EFISIENSI SISTEM BONUS MALUS SEBAGAI MODEL RANTAI MARKOV

Supandi
Jurusan Teknik Informatika Universitas AKI
Jl. Pemuda 95-97 Semarang
h_supandi@yahoo.co.uk

Abstract. Developed bonus malus system (BMS) is to make the premium paid by insured will be as closed as possible with expected occurrence of claim in every year basis. To study the efficiency of a BMS, we must previously observe the effect of claim frequency on value of premium. The efficiency of Bonus Malus System can be found through its Markov model; that is by found a stationary distribution in form of line vectors of its BMS Markov chain with its components as a function of claim frequency. In this paper, the BMS used is that of Brazil.

Keywords: bonus malus system, markov chain, stasionary, efficiency.

1. PENDAHULUAN

Premi asuransi dibentuk proposional dengan risiko yang terjadi. Khususnya dalam asuransi kendaraan bermotor/mobil premi dasar ditentukan berdasarkan besar, harga atau kapasitas dari kendaraan yang diasuransikan. Setelah masuk asuransi, penentuan besar premi pada tahun berikutnya hanya dipengaruhi oleh banyaknya kecelakaan dalam satu tahun periode sebelumnya. Dimana dengan adanya kecelakaan maka akan terjadi klaim. Sistem seperti penentuan premi seperti ini disebut dengan sistem bonus-malus (BMS). Sistem ini pertama kali diperkenalkan dan dikembangkan di Eropa pada awal tahun 1960 ([1],[2],[3]). Setiap negara jika tidak setiap perusahaan memiliki sistem BMS yang berbeda, yang memungkinkan lebih baik satu dari yang lainnya ([5],[6]). Penentuan premi dengan menggunakan sistem BMS dapat dipandang sebagai model *multiple state* (keadaan multipel). Dasar model stokastik keadaan multipel ini adalah rantai Markov dengan banyak keadaan berhingga. Sebagai ilustrasi perubahan premi kendaraan bermotor dari tahun pertama ke tahun kedua, dengan tahun pertama tidak ada klaim, atau ada satu klaim, atau dua klaim, dan seterusnya direalisasikan sebagai bentuk transisi dari keadaan. Dalam paper ini akan dibahas pengaruh perubahan besar premi terhadap nilai efisiensi dari sistem bonus malus, yaitu sistem bonus malus Brasil.

2. SISTEM BONUS MALUS

Sistem bonus-malus (BMS) mempresentasikan banyaknya tarif grup yang berhingga dan bergantung pada premi tahunan. Setiap tahun, tarif grup ditetapkan sebagai tarif grup dari tahun sebelumnya dan banyaknya klaim yang tercatat dari tertanggung asuransi pada perusahaan asuransi selama tahun itu. Jika tidak ada klaim atau klaim tidak tercatat maka tertanggung tersebut akan mendapat bonus yang berbentuk pengurangan nilai premi. Sedangkan jika terjadi klaim, paling sedikit satu klaim yang tercatat maka premi yang harus dibayar pada tahun berikutnya oleh tertanggung akan naik. Dengan kata lain jika dalam satu tahun periode terjadi klaim maka akan mendapat malus.

Sistem bonus-malus dapat dinyatakan sebagai berikut.

1. Banyaknya tarif grup berhingga di awal periode dari asuransi dinotasikan dengan C_i, dimana $i = 1,2,\ldots n$. Sedangkan banyaknya tarif grup di akhir periode asuransi dinotasikan dengan C_j, $j = 1,2\ldots n$. Tarif grup terendah disebut de-

ngan superbonus dan tarif grup tertinggi disebut dengan super-malus. Premi tahunan bergantung pada banyaknya tarif grup yang terjadi.

2. Prosentasi dari premi dasar r_i (dalam %) menotasikan prosentasi yang akan dikalikan dengan premi dasar sebagai premi berikutnya yang harus dibayar, dengan $r_1 \le r_2 \le r_3 \le \ldots\ldots \le r_n$.
3. Perpindahan dari tarif grup sebelumnya (ke-i) ke tarif grup berikutnya (ke-j) dengan k klaim yang tercatat, dinyatakan dengan

$$t_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{terjadi perpindahan dari tarif} \\ & \text{grup ke-}i\text{ ke tarif grup ke-}j. \\ 0, & \text{lainnya.} \end{cases} \tag{2.1}$$

Untuk selanjutnya, misalkan untuk seorang pemegang polis, klaim yang tercatat dalam satu tahun adalah berbentuk suatu barisan $X_1, X_2, \ldots X_m$ dari suatu peubah acak yang saling bebas dengan fungsi peluang bersama $\{q_k\}$. Dinotasikan bahwa $C_1, C_2, \ldots$ adalah tarif grup dari tahun ke tahun dari pemegang polis. Tarif grup tahun sebelumnya dengan banyaknya klaim yang tercatat. Dengan demikian maka permasalahan sistem bonus-malus dapat dipandang sebagai model rantai markov. Dengan menggunakan teori Markov, maka $\{C_n\}$ barisan peubah acak dengan ruang tarif grup berhingga. $\{C_n\}$ adalah Rantai Markov yang memiliki matrik $M=(p_{ij})$ sedemikian hingga untuk semua $n=1,2,\ldots$ dan $i_0, i_1, \ldots, i_n$,

$$\begin{aligned} Pr(C_n = i_n \mid C_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, C_0 = i_0) \\ = p_{(i_{n-1}, i_n)}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

dimana $Pr(C_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, C_0 = i_0) > 0$.

Menurut [8] peluang transisi p_{ij} merupakan peluang perpindahan dari tarif grup ke-i ke tarif grup ke-j dari pemegang polis dapat dituliskan sebagai

$$p_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} q_k t_{ij}(k).$$

Menurut ([4],[7]) banyaknya klaim (k) yang terjadi dan tercatat oleh pemegang polis diasumsikan memenuhi definisi proses Poisson dengan laju λ. Dengan menggunakan persamaan (2.1) maka matrik transisi p_{ij} dari rantai markov dapat menjadi

$$M(\lambda) = [\, p_{ij}(\lambda)\,] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} t_{ij}(k), \tag{2.3}$$

dengan $p_{ij}(\lambda) \ge 0$ dan $\sum_{k=0}^{n} p_{ij}(\lambda) = 1$.

Misal didefinisikan $p_j^n(\lambda) = P(Y_n(\Lambda) = j)$.

Dari persamaan (2.3) peluang untuk tidak ada klaim adalah positif, $p_0(\lambda) > 0$. Dengan menggunakan sifat dari rantai markov yang reguler maka diperoleh

i. Jika distribusi peluang untuk banyaknya klaim selama satu periode adalah saling bebas terhadap periode, maka tarif grup untuk polisnya berbentuk rantai Markov dengan matrik transisi $M(\lambda)$ yang diberikan dalam persamaan (2.3).
ii. Jika peluang untuk tidak ada klaim dalam satu periode $p_0(\lambda)>0$, maka disebut dengan regular.

Akibatnya $p_k(\lambda)>0$. Dengan demikian rantai Markov dari sistem bonus-malus ini adalah regular. Artinya terdapat bilangan $q \ge 1$, sehingga $\{M(\lambda)\}^q$ semua unsurnya bernilai positif murni.

Dalam kasus regular dengan nilai eigen satu yaitu nilai eigen dari matrik M. Distribusi stasioner, vektor kolom $\pi(\lambda)$ merupakan solusi tunggal dari persamaan

$$\pi(\lambda) = \pi(\lambda)\, M(\lambda), \tag{2.4}$$

dengan $\sum_{j \in E} \pi_j = 1$.

Atau dengan kata lain distribusi stasioner yang diperoleh merupakan nilai dari eigen vektor dari persamaan (2.4) yang bersesuaian dengan nilai eigen satu dari matrik M.

3. EFISIENSI SISTEM BONUS MALUS

Dalam BMS premi stasioner dinotasikan dengan $b(\lambda)$ dan dituliskan sebagai jumlahan dari perkalian vektor baris distribusi stasioner dari rantai Markov ($\pi = \pi_1, \pi_2, \ldots \pi_n$) dengan vektor kolom nilai premi B untuk setiap keadaan aktual. Notasi "$b(\lambda)$" ini tidak bergantung pada keadaan awal i.

$$b(\lambda) = \left(\pi_1\ \pi_2, \ldots, \pi_n\right)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_i \pi_i b_i = \pi B, \tag{3.1}$$

dengan b_i adalah premi yang dibayarkan pada keadaan ke-i sesuai denga tarif grup pada keadaan ke-i. Notasi "b(λ)" merupakan fungsi naik dari λ.

Dengan mengasumsikan bahwa barisan dari klaim adalah *iid* (*independent identically distributed*) mempunyai *mean V* [7], maka premi *netto* (premi yang dibayarkan tanpa adanya biaya) yang dibayarkan adalah λV, maka persamaan (3.1) dapat dituliskan sebagai

$$b(\lambda) = \lambda V\ . \tag{3.2}$$

Fungsi $b(\lambda)$ merupakan fungsi dalam λ, dan tidak linier. Untuk dapat melinierkan persamaan (3.2), karena b(λ)>0, maka fungsi tersebut dapat diambil logaritmanya untuk kedua sisinya. Dengan demikian fungsi logaritma dari persamaan (3.2) adalah

$$\log b(\lambda) = \log\lambda + \log V. \tag{3.3}$$

Dengan menurunkan terhadap λ pada masing-masing ruas pada persamaan (3.3) diperoleh

$$\frac{1}{b(\lambda)}\frac{db(\lambda)}{d\lambda} = \frac{1}{\lambda},$$

atau

$$\frac{\dfrac{db(\lambda)}{b(\lambda)}}{\dfrac{d(\lambda)}{\lambda}} = 1\ . \tag{3.4}$$

Persamaan (3.4) menunjukkan bahwa untuk setiap premi yang dibayarkan oleh tertanggung sama dengan premi pada sistem Bonus Malus. Perubahan pada banyaknya klaim yang diharapkan pada tiap periode $d\lambda/\lambda$ mengakibatkan perubahan pada premi rata-rata $db(\lambda)/b(\lambda)$. Secara umum persamaan (3.4) merupakan rasio dari variansi dari premi stasioner dengan variansi dari frekuensi klaim dan disebut sebagai efisiensi dari BMS yang dinotasikan dengan e(λ),

$$e(\lambda) = \frac{\lambda}{b(\lambda)}\frac{db(\lambda)}{d\lambda} = \frac{d\log b(\lambda)}{d\log\lambda}. \tag{3.5}$$

Nilai e(λ) dari persamaan (3.5) adalah posi-tif karena $b(\lambda)>0$ dan secara umum $0<e(\lambda)<1$.

Selanjutnya dari persamaan (3.5), bagian $db(\lambda)/d\lambda$ diperoleh dengan menurunkan persamaan (3.1) terhadap λ, sehingga diperoleh

$$\frac{db(\lambda)}{d\lambda} = \sum_i \frac{d\pi_i}{d\lambda} b_i\ . \tag{3.6}$$

Sedangkan persamaan turunan $d\pi_i/d\lambda$ diperoleh dengan menurunkan persamaan (3.1) yaitu $\pi = \pi\mathbf{M}$ dan $\sum_i \pi_i = 1$ terhadap λ,

$$\begin{aligned} \frac{d\pi}{d\lambda} &= \frac{d\pi}{d\lambda}M + \pi\frac{dM}{d\lambda} \\ \sum_i \frac{d\pi_i}{d\lambda} &= 0 \end{aligned}\ , \tag{3.7}$$

dengan bentuk matrik $dM/d\lambda$ diperoleh dari persamaan berikut

$$\frac{dM(\lambda)}{d\lambda} = \sum_{k=0}^{m} \exp(-\lambda)\frac{\lambda^k}{k!}(T_{k+1} - T_k) \tag{3.8}$$

dengan $T_k = t_{ij}(k)$ dengan $t_{ij}(k)$ seperti pada persamaan (2.1)

4. METODE MENCARI NILAI EFISIENSI METODE EKSAK

Misalkan model BMS dari Brasil pada Tabel 1, tetapi hanya diambil untuk 3 keadaan saja. Dengan nilai preminya menjadi (100,90,80) dan bentuk tabelnya menjadi

Tabel 1. Sistem Bonus-malus

(C_i, r_i) (Tarif grup, Prosentasi	**Tarif Grup setelah satu tahun**		
	Banyaknya klaim		
	0	1	2+
(3, 100)	2	3	3
(2 , 90)	1	3	3
(1 , 80)	1	2	3

Tabel 2. Tabel transisi dari Sistem Bonus malus

	1	2	3
1	{1,2,..}	{0}	.
2	{1,2,..}	.	{0}
3	{2,3,..}	{1}	{0}

Dari Tabel 1 dan Tabel 2 diatas maka bentuk matrik transisi rantai Markovnya, M(λ) menjadi

$$M(\lambda) = \begin{bmatrix} 1-e^{-\lambda} & e^{-\lambda} & 0 \\ 1-e^{-\lambda} & 0 & e^{-\lambda} \\ 1-(1+\lambda)e^{-\lambda} & \lambda e^{-\lambda} & e^{-\lambda} \end{bmatrix}$$

Misalkan $p=1-e^{-\lambda}$, $q=e^{-\lambda}$ dan $r=\lambda e^{-\lambda}$ maka bentuk matrik M(λ) dari contoh BMS adalah

$$M(\lambda) = \begin{bmatrix} p & q & 0 \\ p & 0 & q \\ p-r & r & q \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dari matrik M(λ) diatas akan ditentukan distribusi stasionernya. Dengan menggunakan persamaan (2.4) maka dapat dituliskan menjadi

$$(\pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3) = (\pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3)\begin{bmatrix} p & q & 0 \\ p & 0 & q \\ p-r & r & q \end{bmatrix}.$$

Dengan menggunakan sistem persamaan linier dan memasukan nilai p, q, dan r maka diperoleh nilai π_1 ,π_2 ,π_3 yaitu

$$\pi_1 = \frac{1-e^{-\lambda}(\lambda e^{-\lambda}+1)}{1-\lambda e^{-2\lambda}}, \qquad \pi_2 = \frac{e^{-\lambda}(1-e^{-\lambda})}{1-\lambda e^{-2\lambda}},$$

$$\pi_3 = \frac{e^{-2\lambda}}{1-\lambda e^{-2\lambda}}.$$

Selanjutnya dengan menggunakan nilai-nilai dari tarif grup yaitu (100, 90, dan 80) diperoleh premi stasioner sebagai berikut.

$$b(\lambda) = (\pi_1 \ \pi_2 \ \pi_3)\begin{pmatrix} 100 \\ 90 \\ 80 \end{pmatrix} = \sum_i \pi_i b_i \quad .$$

Sehingga turunan premi stasioner dalam λ diperoleh

$$\frac{db(\lambda)}{d\lambda} = 100\times \frac{e^{-\lambda}\left(1+\lambda e^{-\lambda}\right)-e^{-\lambda}\left(e^{-\lambda}-\lambda e^{-\lambda}\right)}{1-\lambda e^{-2\lambda}}$$

$$-100\times \frac{1-e^{-\lambda}\left(1+\lambda e^{-\lambda}\right)}{\left(1-\lambda e^{-2\lambda}\right)^2}$$

$$-\ 90\times\frac{\left(e^{-\lambda}\right)\left(1-e^{-\lambda}\right)}{\left(1-\lambda^{-2\lambda}\right)} + 90\times\frac{\left(e^{-\lambda}\right)^2}{\left(1-\lambda^{-2\lambda}\right)}$$

$$-\ 90\times\frac{e^{-\lambda}\left(1-e^{-\lambda}\right)\left(-e^{-2\lambda}+2\lambda e^{-2\lambda}\right)}{\left(1-\lambda e^{-2\lambda}\right)^2}$$

$$-\ 80\times \frac{2e^{-2\lambda}}{1-\lambda e^{-2\lambda}}$$

$$-\ 80\times\frac{e^{-2\lambda}\left(-e^{-2\lambda}+2\lambda e^{-2\lambda}\right)}{\left(1-\lambda e^{-2\lambda}\right)^2}$$

Dengan mengambil $\lambda=\lambda_0=0.1$ diperoleh

π = (π_1 π_2 π_3)
= (0.01447458531 0.09378514307 0.8917402715)

Selanjutnya dengan menggunakan persamaan (3.1) diperoleh nilai dari premi stasioner, yaitu

$$b(\lambda = 0.1) = (\pi_1\, \pi_2\, \pi_3)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$= \sum_i \pi_i b_i$$

$$= 0.01447458531\times 100$$

$$+\ 0.09378514307\times 90$$

$$+\ 0.8917402715\times 80$$

$$= 81.22734313$$

dan nilai dari $\frac{db(\lambda)}{d\lambda}|_{\lambda=0.1}$ = 14.29779228.

Sehingga nilai efisiensi dapat dicari dengan menggunakan persamaan (3.5) yaitu

$$e(\lambda = 0.1) = \frac{0.1}{81.22734313} 14.29779228$$
$$= 0.01760219124$$

Metode Numerik

Dari Tabel 1 dan Tabel 2, dengan menggunakan asumsi pada persamaan (2.3), maka bentuk matrik transisi rantai Markov-nya , M(λ) menjadi

$$M(\lambda) = \begin{bmatrix} 1-e^{-\lambda} & e^{-\lambda} & 0 \\ 1-e^{-\lambda} & 0 & e^{-\lambda} \\ 1-(1+\lambda)e^{-\lambda} & \lambda e^{-\lambda} & e^{-\lambda} \end{bmatrix}$$

dan

$$dM(\lambda)/d\lambda = \begin{bmatrix} e^{-\lambda} & -e^{-\lambda} & 0 \\ e^{-\lambda} & 0 & -e^{-\lambda} \\ \lambda e^{-\lambda} & (1-\lambda)e^{-\lambda} & -e^{-\lambda} \end{bmatrix}$$

Bentuk matrik transisi M(λ) diatas mempunyai nilai determinan $\det(M(\lambda))=-\lambda e^{-2\lambda}$. Selanjutnya dari bentuk matrik M(λ) ini akan dicari distribusi stasionernya, yaitu π. Dengan mengambil distribusi awal $\pi_1=(a_1,b_1,c_1)$ dengan $a_1+b_1+c_1=1$ diperoleh

$\pi_2=\pi_1 M(\lambda)$

$$= (a_1,b_1,c_1) \begin{bmatrix} 1-e^{-\lambda} & e^{-\lambda} & 0 \\ 1-e^{-\lambda} & 0 & e^{-\lambda} \\ 1-(1+\lambda)e^{-\lambda} & \lambda e^{-\lambda} & e^{-\lambda} \end{bmatrix}$$

$$= [(a_1+b_1)(1-e^{-\lambda})+c_1(1-(1+\lambda)e^{-\lambda})a_1e^{-\lambda} +c_1\lambda e^{-\lambda} \ (b_1+c_1)(1-e^{-\lambda})\ ]$$

$\pi_3=\pi_2 M(\lambda)$

$$= [(a_1+b_1)(1-e^{-\lambda})+c_1(1-(1+\lambda)e^{-\lambda})a_1e^{-\lambda} +c_1\lambda e^{-\lambda} \ (b_1+c_1)(1-e^{-\lambda})\ ] \cdot \begin{bmatrix} 1-e^{-\lambda} & e^{-\lambda} & 0 \\ 1-e^{-\lambda} & 0 & e^{-\lambda} \\ 1-(1+\lambda)e^{-\lambda} & \lambda e^{-\lambda} & e^{-\lambda} \end{bmatrix}$$

$\pi_4=\pi_2 M(\lambda)$

⋮

$\pi_{n+1}=\pi_n M(\lambda)$,

dimana untuk $n\to\infty$, maka $\pi=\pi M(\lambda)$ dengan π sebagai vektor baris dengan komponennya merupakan fungsi dari λ. Dengan mengambil λ=0.1 maka bentuk matrik diatas adalah

M(λ=0.1)

$$= \begin{bmatrix} 0.0951625820 & 0.9048374180 & 0 \\ 0.0951625820 & 0 & 0.9048374180 \\ 0.0046788402 & 0.09048374180 & 0.9048374180 \end{bmatrix}$$

Matrik M(λ) ini akan stasioner setelah n=22 yaitu diperoleh matrik

$M_{21}(\lambda=0.1)$

$$= \begin{bmatrix} 0.01447458553 & 0.093785143030 & 0.8917402710 \\ 0.01447458553 & 0.093785143030 & 0.8917402710 \\ 0.01447458553 & 0.093785143030 & 0.8917402710 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh distribusi stasioner dari matrik rantai Markov M((λ) untuk pemilihan distribusi awal tertentu yaitu π adalah

π= (0.01447458553 0.09378514303 0.8917402710)

Selanjutnya dengan menggunakan persamaan (3.1) diperoleh nilai dari premi stasioner yaitu

$$b(\lambda = 0.1) = (\pi_1, \pi_2\ \pi_3) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$
$$= \sum_i \pi_i b_i$$
$$= 0.01447458553 \times 100$$
$$+ 0.09378514303 \times 90$$
$$+ 0.8917402710 \times 80$$
$$= 81.22734311$$

Proses selanjutnya yaitu menentukan nilai dari db(λ)/dλ. Sebelumnya db(λ)/dλ ini akan ditentukan terlebih dahulu nilai dari dπ/dλ dengan menggunakan proses iterasi seperti ketika menghitung distribusi stasioner dari matrik rantai Markov M(λ). Pandang bahwa π dan M(λ) masih dalam bentuk fungsi dalam λ. Karena π merupakan suatu vektor baris yang komponen-komponennya fungsi dari λ dan matrik M(λ) juga merupakan matrik dengan unsur-unsurnya dalam bentuk fungsi λ, maka bentuk turunan dari dπ/dλ adalah seperti dalam persamaan (3.6). Selanjutnya misalkan bahwa s=dπ/dλ maka bentuk iterasi dari persamaan (3.7) adalah

$$s_1=s_0M(\lambda)+\pi(dM(\lambda)/d\lambda)$$
$$s_2=s_1M(\lambda)+\pi(dM(\lambda)/d\lambda)$$
$$\ldots\ldots$$

……

$$s_{n+1}= s_nM(\lambda)+\pi(dM(\lambda)/d\lambda)$$

untuk $n\to\infty$, maka $s=sM(\lambda)+\pi(dM(\lambda)/d\lambda)$ dengan s sebagai vektor baris dengan komponen-komponennya merupakan fungsi dari λ. Dengan mengambil nilai λ=0.1 dengan bantuan program Maple dan mengambil nilai s_0=(-0.6,0.6,0), maka diperoleh nilai stasioner setelah n=21 dengan tingkat kesalahan 10^{-10}, yaitu

s_{21}=[0.28245925 , 0.86486071,-1.1473199]

sehingga untuk nilai dari $db(\lambda)/d\lambda$ dapat diketahui yaitu

$$\frac{db(\lambda)}{d\lambda}=\sum_i \frac{d\pi_i}{d\lambda}b_i$$

$$= (0.28245925\times100 + 0.86486071\times90 -1.1473199\times80)$$

$$= 14.29779230$$

Dengan nilai dari frekuensi klaim λ, premi stasioner $b(\lambda)$ dan nilai dari $db(\lambda)/d\lambda$, maka untuk λ=0.1 diperoleh nilai efisiensi untuk BMS contoh dalam Tabel 1 dan Tabel 2 dengan menggunakan persamaan 9, yaitu

$$e(\lambda=0.1)=\frac{\lambda}{b(\lambda)}\frac{db(\lambda)}{d\lambda}$$

$$= (0.1/81.22734311)\times 14.29779230$$

$$= 0.01760219119$$

Dengan demikian maka untuk λ=0.1 model BMS dalam kasus ini memberikan nilai efisiensi sebesar 0.01760219119. Dari hasil perhitungan dengan menggunakan metode eksak maupun metode numerik akan diperoleh nilai efisiensi yang tidak jauh berbeda. Untuk kasus dimana bentuk matrik transisi mempunyai ukuran ukuran yang kecil akan lebih mudah menggunakan metode eksak. Sebaliknya untuk matrik transisi yang dihasilkan dari sistem bonus malus besar maka disarankan akan lebih mudah dengan menggunakan metode pendekatan yaitu metode numerik. Dalam perhitungan selanjutnya semua nilai λ ini berada antara 0 dan 1. Didalam beberapa negara rata-rata frekuensi klaim (λ) adalah 10% [4]. Nilai 10% ini selanjutnya digunakan dalam paper ini untuk untuk menentukan nilai efisiensi dari model BMS.

5. STUDI KASUS MODEL BMS BRASIL

Dalam sistem bonus-malus, negara Brasil mempunyai tujuh tarif grup bonus yang dinomori dari 1 hingga 7 dengan tingkatan tarif grup 100, 90, 85, 80, 75, 70, 65. Tarif grup dimulai pada tarif grup pertama yaitu tarif grup 100. Jika tidak terjadi klaim dalam satu tahun tarif grup akan turun satu tingkat ke tarif grup yang lebih rendah prosentasinya. Sedangkan jika terjadi klaim sebanyak *k* dengan *k*≥1, maka untuk setiap klaimnya mengakibatkan tarif grup naik satu tingkat ke tarif grup yang lebih besar prosentasinya. BMS model Brasil ini disajikan dalam Tabel 3.

Selanjutnya dengan menggunakan metode numerik untuk λ=0.1, distribusi stasioner dari matrik rantai markov BMS Brasil ini adalah $\pi= (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_7)$ yaitu

π_1=0.8894840186,
π_2=0.09354785089
π_3=0.01443796240,
π_4=0.002154210974
π_5=0.0003209884896,
π_6= .00004783874242,
π_7=0.000007129849606

dengan nilai efisiensi $e(\lambda)$= 0.0127589. Untuk frekuensi klaim yang lain dengan $0\le\lambda\le 2$ dengan pertambahan 0.1, efisiensi BMS Brasil disajikan dalam plot efisiensi dalam Gambar 1.

Berdasarkan Gambar 1, efisiensi BMS negara Brasil terjadi kenaikan yang tajam mulai dari λ=0 sampai dengan λ=0.6. Untuk λ>0.6 efisiensi mengalami penurunan. Sedangkan efisiensi tertinggi dicapai pada saat λ=0.6 yaitu 0.3520103.

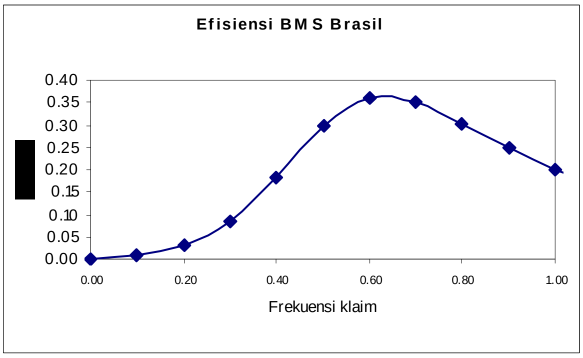
Modifikasi premi

Pada modifikasi ini dilakukan perubahan premi pada keadaan paling atas. Perubahan ini antara lain dengan menaikkan dan menurunkan premi paling atas (100) dengan 105, 102 dan 95 serta 98 disajikan dalam Gambar 2. Pada modifikasi pertama yaitu dengan menaikkan premi menjadi 105 untuk setiap λ ($0<\lambda\leq 2$) terjadi kenaikan yaitu dengan kenaikan rata-rata sebesar 1.1%. Untuk efisiensi tertinggi dicapai ketika λ=0.6 yaitu dengan nilai 0.3842114345. Modifikasi selanjutnya dengan menurunkan premi menjadi 95. Dengan modifikasi ini efisiensinya mengalami penurunan untuk setiap λ ($0<\lambda\leq 2$) dengan rata-rata penurunan 1.99%. Efisiensi tertinggi dicapai pada saat λ=0.6 yaitu sebesar 0.3191357753.

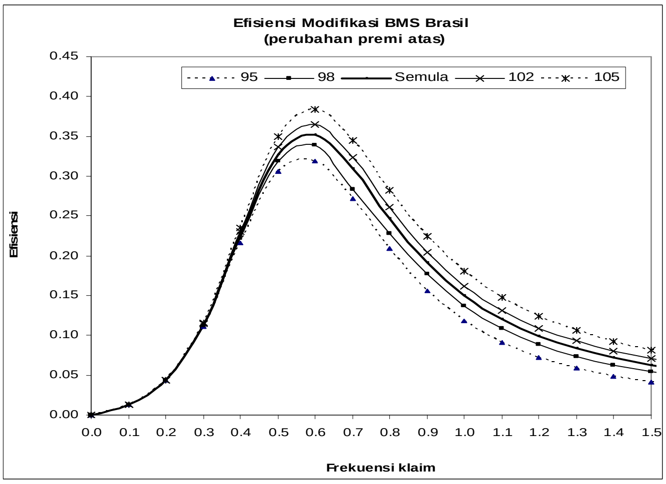
Untuk dapat memberikan gambaran bahwa dengan menaikkan/menurunkan premi akan menaikkan/menurunkan efisiensi dilakukan perubahan dengan premi 102 dan 98.

Tabel 3. Sistem Bonus malus negara Brasil

(C_i, r_i) (Tarif grup,Prosentasi)	**Tarif Grup Setelah Satu Tahun**						
	Banyaknya Klaim						
	0	1	2	3	4	5	6+
(7 , 100)	6	7	7	7	7	7	7
(6 , 90)	5	7	7	7	7	7	7
(5 , 85)	4	6	7	7	7	7	7
(4 , 80)	3	5	6	7	7	7	7
(3 , 75)	2	4	5	6	7	7	7
(2 , 70)	1	3	4	5	6	7	7
(1, 65)	1	2	3	4	5	6	7



Gambar 1. Plot efisiensi BMS Brasil untuk $0\leq\lambda\leq 2$ dengan pertambahan 0.1



Gambar 2. Efisiensi Modifikasi BMS Brasil dengan perubahan pada premi atas

Pada perubahan premi dengan 102 nilai efisiensi untuk setiap λ ($0<\lambda\leq 2$) juga mengalami kenaikan rata-rata 0.76% dengan efisiensi tertinggi dicapai ketika λ=0.6 yaitu 0.3649703583. Dari Gambar 2 menunjukkan bahwa untuk modifikasi ini plot nilai efisiensi selalu berada BMS Brasil semula dan modifikasi BMS Brasil dengan perubahan premi atas dengan 105.

Modifikasi berikutnya yaitu dengan mengubah premi atas menjadi 98. Dalam modifikasi ini menghasilkan nilai efisiensi yang lebih kecil untuk setiap λ ($0<\lambda\leq 2$), dimana nilai efisiensi rata-rata mengalami penurunan sebesar 0.9%. Efisiensi tertinggi dicapai ketika λ=0.6 yaitu 0.338942435. Dari Gambar 2 terlihat bahwa plot nilai efisiensi untuk modifikasi ini selalu berada diantara BMS Brasil semula dan modifikasi BMS Brasil dengan 95.

Dengan modifikasi premi pada keadaan paling atas ini menunjukkan bahwa untuk $0<\lambda<0.4$ cenderung perbedaan efisiensi sangat kecil (Gambar 2). Sedangkan untuk $\lambda>0.4$ terjadi perubahan nilai efisiensi yaitu terjadi kenaikan efisiensi jika premi atas dinaikan dan penurunan efisiensi jika premi atas diturunkan. Hal ini menunjukkan bahwa dengan modifikasi ini pihak yang mengasuransikan akan cenderung berhati-hati dengan kendaraan bermotornya bila premi atas dinaikkan jika dibandingkan dengan penurunan premi atas, sehingga akan mendapatkan bonus penurunan premi untuk tahun pembayaran premi berikutnya.

5. KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan pada bagian sebelumnya dapat disimpulkan bahwa tarif grup untuk tahun berikutnya dihitung berdasarkan tarif grup tahun sebelumnya dengan banyaknya klaim yang tercatat. Dengan demikian maka permasalahan sistem bonus-malus (BMS) dapat dipandang sebagai Model Rantai Markov. Model keadaan multiple (model Markov) merupakan suatu model stokastik yang dibangun berdasarkan rantai markov waktu diskrit dengan ruang keadaan hingga.

Dalam menentukan efisiensi dari BMS dengan menggunakan distribusi stasioner dari rantai Markov. Distribusi stasioner ini digunakan untuk menentukan premi stasioner. Untuk dapat meningkatkan efisiensi dari BMS terdapat dua faktor yang sangat penting, yaitu dengan merubah premi sehingga perbandingan premi tertinggi dan paling rendah menjadi lebih besar.

Perubahan premi akan menghasilkan nilai efisiensi dari BMS yang lebih bervariasi sehingga akan dapat diketahui kecenderungan pihak yang mengasuransikan kendaraan bermotornya berada di frekuensi klaim mana akan berhati-hati (pada umumnya untuk BMS Brasil diawal masuk asuransi)

6. DAFTAR PUSTAKA

[1] Bichsel., F. (1964), *Erlahrungs-Tariffierung in der Motorfahrzeug haftpflicht-Versicherung*, Mtt Verein Schwiez Versicherungsmath, **64:** 119-129.

[2] Buhlmann, H. (1964), *Optimale Pramienstufensysteme*, Mitt Verein Schwiez Versicherungsmath, **64:** 193-213.

[3] Delaporte, P. (1965), *Tarification du risque individual d'accidents d'automobiles par la prime modelee sur le risque*, ASTIN Bull III, **3**.

[4] Lemaire J. (1998), *Bonus-Malus System*, The European and Asian Approach to Merit Rating. North American Actuarial Journal, **2**(1): 26-47.

[5] Lemaire,J and Hongmin Zi. (1994), *A Comparative Analysis of 30 Bonus-Malus System*. ASTIN BULETIN, **24**(2): 287-309.

[6] Loimaranta, K. (1972), *Some Asymtotic Properties of Bonus Malus*, ASTIN BULLETIN, **6**(3): 233-245.

[7] Rolski.T, Schmidli,H., Schmidt, V., and Tugels, J. (1999). *Stochastic Processes for Insurance and Finance*, John Wiley & Sons, New york.

[8] Ross. (2000), *Introduction to Probability Models* , Seventh Edition, Academic Press, London, UK.