SINGULARITAS JUMLAHAN SOLUSI FUNDAMENTAL PERSAMAAN DIFUSI DALAM PEMODELAN TRANSFER MASSA

Edi Cahyono
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Haluoleo Kendari
Kartono
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Diponegoro Semarang

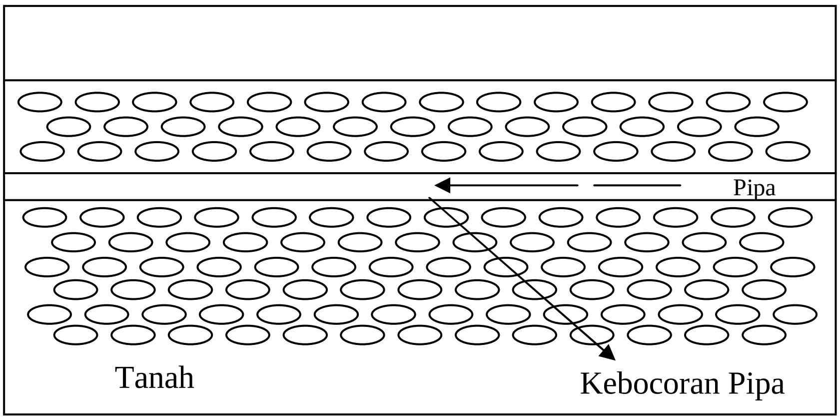
Abstract. This paper discusses the sum of fundamental solutions of 2-D diffusion equation (for constant diffusion rate). Although a linear diffusion equation is considered, the sum of fundamental solutions is not automatically a solution. This is because of the presence of a singularity at the origin O. In this paper, it will be shown that the sum of fundamental solutions is a solution of the primitive of diffusion equation, diffusion equation in an integral form. It is also shown that the sum of fundamental solutions represents mass tranfer process caused by a source that impulsively releases some amount of mass.

Keywords: fundamental solution, singularity point, mass transfer.

1. PENDAHULUAN.

Makalah ini dimotivasi oleh permasalahan yang muncul pada indutri kimia. Jaringan pipa seringkali ditanam di dalam tanah di bawah komplek pabrik. Cairan kimia dialirkan dari suatu proses industri ke proses yang lain melaui pipa-pipa tersebut. Terdapat kemungkinan pipa mengalami kebocoran, dan mengakibatkan terjadinya polusi air tanah oleh cairan kimia (Gambar 1). Polusi ini dapat diindikasikan oleh konsentrasi zat kimia tersebut, yang berlaku sebagi polutan pada air tanah. Konsentrasi ini secara terus-menerus dipantau melalui sumur-sumur pengamatan tersebut merupakan suatu keharusan untuk meminimalkan dampak industri terhadap kerusakan lingkungan.

Sangat diharapkan dapat dikembangkannya suatu metode untuk menentukan lokasi kebocoran berdasarkan data yang diperoleh dari sumur-sumur pengamatan. Dalam makalah ini diasumsikan bahwa zat kimia menyebar dalam medium dua dimensi, dan penyebarannya memenuhi persamaan difusi dengan difusivitas konstan. Model ini mempunyai apa yang disebut solusi fundamental. Solusi ini mempunyai singularitas di titik pusat koordinat O(0 , 0) pada saat $t = 0$ yang dapat diabaikan dengan hanya memperhatikan $t > 0$.



Gambar. 1. Pipa dalam tanah

Titik pusat O diinterpretasikan sebagai sumber polusi atau pipa yang bocor. Jumlahan solusi fundamental persamaan difusi ini merupakan alat yang akan digunakan untuk mengembangkan metode yang dimaksud tadi. Sumber polusi ini melepaskan polutan secara berdenyut [3]. Jumlahan ini dapat menyajikan suatu cara untuk menelusuri letak sumber polusi dengan memformulasikan permasalahannya dalam apa yang disebut *signaling problem* (permasalahan signal).

Perumusan permasalahan kebocoran pipa dalam *signaling problem* ini dimotivasi aplikasi yang telah dilakukan pada persamaan KdV dalam [6] untuk gelombang optik dan dalam [1] untuk gelombang air. S*ignaling problem* telah digunakan pada model yang lebih komplek, yaitu persamaan-persamaan dasar untuk gelombang permukaan [9] . Dalam dua makalah terakhir, *signaling problem* digunakan untuk memprediksi profile gelombang (yang dituliskan dalam bentuk deret Fourier) pada beberapa titik berdasarkan signal yang diberikan pada pembangkit gelombang.

Sebagai langkah awal dalam pengembangan metode tersebut, makalah ini hanya akan membahas beberapa sifat jumlahan solusi fundamental, khususnya yang berhubungan dengan pertanyaan apakah jumlahan ini masih merupakan solusi persamaan difusi. Untuk itu dibahas kekontinuan jumlahan solusi fundamental dan disajikan pada pokok bahasan 3. Selanjutnya pada pokok bahasan 4 dibahas apakah solusi ini memenuhi sifat konservasi massa. Pada pokok bahasan 5 disajikan hal yang utama dalam makalah ini dengan menunjukkan apakah jumlahan ini masih dapat merepresentasikan transfer massa dengan segala asumsinya. Hal ini dilakukan dengan mencari jawab apakah jumlahan ini merupakan solusi persamaan difusi atau primitifnya. Makalah ini diakhiri dengan kesimpulan dan arah riset mendatang.

2. MATEMATIKA PERAMBATAN POLUTAN UNTUK SUMBER BERDENYUT

Pembahasan dibatasi pada medium dimensi dua ($\Re^2$), kedalaman diabaikan. Asumsi ini membatasi bahwa polutan hanya menyebar pada permukaan, misalkan hanya pada permukaan air tanah tetapi tidak masuk ke dalam air di bawah permukaan. Diasumsikan pula sumber polusi (pipa yang bocor) mengeluarkan polutan secara berdenyut, sebanyak a_n saat $t = t_n$. Dalam [3], perambatan polutan yang de-mikian secara matematis dinyatakan oleh

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{4\pi(t-t_n)} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4(t-t_n)}\right), \qquad (2.1)$$

untuk $t_N < t \leq t_{N+1}$.

Lebih jelasnya (2.1) diuraikan sebagai berikut. Perhatikan bahwa pada saat $t = t_1$ sumber melepaskan polutan sebanyak a_1. Polutan ini kemudian menyebar ke sekelilingnya. Sampai $t = t_2$ yaitu tepatnya pada interval waktu $t_1 < t \leq t_2$, penyebaran ini sesuai dengan

$$u(x, y, t) = \frac{a_1}{4\pi(t-t_1)} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4(t-t_1)}\right) . \qquad (2.2)$$

Perhatikan bahwa penyebaran polutan ini tidak dipengaruhi oleh adanya massa polutan lain. Dalam bentuk persamaan (2.2). khususnya untuk $a_1 = 1$ dan $t_1 = 0$ sering disebut sebagai solusi fundamental persamaan difusi pada media dimensi dua. Solusi fundamental ini pada media dimensi satu dikenal sebagai fungsi distribusi normal dengan varian $\sqrt{t}$ dan mempunyai bentuk

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{t}\right) . \qquad (2.3)$$

Pada saat $t = t_2$, sumber polusi melepaskan polutan lagi, sebanyak a_2. Polutan yang dilepaskan ini kemudian menyebar, sementara polutan yang dilepaskan pertama kali juga terus menyebar. Pada waktu $t_2 < t \leq t_3$ penyebaran keduanya memenuhi

$$u(x, y, t) = \frac{a_1}{4\pi(t-t_1)}\exp(-\frac{x^2+y^2}{4(t-t_1)}) + \frac{a_1}{4\pi(t-t_2)}\exp(-\frac{x^2+y^2}{4(t-t_2)}). \qquad (2.4)$$

Suku pertama ruas kanan (2.4) menyatakan penyebaran polutan yang dilepaskan pertama kali, sedangkan suku kedua menyatakan penyebaran polutan yang dilepaskan kedua. Bila hal ini berlangsung terus menerus sampai dengan N kali, model penyebarannya adalah seperti yang disajikan oleh persamaan (2.1).

3. KEKONTINUAN JUMLAHAN SOLUSI FUNDAMENTAL

Pembahasan kekontinuan jumlahan fundamental tidak mengikutsertakan titik pusat O. Hal ini karena di titik ini khususnya pada saat $t = t_N$ untuk $N = 1, 2, 3, \ldots$ bersifat singular yaitu saat sumber melepaskan polutan. Perhatikan bahwa setiap suku pada ruas kanan (2.1) mempunyai bentuk

$$\frac{a_1}{4\pi(t-t_n)}\exp(-\frac{x^2+y^2}{4(t-t_n)}). \qquad (3.1)$$

Untuk $t \neq t_n$ serta x dan y tidak keduanya nol, jelaslah (3.1) kontinu yang mengakibatkan jumlahannya juga kontinu. Lebih dari itu, per definisi (2.1) memberikan

$$\lim_{t\to t_N^+} u(x,y,t) = \sum_{n=1}^{N-1}\frac{a_n}{4\pi(t-t_n)}\exp(-\frac{x^2+y^2}{4(t-t_n)}) = u(x,y,t_{N-1}).$$

Dengan demikian, yang menjadi perhatian utama adalah pada saat $t \to t_N^+$. Untuk itu, akan disekilidi suku-suku dalam (2.1), bagaimana bila x dan y tidak keduanya nol.

$$\lim_{t\to t_N^+}\frac{1}{(t-t_n)}\exp(-\frac{x^2+y^2}{4(t-t_n)}) = 0 \ . \qquad (3.2)$$

Perhatikan bahwa ruas kiri pada (3.2) terdiri dari dua bagian, yaitu $\frac{1}{(t-t_n)}$ dan $\exp(-\frac{x^2+y^2}{4(t-t_n)})$. Untuk $t \to t_n^+$, $\frac{1}{(t-t_n)}$ menuju tak hingga sedangkan $\exp(-\frac{x^2+y^2}{4(t-t_n)})$ secara eksponensial menuju nol. Membuktikan (3.2) serupa dengan membuktikan

$$\lim_{\tau\to\infty}\tau\exp(-\tau) = 0 \ . \qquad (3.3)$$

Seperti halnya (3.2) , ruas kiri (3.3) terdiri dari dua bagian, dalam hal ini τ yang menuju tak hingga dan exp($-\tau$) yang secara eksponensial menuju nol untu $\tau \to \infty$. Pertanyaannya adalah mana yang lebih kuat dan lebih dominan di antara keduanya. Dominasi ini yang akan menentukan limit hasil kalinya. Bukti formalnya diberikan sebagai berikut.

Misalkan ε sembarang bilangan positif, maka terdapat bilangan $M(\varepsilon)$ dengan $M(\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}$. Di sisi lain, bila $\tau > 1$ kita mempunyai ketidaksamaan

$$\exp(\tau) > \tau^2 \ . \qquad (3.4)$$

Akibatnya untuk semua $\tau > M(\varepsilon)$ berlaku

$$|\tau\exp(-\tau)| = \tau \exp(-\tau) < \frac{1}{\tau} < \varepsilon \ . \qquad (3.5)$$

Ini telah membuktikan (3.3).

Dengan demikian,

$$\lim_{t\to t_N^+} u(x,y,t) =$$

$$\lim_{t\to t_N^+}\sum_{n=1}^{N-1}\frac{a_n}{4\pi(t-t_n)}\exp(-\frac{x^2+y^2}{4(t-t_n)}) + \lim_{t\to t_N^+}\frac{a_N}{4\pi(t-t_N)}\exp(-\frac{x^2+y^2}{4(t-t_N)})$$

$$= \sum_{n=1}^{N-1}\frac{a_1}{4\pi(t-t_n)}\exp(-\frac{x^2+y^2}{4(t-t_n)}) + 0$$

$$= u(x,y,t_{n-1})$$

$$= \lim_{t\to t_N^+} u(x,y,t) .$$

Ini menunjukkan bahwa untuk $t \to t_1$, (2.1) kontinu pada bidang-xy kecuali di O. Di sisi lain, singularitas untuk x dan y keduanya nol ditunjukkan dengan

$$\lim_{t\to t_N^+}\frac{1}{(t-t_n)}\exp(-\frac{x^2+y^2}{4(t-t_n)}) = \lim_{t\to t_N^+}\frac{1}{(t-t_n)} = \infty . \qquad (3.6)$$

4. INTEGRAL JUMLAHAN SOLUSI FUNDAMENTAL: KONSERVASI MASSA

Pada bagian ini akan ditunjukkan bahwa (2.1) memenuhi hukum konservasi massa, yaitu bahwa massa begitu dilepaskan dari titik O tidak bertambah atau berkurang. Penambahan massa yang menyebar semata-mata hanya karena sumber melepaskan massa lagi. Untuk itu akan diselidiki suku-suku (2.1) setelah membuang koefisien a_n, yaitu apakah

$$\frac{1}{(t-t_n)}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4(t-t_n)}\right). \qquad (4.1)$$

Memenuhi konservasi massa. Secara matematis, perlu ditunjukkan bahwa integral (4.1) pada seluruh bidang harus konstan, yaitu

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t-t_n)}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4(t-t_n)}\right)dxdy = c, \qquad (4.2)$$

dengan $c =$ konstan.

Untuk itu harus ditunjukkan bahwa integral (4.1) tidak bergantung pada waktu.

Dengan melakukan transformasi $t' = t - t_n$, laju dilanjutkan dengan $x = 2x'\sqrt{t'}$ dan $y = 2y'\sqrt{t'}$, kita mempunyai hubungan integral berikut.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t-t_n)}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4(t-t_n)}\right)dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t'}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4t'}\right)dxdy$$

$$=4\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-(x'^2+y'^2))\,dx'dy'. \qquad (4.3)$$

Lebih dari itu, dengan transformasi dari koordinat Kartesius ke koordinat polar, diperoleh bahwa $x' = r\cos\theta$, $y' = r\sin\theta$ dan $r^2 = x'^2 + y'^2$. Dengan demikian

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-(x'^2+y'^2))\,dx'\,dy' =$$

$$\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{2\pi} exp(-r^2)\, r\, dr\, d\theta = \pi.$$

Jadi

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t-t_n)}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4(t-t_n)}\right)dx\,dy = 4\pi. \qquad (4.4)$$

Catatan:

- Transformasi $t' = t - t_n$ berarti mengubah awal perhitungan waktu. Pada penggunaan variabel t, sumber melepaskan massa pada saat $t = t_n$. Sedangkan pada variabel t', sumber dianggap melepaskan massa pada saat $t' = 0$.
- Integral (4.4) memberikan bahwa

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t-t_n)}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4(t-t_n)}\right)dx\,dy = a_n. \qquad (4.5)$$

5. JUMLAHAN SOLUSI FUNDAMENTAL DAN PERSAMAAN DIFUSI

Pada bagian ini dibahas mengenai turunan jumlahan solusi fundamental (2.1) terhadap t, x dan y. Lebih tepatnya akan dicari $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ dan $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. Selanjutnya akan diselidiki apakah (2.1) merupakan solusi atas persamaan difusi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (5.1)$$

Atau persamaan primitifnya

$$\int \frac{\partial u}{\partial t} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) dxdy = 0. \qquad (5.2)$$

Hal ini penting karena solusi (5.1) dan (5.2) merupakan jaminan bagi (2.1) untuk menjadi model perambatan massa polutan berdasarkan asumsi pada bagian 2. Perlu dicatat bahwa meskipun solusi fundamental merupakan solusi persamaan (5.1), tetapi ini bukan merupakan jaminan bagi jumlahannya. Hal ini terutama disebabkan oleh singularitasnya di titik O.

Catatan:

Persamaan difusi (5.1) dipeoleh dari persamaan yang lebih primitif (5.2) dengan asumsi bahwa integran persamaan (5.2) kontinu untuk semua x, y dan t yang diperhatikan, dalam makalah ini $(x, y) \in \Re^2$ dan $t > 0$. Detil penurunan persamaan difusi dapat dilihat pada beberapa buku teks standar [7].

Pertama, perhatikan bahwa untuk $t < t_n$, kita mempunyai

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{(t-t_n)}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4(t-t_n)}\right)\right) = \left(\frac{x^2+y^2}{4(t-t_n)^3} - \frac{1}{(t-t_n)}\right)\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4(t-t_n)}\right). \tag{5.3}$$

Turunan pertama u terhadap t untuk $t_N < t < t_{N+1}$ adalah

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{4\pi}\left(\frac{x^2+y^2}{4(t-t_n)^3} - \frac{1}{(t-t_n)}\right)\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4(t-t_n)}\right) . \tag{5.4}$$

Di sisi lain, untuk $t < t_n$, turunan pertama dan kedua masing-masing suku ruas kanan (2.1) terhadap x diberikan oleh

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{(t-t_n)}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4(t-t_n)}\right)\right) = -\frac{x}{2(t-t_n)^2}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4(t-t_n)}\right). \tag{5.5}$$

Dan

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{(t-t_n)}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4(t-t_n)}\right)\right) = \left(\frac{x^2}{4(t-t_n)^3} - \frac{1}{2(t-t_n)^2}\right)\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4(t-t_n)}\right). \tag{5.6}$$

Secara sama kita mempunyai

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{(t-t_n)}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4(t-t_n)}\right)\right) = \left(\frac{y^2}{4(t-t_n)^3} - \frac{1}{2(t-t_n)^2}\right)\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4(t-t_n)}\right) . \tag{5.7}$$

Dengan demikian turunan kedua u terhadap x dan y adalah

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{4\pi}\left(\frac{x^2}{4(t-t_n)^3} - \frac{1}{2(t-t_n)^2}\right)\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4(t-t_n)}\right). \tag{5.8}$$

Dan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{4\pi}\left(\frac{y^2}{4(t-t_n)^3} - \frac{1}{2(t-t_n)^2}\right)\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4(t-t_n)}\right). \tag{5.9}$$

Perhatikan bahwa untuk $t_N < t < t_{N+1}$, u memenuhi persamaan difusi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} . \tag{5.10}$$

Pertanyaan utama pada makalah ini adalah apakah persamaan (5.4), (5.8) dan (5.9) memenuhi (5.10) untuk $t = t_n$ dengan n bilangan asli. Dengan mudah jawabnya adalah ya, kecuali di titik O karena di titik O, persamaan (5.4), (5.8) dan (5.9) tidak terdefenisi untuk $t = t_n$ dengan n bilangan asli. Kalau demikian, apakah (2.1) masih dapat digunakan sebagai model penyebaran polutan karena tidak memenuhi persamaan (5.10).

Kalau kita kembali pada penurunan persamaan difusi, (5.10) diperoleh dari asumsi bahwa persamaan (5.4), (5.8) dan (5.9) kontinu. Sebelum asumsi ini diterapkan, kita mempunyai persamaan yang lebih primitif yaitu

$$\int \frac{\partial u}{\partial t} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) dxdy = 0. \tag{5.11}$$

Singularitas ruas kiri (5.10) hanya pada titik O, karenanya (5.11) dipenuhi oleh u.

6. KESIMPULAN DAN RENCANA RISET MENDATANG

Pada makalah ini telah ditunjukkan sifat-sifat jumlahan solusi fundamental persamaan difusi dan interpretasinya dalam memodelkan difusi massa pada $\Re^2$. Telah ditunjukkan bahwa jumlahan solusi tersebut kontinu pada bidang $\Re^2$, kecuali singular di pusat sumbu koordinat. Singularitas ini menjadi kendala sehingga jumlahan solusi tersebut *bukan* solusi persamaan difusi. Namun demikian, singularitas yang hanya terjadi pada satu titik ini, masih menjamin bahwa jumlahan solusi tersebut merupakan solusi persamaan difusi yang lebih primitif. Persamaan yang terakhir ini merupakan model transfer massa dengan asumsi yang lebih lemah dengan memungkinkan singularitas pada berhingga titik.

Rencana riset mendatang akan diarahkan kepada tujuan utama untuk mengembangkan metode untuk mencari titik singular (yang merepresentasikan sumber polusi), berdasarkan diketahuinya data yang berupa fungsi waktu di beberapa titik. Metode ini akan memanfaatkan jumlahan solusi tersebut dalam menyelesaikan apa yang disebut *signaling problem.* Untuk tahap awal, secara bersamaan sedang ditulis makalah hasil riset tentang perbandingan penjalaran polutan dari sumber berdenyut ini dengan sumber kontinu [2]

Selain itu riset mendatang juga akan memperhatikan hal-hal lain apabila difusivitas medium tidak konstan. Untuk hal ini paling sederhana dapat mengikuti yang telah dilakukan oleh [4] untuk memodelkan proses pengeringan kayu. Untuk yang lebih komplek akan mengikuti model yang digunakan pada [5].

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis pertama mengucapkan terima kasih kepada Dr. Tjang Daniel Chandra dari Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Malang atas diskusi-diskusinya.

7. DAFTAR PUSTAKA

[1]. E. Cahyono. (2002), *Wave evolutions in a long laboratory basin,* J. Indonesian Math.Soc (MIHMI) **8**(4): 23-38.

[2]. E. Cahyono. (2005), *Modeling of mass transfer produced by impulsive and continuous sources,* dalam penulisan .

[3]. E. Cahyono and D.C. Tjang. (2004), *Aplikasi solusi fundamental persamaan difusi dalam pemodelan transfer massa*, MATEMATIKA: J. Matematika dan Pembelajarannya Universitas Negeri Malang, **X**(1) : 27-39

[4]. E. Cahyono & La Gubu. (2004), *Proses pengeringan kayu: pemodelan dengan difusivitas linier terhadap kelembaban,* Proceeding SEMINAR MIPA IV ITB, ISBN: 979-368-8-02-5, 112-114.

[5]. L.C. Evans. (1997), *Partial Differential Equa-tions,* AMS.

[6]. E. van Groesen, E Cahyono and A. Suryanto. (2002), *Uni-directional models for narrow and broadband pulse propagation in secobd order nonlinear me-dia,* Opt. Quant. Electron, **34**: 577-595

[8]. H.M. Taylor and S. Karlin. (1998), *An Introduction to Stochastic Modeling,* Academic Press, New York.

[9]. J. Zhang, L. Chen, M.Ye and R.E. Randall. (1996), *Hybrid wave model for unidirectional irregular wave-part I. Theory and numerical scheme.* Appl. Ocean Res., **18**: 77-92