sifat transitif dari suatu relasi.

Berikut contoh output program:

Tampilan menu pilihan

```
    PROGRAM TRANSITIF KLOSUR DARI
  GABUNGAN DUA RELASI EKUIVALENSI
        DALAM SUATU HIMPUNAN
   DENGAN STRUKTUR DATA DINAMIS

         >>> MENU PILIHAN <<<

 A. INPUT DATA (DUA RELASI
    EKUIVALENSI)
 B. MENAMBAH DATA
 C. OUTPUT MATRIKS RELASI
    EKUIVALENSI
 D. OUTPUT MATRIKS GABUNGAN DUA
    RELASI EKUIVALENSI
 E. TRANSITIF KLOSUR DARI GABUNGAN
    DUA RELASI EKUIVALENSI
 F. KESIMPULAN
 G. SELESAI

PILIH SALAH SATU (A..G atau a..g):
```

Tampilan menu pilihan A (Input Data)

```
+---------------------------------+
¦            PERHATIAN            ¦
¦1. Pemasukan data relasi         ¦
¦   ekuivalensi berdasarkan       ¦
¦   matriks relasinya yaitu hanya¦
¦   pada elemen yang bernilai 1. ¦
¦2. Jika Anda ingin mengakhiri    ¦
¦   pemasukan data, ketikkan      ¦
¦   bilangan 0 sesudah kata       ¦
¦   Nomor baris                   ¦
+---------------------------------+
```

Tampilan contoh pemasukan data relasi ekuivalensi (misal untuk data di contoh 2 halaman sebelumnya)

```
   PROGRAM TRANSITIF KLOSUR DARI
  GABUNGAN DUA RELASI EKUIVALENSI
        DALAM SUATU HIMPUNAN
   DENGAN STRUKTUR DATA DINAMIS

MASUKKAN POSISI ELEMEN YANG
BERNILAI 1 PADA MATRIKS RELASI
EKUIVALENSI PERTAMA:

Nomor baris : 1    Nomor kolom : 1
Nomor baris : 1    Nomor kolom : 2
Nomor baris : 2    Nomor kolom : 1
Nomor baris : 2    Nomor kolom : 2
Nomor baris : 3    Nomor kolom : 3
Nomor baris : 3    Nomor kolom : 4
Nomor baris : 4    Nomor kolom : 3
Nomor baris : 4    Nomor kolom : 4
Nomor baris : 5    Nomor kolom : 5
Nomor baris : 0

MASUKKAN POSISI ELEMEN YANG
BERNILAI 1 PADA MATRIKS RELASI
EKUIVALENSI KEDUA:

Nomor baris : 1    Nomor kolom : 1
Nomor baris : 2    Nomor kolom : 2
Nomor baris : 3    Nomor kolom : 3
Nomor baris : 4    Nomor kolom : 4
Nomor baris : 4    Nomor kolom : 5
Nomor baris : 5    Nomor kolom : 4
Nomor baris : 5    Nomor kolom : 5
Nomor baris : 0


 >> CEK TERPENUHINYA SYARAT RELASI
          EKUIVALENSI <<

Ingat : Relasi dikatakan relasi
        ekuivalensi jika dan hanya
        jika relasi tersebut
        mempunyai sifat refleksif,
        simetris, dan transitif

Relasi PERTAMA merupakan relasi
refleksif
Relasi PERTAMA merupakan relasi
simetris
Relasi PERTAMA merupakan relasi
transitif
Relasi PERTAMA merupakan relasi
ekuivalensi
```

```
Relasi KEDUA merupakan relasi
refleksif
Relasi KEDUA merupakan relasi
simetris
Relasi KEDUA merupakan relasi
transitif
Relasi KEDUA merupakan relasi
ekuivalensi
```

Tampilan menu pilihan C (Matriks Relasi Ekuivalensi)

```
    PROGRAM TRANSITIF KLOSUR DARI
  GABUNGAN DUA RELASI EKUIVALENSI
        DALAM SUATU HIMPUNAN
   DENGAN STRUKTUR DATA DINAMIS

 >> MATRIKS RELASI EKUIVALENSI <<
==================================

MATRIKS RELASI EKUIVALENSI
PERTAMA:

 1       1       0       0       0
 1       1       0       0       0
 0       0       1       1       0
 0       0       1       1       0
 0       0       0       0       1

MATRIKS RELASI EKUIVALENSI KEDUA:

 1       0       0       0       0
 0       1       0       0       0
 0       0       1       0       0
 0       0       0       1       1
 0       0       0       1       1
```

Tampilan menu pilihan D (Matriks Gabungan Dua Relasi Ekuivalensi)

```
    PROGRAM TRANSITIF KLOSUR DARI
  GABUNGAN DUA RELASI EKUIVALENSI
        DALAM SUATU HIMPUNAN
   DENGAN STRUKTUR DATA DINAMIS

   >> GABUNGAN DUA BUAH MATRIKS
       RELASI EKUIVALENSI <<
==================================

MATRIKS HASIL GABUNGAN:

 1       1       0       0       0
 1       1       0       0       0
 0       0       1       1       0
 0       0       1       1       1
 0       0       0       1       1
```

Tampilan menu pilihan E (Transitif Klosur dari Gabungan Dua Relasi Ekuivalensi)

```
   PROGRAM TRANSITIF KLOSUR DARI
  GABUNGAN DUA RELASI EKUIVALENSI
       DALAM SUATU HIMPUNAN
   DENGAN STRUKTUR DATA DINAMIS

      >>TRANSITIF KLOSUR DARI
     GABUNGAN DUA BUAH MATRIKS
       RELASI EKUIVALENSI<<
===================================
Matriks W(1):
 1       1       0       0       0
 1       1       0       0       0
 0       0       1       1       0
 0       0       1       1       1
 0       0       0       1       1

Matriks W(2):
 1       1       0       0       0
 1       1       0       0       0
 0       0       1       1       0
 0       0       1       1       1
 0       0       0       1       1

TEKAN ENTER UNTUK MELANJUTKAN !!


Matriks W(3):
 1       1       0       0       0
 1       1       0       0       0
 0       0       1       1       0
 0       0       1       1       1
 0       0       0       1       1

Matriks W(4):
 1       1       0       0       0
 1       1       0       0       0
 0       0       1       1       1
 0       0       1       1       1
 0       0       1       1       1

TEKAN ENTER UNTUK MELANJUTKAN !!


Matriks W(5):
 1       1       0       0       0
 1       1       0       0       0
 0       0       1       1       1
 0       0       1       1       1
 0       0       1       1       1

MATRIKS HASIL TRANSITIF KLOSUR :
 1       1       0       0       0
 1       1       0       0       0
 0       0       1       1       1
 0       0       1       1       1
 0       0       1       1       1
```

```
Jadi transitif klosur dari gabung-
an dua relasi ekuivalensi(R dan S)
adalah
t(R U S) = {(1,1),(1,2),(2,1),
(2,2),(3,3),(3,4),(3,5),(4,3),
(4,4),(4,5), (5,3),(5,4),(5,5)}
```

Tampilan menu pilihan F (Kesimpulan)

```
    PROGRAM TRANSITIF KLOSUR DARI
  GABUNGAN DUA RELASI EKUIVALENSI
        DALAM SUATU HIMPUNAN
   DENGAN STRUKTUR DATA DINAMIS
          >> KESIMPULAN <<
            ============

Dua relasi ekuivalensi R dan S
dari matriks relasi yang diketahui
adalah :
R = {(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),
    (3,3),(3,4),(4,3),(4,4),(5,5)}
S = {(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),
    (4,5),(5,4),(5,5)}

Relasi ekuivalensi terkecil yang
mengandung R dan S adalah
{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),
(3,4),(3,5),(4,3),(4,4),(4,5),
(5,3),(5,4),(5,5)}
```

3. PENUTUP

Dari pembahasan yang telah dikemukakan sebelumnya, maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Transitif klosur dari suatu relasi merupakan relasi transitif terkecil yang mengandung R, sedangkan transitif klosur dari gabungan dua relasi ekuivalensi merupakan relasi ekuivalensi terkecil yang mengandung dua relasi yang diketahui.
2. Algoritma Warshall dapat digunakan untuk menentukan relasi ekuivalensi terkecil dari gabungan dua relasi ekuivalensi pada suatu himpunan dengan cara menentukan transitif klosur dari gabungan kedua relasi ekuivalensi tersebut.
3. Penyimpanan matriks relasi dengan senarai berantai banyak dapat menghemat memori sebab elemen nol pada matriks tersebut tidak ikut tersimpan.

4. DAFTAR PUSTAKA

[1] Barnier, W., Feidman, N. (1990), *Introduction to Advanced Mathematics*, Prentice-hall International, New Jersey: 116 - 153.

[2] Fletcher, Hoyle, Patty (1991), *Foundations of Discrete Mathematics*. PWS Kent Publishing Company, Boston: 319 - 409.

[3] Insap Santosa, P. (1992) *Struktur Data Menggunakan Turbo Pascal 6.0*, Andi Offset, Yogyakarta: 221-246.

[4] Kolman, B. (1987), *Discrete Mathematical Structures for Computer Science*, Prentice-hall Inc, New Jersey: 85 - 151.

[5] Ross, K A., Wright, C.R.B. (1992), *Discrete Mathematics*, Third Edition, Prentice-hall International, New Jersey: 563 - 571.