LOKALISASI ORE

Lucia Ratnasari
Jurusan Matematika FMIPA UNDIP
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H, Semarang 50275

Abstract. Let R be a noncommutative ring and S be a multiplicative subset of R. The right (left) ring of quotients does not exist for every S. A necessary condition of existence right (left) ring of quotients is S right (left) permutable and right (left) reversible. A multiplication subset S is called a right (left) denominator if it is right (left) permutable and right (left) reversible. The ring R has a right (left) ring of quotients with respect to S if and only if S is a right (left) denominator set. We can construct right (left) ring of quotients by using Ore localizations.

Keywords: ring of quotients, permutable, reversible, denominator, Ore localization.

1. PENDAHULUAN

Jika R ring komutatif dan S himpunan bagian multiplikatif dari R dengan $e \in S, 0 \notin S$ maka lokalisasi dari R terhadap S menghasilkan suatu ring komutatif R_S dan suatu homomorfisma ring $\varphi : R \to R_S$, sehingga untuk setiap $s \in S$, $\varphi(s)$ unit di R_S. Ring komutatif R_S disebut ring hasil bagi dari R [2]. Jadi prosedur lokalisasi dari R terhadap S menghasilkan ring hasil bagi R_S dan R_S memuat R.

Dalam penulisan ini dipelajari hal yang sama untuk ring nonkomutatif. Ore menemukan syarat perlu dan cukup untuk eksistensi ring hasil bagi untuk ring nonkomutatif. Pengkonstruksian ring hasil bagi untuk ring nonkomutatif dilakukan melalui proses lokalisasi Ore [3].

2. LOKALISASI ORE

Suatu homomorfisma $\alpha : R \to R'$ disebut $S-$*inverting* jika $\alpha(S) \subseteq U(R')$ dengan $U(R')$ himpunan unit dalam R'.

Definisi 2.1. [3]
R' disebut ring hasil bagi kanan (terhadap $S \subseteq R$) jika ada homomorfisma ring $\varphi : R \to R'$ sedemikian sehingga :

a) φ adalah $S-$ *inverting.*
b) Setiap elemen dari *R'* mempunyai bentuk $\varphi(a)\varphi(s)^{-1}$ dengan $a \in R$ dan $s \in S$.
c) $Ker\ \varphi = \{ r \in R : rs = 0$ untuk suatu $s \in S \}$

Disini R' tidak selalu ada. Jika R' ada maka dapat disimpulkan dua syarat perlu pada S. Dua syarat perlu yang ditambahkan pada S ditemukan oleh Ore adalah sebagai berikut.

Sifat 2.2. [3]
Jika R' ada maka $(\forall a \in R)$ $(\forall s \in S)$ $aS \cap sR \neq \phi$.

Bukti.
Jika R' ada maka $\varphi(s)^{-1}, \varphi(a) \in R'$ sehingga $\varphi(s)^{-1}\varphi(a) \in R'$. Dari Definisi 2.1.b. maka $\varphi(s)^{-1}\varphi(a)$ dapat ditulis dalam bentuk $\varphi(r)\varphi(s')^{-1}$ dengan $r \in R$ dan $s' \in S$, dan diperoleh $\varphi(as') = \varphi(sr)$, jadi $\varphi(as' - sr) = 0$. Dengan Definisi 2.1.c. maka $(as' - sr)s'' = 0$ untuk suatu $s'' \in S$. Akibatnya akan diperoleh $as's'' = srs''$. $\in aS \cap sR$ ∎

Himpunan S yang memenuhi sifat ini disebut permutable kanan atau himpunan Ore kanan .

Sifat 2.3. [3]
Jika R' ada maka untuk $a \in R$ berlaku jika $s'a = 0$ untuk suatu $s' \in S$ maka $as = 0$ untuk suatu $s \in S$.

Bukti.
Diketahui $s'a = 0$ sehingga

$$\varphi(s'a) = \varphi(s')\varphi(a) = 0 .$$

Karena R' ada maka φ $S-inverting$ sehingga $\varphi(a) = 0$ dan dari Definisi 2.1.c diperoleh $as = 0$ untuk suatu $s \in S$. ■

Himpunan S yang mempunyai sifat ini disebut reversible kanan**.**
Jadi jika R' ada, maka S permutable kanan dan reversible kanan.

Definisi 2.4. [3]
Jika S adalah permutable kanan dan reversible kanan maka S disebut himpunan denominator kanan**.**

Selanjutnya diperoleh syarat perlu dan cukup untuk eksistensi ring hasil bagi kanan untuk ring nonkomutatif.

Teorema 2.5. [3]
Ring R mempunyai ring hasil bagi kanan terhadap $S \subseteq R$ jika dan hanya jika S himpunan denominator kanan.

Bukti.
($\Rightarrow$) Karena R mempunyai ring hasil bagi kanan maka S adalah permutable kanan dan reversible kanan. Dari Definisi 2.4. diperoleh S adalah himpunan denominator kanan.
($\Leftarrow$) Ring hasil bagi kanan dinotasikan dengan RS^{-1} karena elemen dari RS^{-1} akan merupakan pembagi kanan dengan bentuk as^{-1} ($a \in R$ dan $s \in S$) maka konstruksinya dimulai dengan membentuk RxS . Didefinisikan suatu relasi ~ pada RxS sebagai berikut.
Jika $(a,s),(a',s') \in RxS$, maka

$(a,s) \sim (a',s') \Leftrightarrow$ ada $b,b' \in R$ sedemikian sehingga $sb = s'b' \in S$ dan $ab = a'b' \in R$ **.** (2.1)

Akan dibuktikan bahwa ~ adalah relasi ekuivalensi

i. Refleksif.
Karena untuk setiap $b = b' \in R$ berlaku $sb = sb' \in S$ dan $ab = ab' \in R$ menurut (2.1) maka $(a,s) \sim (a,s)$.

ii. Simetris
Jika $(a,s) \sim (a',s')$ maka ada $b,b' \in R$ sehingga $sb = s'b' \in S$ dan $ab = a'b' \in R$ atau ada $b,b' \in R$ sehingga $s'b' = sb \in S$ dan $a'b' = ab \in R$. Jadi ada $c = b'$, $c' = b \in R$ sehingga $s'c = sc' \in S$ dan $a'c = ac' \in R$, dari (2.1) diperoleh $(a',s') \sim (a,s)$.

iii. Transitif.
Diketahui $(a,s) \sim (a',s')$ maka ada $b,b' \in R$ *sehingga* $ab = a'b' \in R$ dan $sb = s'b' \in S$. Juga $(a',s') \sim (a'',s'')$ maka ada $c,c' \in R$ sehingga $a'c = a''c' \in R$ dan $s'c = s''c' \in S$. Karena S permutable kanan, dari $(s'c)S \cap (s'b')R \neq \phi$ maka ada $r \in R$ dan $t \in S$ sehingga $s'b'r = s'ct \in S$.

Dengan menggunakan reversible kanan akan diperoleh $b'rt' = ctt'$ untuk suatu $t' \in S$.
Sekarang $sbr = s'b'r = s'ct = s''c't \in S$
sehingga $s(brt') = s''(c'tt') \in S$

$$a(brt') = a'b'rt' = a'ctt' = a''(c'tt')$$
$$a(brt') = a''(c'tt') \in R .$$

Jadi ada $d = brt', d' = c'tt' \in R$ sehingga $sd = s''d' \in S$ dan $ad = a''d' \in R$. Terbukti jika $(a,s) \sim (a',s')$ dan $(a',s') \sim (a'',s'')$ maka $(a,s) \sim (a'',s'')$.
Dari (2.1), jika diambil $b' = 1$ akan terlihat bahwa $(a,s) \sim (ab,sb)$ asalkan $sb \in S$.

Notasi untuk kelas ekuivalensi dari (a,s) ditulis $\dfrac{a}{s}$ atau as^{-1} . Himpunan dari semua kelas-kelas ekuivalensi dinotasikan dengan RS^{-1}.

Untuk mendefinisikan penjumlahan dalam RS^{-1} akan diselidiki bahwa setiap dua pecahan $\frac{a_1}{s_1}, \frac{a_2}{s_2}$ dapat disamakan penyebutnya. Karena S permutable kanan maka $s_1 S \bigcap s_2 R \neq \phi$ jadi ada $r \in R$ dan $s \in S$ sedemikian sehingga $s_2 r = s_1 s \in S$.

Selanjutnya dari $\frac{a_1}{s_1} = \frac{a_1 s}{s_1 s}$ dan $\frac{a_2}{s_2} = \frac{a_2 r}{s_2 r}$ didefinisikan $\frac{a_1}{s_1} + \frac{a_2}{s_2} = \frac{a_1 s + a_2 r}{t}$ dengan

$$t = s_1 s = s_2 r. \qquad (2.2)$$

Operasi penjumlahan diatas adalah *well defined* dan selanjutnya dapat dibuktikan bahwa $(RS^{-1},+)$ merupakan grup abelian.

Didefinisikan $\varphi : R \to RS^{-1}$ dengan $\varphi(a) = \frac{a}{e}$. Akan ditunjukkan bahwa φ merupakan homomorfisma grup yaitu,

$$\varphi(a+b) = \frac{a+b}{e} = \frac{a}{e} + \frac{b}{e} = \varphi(a) + \varphi(b)$$

$$\begin{aligned} Ker\varphi &= \left\{ a \in R \mid \varphi(a) = 0_{RS^{-1}} \right\} \\ &= \left\{ a \in R \middle| as = 0 \text{ untuk suatu } s \in S \right\} \end{aligned}$$

Selanjutnya akan didefinisikan perkalian pada RS^{-1}. Untuk mengalikan $\frac{a_1}{s_1}$ dengan $\frac{a_2}{s_2}$ digunakan $s_1 R \bigcap a_2 S \neq \phi$ maka terdapat $r \in R$ dan $s \in S$ sedemikian sehingga $s_1 r = a_2 s$ atau $s_1^{-1} a_2 = r s^{-1}$.

Diperoleh definisi $\frac{a_1}{s_1} \cdot \frac{a_2}{s_2} = \frac{a_1 r}{s_2 s}$. (2.3)

Perlu diingat $(a_1 s_1^{-1})(a_2 s_2^{-1})$ akan menjadi $a_1 (s_1^{-1} a_2) s_2^{-1} = a_1 (r s^{-1}) s_2^{-1} = a_1 r (s_2 s)^{-1}$.

Operasi perkalian diatas adalah well defined dan selanjutnya dapat dibuktikan bahwa $(RS^{-1},+,\bullet)$ adalah ring .

Akan ditunjukkan $\frac{e}{e}$ adalah identitas perkalian dalam RS^{-1}.

Ambil $\frac{a_1}{s_1} \in RS^{-1}$, maka $\left(\frac{a_1}{s_1}\right)\left(\frac{e}{e}\right) = \frac{a_1 r}{es}$ $= \frac{a_1 r}{s} = a_1 r.s^{-1} = a_1 s_1^{-1} = \frac{a_1}{s_1}$.

Pemetaan $\varphi : R \to RS^{-1}$ didefinisikan $\varphi(a) = \frac{a}{e}$, sehingga

$$\begin{aligned} \varphi(ab) &= \frac{ab}{e} \\ &= \frac{a}{e} \cdot \frac{b}{e} \\ &= \varphi(a)\varphi(b) \end{aligned}$$

Karena $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ dan $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ maka φ merupakan homomorfisma ring.

Juga diperoleh $\frac{e}{s}$ $(s \in S)$ adalah invers dari $\varphi(s) = \frac{s}{e}$.

Jadi:

a) φ adalah $S-$*inverting*.

b) $\frac{a}{s} = \varphi(a)\varphi(s)^{-1}$.

c) $Ker\varphi = \{ a \in R : as = 0$ untuk suatu $s \in S \}$.

RS^{-1} adalah ring hasil bagi kanan dari R terhadap S. ■

Akibat (Ranicki).

Jika S adalah himpunan denominator kanan maka $\varphi : R \to RS^{-1}$ adalah homomorfisma $S-$*inverting* universal.

Khususnya ada isomorfisma tunggal $g : Rs \to RS^{-1}$ sehingga $g \circ \varepsilon = \varphi$ dengan $\varepsilon : R \to Rs$.

Contoh

1. Misal: $R = \begin{bmatrix} Z & Z \\ 0 & Z \end{bmatrix}$ dan $S = \{ n.I : 0 \neq n \in Z \}$

   S permutable kanan jika $(\forall a \in R)$ $(\forall s \in S)$ $aS \cap sR \neq \phi$.

Ambil sebarang $a = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ 0 & z_3 \end{bmatrix} \in R$,

$z_1, z_2, z_3 \in Z$ $\quad s = n_1 I = \begin{bmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & n_1 \end{bmatrix} \in S$

$0 \neq n_1 \in Z$ maka

$$sR = \left\{ \begin{bmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & n_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ 0 & z_4 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} n_1 z_1 & n_1 z_2 \\ 0 & n_1 z_3 \end{bmatrix} \right\}$$

dengan $n_1 z_1, n_1 z_2, n_1 z_3 \in Z$ dan

$$aS = \left\{ \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ 0 & z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} z_1 n & z_2 n \\ 0 & z_3 n \end{bmatrix} \right\}$$

dengan $z_1 n, z_2 n, z_3 n \in Z$.

Terlihat bahwa

$(\forall a \in R)\ (\forall s \in S)\ aS \cap sR \neq \phi$.

Jadi S permutable kanan.

Untuk $a = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ 0 & z_3 \end{bmatrix} \in R$ dengan

$z_1, z_2, z_3 \in Z$ jika

$\begin{bmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & n_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ 0 & z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ untuk suatu $\begin{bmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & n_1 \end{bmatrix} \in S$ maka

$\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ 0 & z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_2 & 0 \\ 0 & n_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ untuk suatu $\begin{bmatrix} n_2 & 0 \\ 0 & n_2 \end{bmatrix} \in S$.

Jadi S reversible kanan.

Karena S permutable kanan dan reversible kanan maka RS^{-1} ada.

Dengan menggunakan homomorfisma $\varphi : R \to RS^{-1}$ yang didefinisikan dengan $\varphi(r) = rI^{-1}$ diperoleh:

1. Untuk $n.I \in S$ maka $(n.I)^{-1}$ adalah invers dari $\varphi(n.I)$.
2. Setiap elemen dalam RS^{-1} berbentuk $\varphi(r)\varphi(n.I)^{-1}$ dengan $r \in R$ dan $n.I \in S$. Jadi

$$RS^{-1} = \left\{ \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ 0 & z_3 \end{bmatrix} \left(n \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} \frac{z_1}{n} & \frac{z_2}{n} \\ 0 & \frac{z_3}{n} \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} Q & Q \\ 0 & Q \end{bmatrix}.$$

dengan $n \neq 0$ dan $z_1, z_2, z_3, n \in Z$

3. $Ker\varphi = \left\{ r = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ 0 & z_3 \end{bmatrix} \in R : \varphi\left(\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ 0 & z_3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

4. $Ker\varphi = \left\{ r = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ 0 & z_3 \end{bmatrix} \in R : \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ 0 & z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & n_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

untuk suatu $\begin{bmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & n_1 \end{bmatrix} \in S$

Jadi $RS^{-1} = \begin{bmatrix} Q & Q \\ 0 & Q \end{bmatrix}$, dan R termuat dalam RS^{-1}.

Dengan cara yang sama dapat dikonstruksikan ring hasil bagi kiri jika S permutable dan reversible kiri.

3. KESIMPULAN

Dari uraian diatas dapat disimpulkan bahwa

1. Syarat perlu dan cukup untuk eksistensi ring hasil bagi kanan (kiri) pada ring nonkomutatif R adalah S mempunyai sifat permutable dan reversible kanan (kiri).
2. Jika S mempunyai sifat permutable kanan (kiri) dan reversible kanan (kiri) maka dapat dikonstruksikan ring hasil bagi kanan RS^{-1} (ring hasil bagi kiri $S^{-1}R$).

4. DAFTAR PUSTAKA

[1] Adkins, A, W Weintraub, H,S. (1992) ,*Algebra An Approach via Module Theory*, Springer–Verlag, New York.

[2] Hungerford, W, T. (1984), *Algebra*, Graduate Texts in Mathematics, Springer–Verlag, New York.

[3] Lam, Y, T. (1998), *Lectures on Modules and Rings*, Graduate Texts in Mathematics, Springer–Verlag, New York.

[4] Ranicki, A. (2005), *Noncommutative Localization in Algebra and Topology*, ICMS Edinburgh.