PROBLEM ELIMINASI CUT PADA LOGIKA $LBB'I_{(n\sim k)}$

Bayu Surarso
Jurusan Matematika FMIPA UNDIP
Jl. Prof. H. Soedarto, SH Tembalang Semarang 50275

Abstract. In the present paper we study the problem of cut elimination in logics $LBB'I_{(n\sim k)}$, i.e. logics obtained from *LBB'I* by adding a rule called (n→k) rule. It is known that the cut elimination theorem for *LBB'I* and its standard extensions can be proved using some modifications of the method used by Gentzen in 1935 to prove the cut elimination theorem for Intuitionistic Logic. We extend the modifications to show that $LBB'I_{(n\sim k)}$ enjoy the cut elimination theorem when k=1. On the other side, we give a counter example sequent to show that the cut elimination theorem does not work for $LBB'I_{(n\sim k)}$ when k>1.

Keywords: Teorema eliminasi cut, LBB'I, aturan (n→k).

1. PENDAHULUAN

Pada tahun 1994 Komori memperkenalkan sistem Gentzen *LBB'I*, lihat [3]. Sequent Kalkulus $LBB'I$ tersebut diturunkan dari logika implikasional $BB'I$ yang merupakan pengembangan dari logika yang paling simpel yaitu logika *BI*. $LBB'I$ mengandung suatu operasi "○" yang biasanya disebut dengan "*guarded merge*" yang cukup kompleks, dimana dua formula digabungkan menjadi satu, tetapi harus tetap mempertahankan urutan dari kemunculan formula pada kedua formula tersebut. Kondisi lain dari operasi tersebut adalah pada $\Delta \circ \Gamma$, formula yang muncul paling kanan haruslah formula yang yang muncul paling kanan di Γ.

Meskipun formulasinya cukup kompleks, pada [1] penulis berhasil memberikan bukti bahwa teorema eliminasi cut berlaku pada *LBB'IK*, *LBB'IW* dan *LBB'IKW,* logika-logika tersebut berturut-turut adalah logika yang diperoleh dengan menambah aturan weakening, contraksi dan kedua aturan struktural tersebut sekaligus. Dapat dicek bahwa mereka masing-masing ekuivalen dengan logika implikasional *BB'IK*, *BB'IW* dan *BB'IKW.* Pada [2] Hori, Ono dan Schellinx memperkenalkan suatu aturan inferensi yang kemudian dinotasikan sebagai aturan (n→k) yang diformulasikan sebagai berikut:

$$\frac{\Gamma, \overbrace{A,\ldots,A}^{n}, \Delta \to B}{\Gamma, \underbrace{A,\ldots,A}_{k}, \Delta \to B}$$

Sebagai catatan, disini $k > 0$ dan $n \neq k$. Aturan $(n \sim k)$ adalah merupakan aturan w*eakening* ketika *n= 0* dan *k= 1* serta merupakan aturan k*ontraksi* ketika *n=1* dan *k=2*. Sedangkan ketika $n < k$ aturan tersebut merupakan suatu bentuk terbatas dari aturan w*eakening* dan ketika $n > k$ merupakan suatu bentuk terbatas dari aturan k*ontraksi*.

Tulisan ini merupakan kelanjutan dan pengembangan dari [1], dimana akan dipelajari masalah eliminasi cut pada logika-logika $LBB'I_{(n\sim k)}$ yang diperoleh dengan menambahkan aturan (n→k) pada logika *LBB'I.*

Pada tulisan ini dianggap pembaca sudah familiar dengan [1]. Notasi-notasi dan terminologi-terminologi dalam tulisan ini mengikuti yang disampaikan pada [1].

2. Teorema Eliminasi Cut untuk $LBB'I_{(n\sim 1)}$.

Berikut ini akan dibuktikan bahwa teorema eliminasi *cut* berlaku untuk $LBB'I_{(n\sim k)}$ bila *k=1*.

Teorema 2.1 *Teorema eliminasi cut berlaku untuk* $LBB'I_{(n\sim 1)}$.

Bukti. Untuk membuktikan teorema ini akan diperkenalkan suatu aturan yang disebut *multi-cut**.

Definisi 2.2 Aturan *multi-cut** adalah sebuah aturan inferensi sebagai berikut:

$$\frac{\Gamma \to A \quad \Delta, A^m, \Sigma \to B}{\Delta \circ \{m\Gamma\}, \Sigma \to B}(multi-cut*)$$

dimana Δ harus kosong ketika Γ kosong. Disini misalkan $\Gamma \equiv A_1, A_2, \ldots, A_k$ dan $\Delta \equiv \Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k$. Maka $\Delta \circ \{m\Gamma\}$ adalah suatu deretan formula dalam bentuk $\Delta_1, A_1^m, \Delta_2, A_2^m, \ldots, \Delta_k, A_k^m$. Formula A disebut formula *multi-cut** dari aturan *multi-cut** diatas.

Mudah dilihat bahwa aturan *cut* adalah bentuk khusus dari aturan *multi-cut**. Sebaliknya setiap aplikasi dari *multi-cut** dapat digantikan dengan *m* kali pengulangan dari aplikasi aturan *cut*. Oleh karena itu, sebuah bukti tanpa aturan *multi-cut** pada $LBB'I_{(n\sim 1)}$ merupakan bukti tanpa aturan *cut* pada $LBB'I_{(n\sim 1)}$ dan sebaliknya. Sehingga, dengan argumen yang sama dengan [1] untuk membuktikan Teorema 2.1 tersebut cukup dibuktikan lemma berikut :

Lemma 2.3 *Jika P adalah bukti (pada* $LBB'I_{(n\sim 1)}$ *) dari sebuah sequent S yang mengandung sebuah aturan multi-cut* yang muncul sebagai aturan inferensi paling bawah pada P, maka S dapat dibuktikan tanpa aplikasi aturan multi-cut** .

Lemma di atas dibuktikan dengan metode yang sama dengan metode pada [1] sebagai berikut: Misalkan P adalah bukti dari sequent S yang memuat *multi-cut** sebagai aturan inferensi paling bawah sebagai berikut:

$$\frac{\begin{matrix}\vdots & \vdots \\ S_1 & S_2\end{matrix}}{S}(multi-cut*)$$

Selanjutnya lemma 2.3 dibuktikan dengandobel induksi atas *grade* dan *rank* dari P yang didefinisikan sebagai berikut:

- *grade* dari P adalah banyaknya simbol logika dari formula *multi-cut**.
- *rank* dari P adalah banyaknya sequent yang muncul di atas sequent bawah dari aturan *multi-cut**.

Pembuktian dibagi menjadi 4 kasus sebagai berikut:

Kasus 1. S_1 atau S_2 adalah inisial sequent. Trivial.

Kasus 2. S_1 atau S_2 adalah sequent bawah dari aturan $(n\sim 1)$.

Sub-kasus 2.1 S_1 adalah sequent bawah dari aturan $(n\sim 1)$.

Bagian akhir dari bukti P akan berbentuk:

$$\frac{\dfrac{\Gamma_1, C^n, \Gamma_2 \to A}{\Gamma_1, C, \Gamma_2 \to A}(n\sim 1) \qquad \Delta, A^m, \Sigma \to B}{\Delta \circ \{m(\Gamma_1, C, \Gamma_2)\}, \Sigma \to B}(multi-cut*)$$

dimana Δ harus kosong jika Γ_1 dan Γ_2 kosong.

Bukti P tersebut dapat ditransformasikan ke suatu bukti dengan baian akhir sebagai berikut:

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\Gamma_1, C^n, \Gamma_2 \to A \quad \Delta, A^m, \Sigma \to B}{\Delta \circ \{m(\Gamma_1, C^n, \Gamma_2)\}, \Sigma \to B}(multi-cut*)}{m \text{ kali aplikasi dari aturan } (n\sim 1)}}{\Delta \circ \{m(\Gamma_1, C, \Gamma_2)\}, \Sigma \to B}$$

dimana *grade* dari bukti teresbut sama dengan *grade* P, sedangkan *rank*-nya lebih kecil dari pada *rank* P. Maka dengan hipotesis induksi, aturan *multi-cut**-nya dapat dieliminasi.

Catatan: Jika Γ_1 dan Γ_2 kosong, Bagian akhir dari bukti P akan berbentuk:

$$\dfrac{\dfrac{C^n \to A}{C \to A}(n\sim 1) \qquad A^m, \Sigma \to B}{(mC), \Sigma \to B}(multi-cut*)$$

Bukti P tersebut dapat ditransformasikan menjadi:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{C^n \to A \quad A^m, \Sigma \to B}{\{m(C^n)\}, \Sigma \to B}(multi-cut*)}{m \text{ kali aplikasi dari aturan } (n \sim 1)}}{(mC), \Sigma \to B}$$

Grade dari bukti tersebut sama dengan *grade* P, sedangkan *rank*-nya lebih kecil dari r*ank* P. Maka dengan hipotesis induksi, aturan *multi-cut**-nya dapat dieliminasi.

Sub-kasus 2.2 S_2 adalah sequent bawah dari aturan $(n \sim 1)$.

Bagian akhir dari bukti P akan berbentuk:

$$\dfrac{\Gamma \to A \qquad \dfrac{\Delta, A^n, \Sigma \to B}{\Delta, A, \Sigma \to B}(n\sim 1)}{\Delta \circ \Gamma, \Sigma \to B}(multi-cut*)$$

dimana Δ harus kosong, ketika Γ kosong. Misalkan jumlah dari formula yang terkandung di dalam Γ adalah k, maka bukti P tersebut dapat ditransformasikan menjadi:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \to A \quad \Delta, A^n, \Sigma \to B}{\Delta \circ \{n\Gamma\}, \Sigma \to B}(multi-cut*)}{k \text{ kali aplikasi dari aturan } (n \sim 1)}}{\Delta \circ \Gamma, \Sigma \to B}$$

grade-nya sama dengan *grade* P, sedangkan *rank*-nya lebih kecil dari pada *rank* P. Maka dengan hipotesis induksi, aturan *multi-cut** dapat dieliminasi.

Catatan: Misalkan Γ kosong maka bagian terakhir dari P akan berbentuk:

$$\dfrac{\to A \qquad \dfrac{A^n, \Sigma \to B}{A, \Sigma \to B}(n\sim 1)}{\Sigma \to B}(multi-cut*)$$

maka bukti P tersebut dapat ditransformasikan menjadi:

$$\dfrac{\to A \qquad A^n, \Sigma \to B}{\Sigma \to B}(multi-cut*)$$

grade dari bukti tersebut sama dengan *grade* P, sedangkan *rank*-nya lebih kecil dari pada *rank* P. Maka dengan hipotesis induksi, aturan *multi-cut**-nya dapat dieliminasi.

Kasus 3. S_1 dan S_2 adalah sequent bawah dari aturan *implikasi* sedemikian hingga prinsipal formula dari kedua aturan tersebut adalah formula *multi-cut**.

Dalam kasus ini S_1 adalah sequent bawah dari $(\to\supset)$ dan S_2 adalah sequent bawah dari $(\supset\to)$. Misalkan $A \equiv A_1 \supset A_2$,
$\Gamma \equiv C_1, C_2, \ldots, C_k$,
$\Sigma \equiv D_1, D_2, \ldots, D_{l'}, (A_1 \supset A_2)^{m_1}, \ldots, D_l$,
$\Delta \equiv \Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_{l'}, (A_1 \supset A_2)^{m_2}, \ldots, \Delta_l$.
Bagian akhir dari P adalah bentuk:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, A_1 \to A_2}{\Gamma \to A_1 \supset A_2}(\to\supset) \qquad \dfrac{\Sigma \to A_1 \quad \Delta, A_2, \Lambda \to B}{\Delta \circ A_1 \supset A_2 \circ \Sigma, \Lambda \to B}(\supset\to)}{\Pi_1 \circ \{(m_1+m_2+1)\Gamma\}, \Pi_2, \Lambda \to B}(multi-cut*)$$

Dimana $\Pi_1 \equiv \Delta_0, D_1, \Delta_1, D_2, \ldots, \Delta_{l'}, D_{l'}$ dan $\Pi_2 \equiv \Delta_{l'+1}, D_{l'+1}, \ldots, \Delta_l, D_l$. Dalam hal ini Σ tidak boleh kosong, sedangkan $\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_{l'}$ harus kosong jika Γ kosong.
Bukti P tersebut dapat ditransformasikan menjadi:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \to A_1 \supset A_2 \quad \Sigma \to A_1}{\Pi_3 \circ (m_1\Gamma), \Pi_4 \to A_1}(a) \qquad \Gamma, A_1 \to A_2}{\Pi_3 \circ \{(m_1+1)\Gamma\}, \Pi_4 \to A_2}(b) \qquad \dfrac{\Gamma \to A_1 \supset A_2 \quad \Delta, A_2, \Lambda \to B}{\Pi_5 \circ (m_2\Gamma), \Pi_6, A_2, \Lambda \to B}(c)}{\Pi_1 \circ \{(m_1+m_2+1)\Gamma\}, \Pi_2, \Lambda \to B}(d)$$

Dimana $\Pi_3 \equiv D_1, D_2, ..., D_{l'}$, $\Pi_4 \equiv D_{l'+1}, ..., D_l$, $\Pi_5 \equiv \Delta_0, \Delta_1, ..., \Delta_{l'}$, dan $\Pi_6 \equiv \Delta_{l'+1}, ..., \Delta_l$.

grade dari (a) dan (c) sama dengan *grade* P, sedangkan *rank*-nya lebih kecil dari *Rank* P. *Grade* dari (b) dan (d) lebih kecil dari *grade* P. Maka dengan hipotesis induksi, kita dapat mengeliminasi aturan *multi-cut** (a), (b), (c) dan (d).

Kasus 4. S_1 atau S_2 adalah sequent bawah dari aturan implikasi kecuali kasus 3.

Subkasus 4.1 S_1 adalah sequent bawah dari aturan implikasi kecuali kasus 3.
Jika S_1 adalah sequent bawah dari $(\supset\rightarrow)$.
Bagian akhir dari P adalah bentuk:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \rightarrow A \quad \Delta, A_2, \Lambda \rightarrow B}{\Delta \circ (A \supset A_2) \circ \Gamma, \Lambda \rightarrow B}(\supset\rightarrow) \qquad \Sigma_1, B^m, \Sigma_2 \rightarrow C}{\Sigma_1 \circ \{m(\Delta \circ (A \supset A_2) \circ \Gamma, \Lambda)\}, \Sigma_2 \rightarrow C}(multi-cut^*)$$

dimana Γ tidak boleh kosong. Bukti P tersebut dapat ditransformasikan menjadi:

$$\dfrac{\Gamma \rightarrow A \qquad \dfrac{\Delta, A_2, \Lambda \rightarrow B \quad \Sigma_1, B^m, \Sigma_2 \rightarrow C}{\Sigma_1 \circ \{m(\Delta, A_2, \Lambda)\}, \Sigma_2 \rightarrow C}(multi-cut^*)}{\Sigma_1 \circ \{m(\Delta \circ A \supset A_2 \circ \Gamma, \Lambda)\}, \Sigma_2 \rightarrow C}(\supset\rightarrow)$$

grade-nya sama dengan *grade* P, sedangkan *rank*-nya lebih kecil dari pada *rank* P. Sehingga dengan hipotesis induksi, aturan *multi-cut**-nya dapat dieliminasi.

Sub-kasus 4.2 S_2 adalah sequent bawah dari aturan implikasi kecuali kasus 3.
Pada tulisan ini akan diberikan bukti untuk bagian akhir dari P berbentuk:

$$\dfrac{\Gamma \rightarrow B \qquad \dfrac{\Delta_1, B^m, \Delta_2, A_1 \rightarrow A_2}{\Delta_1, B^m, \Delta_2 \rightarrow A_1 \supset A_2}(\rightarrow\supset)}{\Delta_1 \circ \{m\Gamma\}, \Delta_2 \rightarrow A_1 \supset A_2}(multi-cut^*)$$

dimana Δ_1 harus kosong jika Γ kosong.

Bukti P tersebut dapat ditransformasikan menjadi:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \rightarrow B \qquad \Delta_1, B^m, \Delta_2, A_1 \rightarrow A_2}{\Delta_1 \circ \{m\Gamma\}, \Delta_2, A_1 \rightarrow A_2}(multi-cut^*)}{\Delta_1 \circ \{m\Gamma\}, \Delta_2 \rightarrow A_1 \supset A_2}(\rightarrow\supset)$$

grade-nya sama dengan *grade* P, sedangkan *rank*-nya lebih kecil dari pada *rank* P. Sehingga dengan hipotesis induksi, aturan *multi-cut** dapat dieliminasi.

3. Masalah Eliminasi Cut pada $LBB'I_{(n\sim k)}$ untuk $k > 1$.

Sebelumnya telah dibuktikan bahwa teorema eliminasi cut berlaku untuk $LBB'I_{(n\sim 1)}$. Berikut, berbalikan dengan hasil tersebut akan dibuktikan teorema berikut ini:

Teorema 3.1 *Teorema Eliminasi Cut tidak berlaku untuk* $LBB'I_{(n\sim k)}$ *ketika k > 1*

Bukti. Diberikan sequent S(*p*,*q*) berikut ini, dimana *p* dan *q* adalah variabel proposisi :

S(*p*,*q*) = $p^n \supset p, q^n \supset p, (q, p)^{k-1}, q \rightarrow p$.

Dengan bantuan aturan *cut*, S(*p*,*q*) mudah dibuktikan sebagai berikut:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{q \rightarrow q \quad p \rightarrow p}{n\ kali\ aplikasi\ (\supset\rightarrow)}}{q^n \supset p, q^n \rightarrow p}}{q^n \supset p, q^k \rightarrow p}(n\sim k) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{p \rightarrow p \quad p \rightarrow p}{n\ kali\ aplikasi\ (\supset\rightarrow)}}{p^n \supset p, p^n \rightarrow p}}{p^n \supset p, p^k \rightarrow p}(n\sim k)}{p^n \supset p, q^n \supset p, (q, p)^{k-1}, q \rightarrow p}(cut)$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa S(*p*,*q*) tidak dapat dibuktikan dalam $LBB'I_{(n\sim k)}$ tanpa aturan cut, ketika *k* > 1.

Jika *n* = 0, maka S(*p*,*q*) berbentuk $p, q, \overbrace{p, q, p, ..., q, p}^{(k-1)}, q \rightarrow p$. Jelas bahwa tanpa aplikasi aturan cut, sequent tersebut tidak dapat dibuktikan.

Untuk *n* > 1, misal terdapat bukti P tanpa aturan cut dari S(*p*,*q*). Kita akan cek P dari bawah ke atas (secara bottom up). Perlu diperhatikan bahwa antecendent dari

S(p,q) memuat formula $q^n \supset p$, maka P harus memuat aplikasi dari $(\supset\to)$, dengan prinsipal formula $q^i \supset p$, dimana i = 1,2,…n. Aplikasi dari $(\supset\to)$ tersebut harus terbentuk dalam alur yang sama. Diberikan alur T, dan diberikan $S_i(p,q)$ sebagai sequent bawah dari $(\supset\to)$ dalam alur T yang prinsipal formulanya adalah $q^i \supset p$. Maka mudah dicek bahwa $S_n(p,q)$ harus memuat sebanyak k kali kemunculan formula q. (Disini kemunculan dari q sebagai subformula sejati dari sebuah formula tidak diperhatikan). Selanjutnya bisa dicek pula bahwa jika $S_i(p,q)$ memuat sebanyak n' kali kemunculan formula q, maka $S_{i-1}(p,q)$ harus memuat tepat sebanyak n'-1 kali kemunculan formula q. Dari sini diambil kesimpulan:

- untuk kasus $n < k$, $S_i(p,q)$ harus memuat k-(n-1) formula q. Maka $S_i(p,q)$ bukan sequent yang bisa dibuktikan. Kontradiksi dengan pernyataan bahwa P adalah bukti dari S(p,q).
- untuk kasus $n > k$, $S_{n-k}(p,q)$ tidak boleh memuat formula q. Maka $S_{n-k}(p,q)$ bukan sequent bawah dari $(\supset\to)$ yang prinsipal formulanya $q^{n-k} \supset p$. Kontradiksi dengan definisi dari $S_{n-k}(p,q)$.

Dengan adanya kedua kontradiksi yang di atas, teorema 3.1 terbukti.

Sebagai catatan, sequent S(p,q) terbukti dalam $LBB'I_{(n\sim k)}$ tanpa aturan cut ketika k = 1, seperti ditunjukkan dalam bukti berikut ini:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \to p \qquad p \to p}{n\ \mathit{kali\ aplikasi}\ (\supset\to)}}{}\qquad}{q \to q \qquad \dfrac{p^n \supset p, p^n \to p}{p^n \supset p, p \to p}(n \sim 1)}}{\dfrac{\dfrac{n\ \mathit{kali\ aplikasi}\ (\supset\to)}{p^n \supset p, q^n \supset p, q^n \to p}}{p^n \supset p, q^n \supset p, (q,p)^{1-1}, q \to p}(n \sim 1)}$$

4. PENUTUP

Seperti pada LBB'I, LBB'IK, LBB'W dan LBB'KW, teorema eliminasi cut berlaku juga pada $LBB'I_{(n\sim k)}$ ketika $n=1$. Tetapi hasil tersebut tidak dapat diperluas pada $LBB'I_{(n\sim k)}$ apabila $n>1$. Pada kenyataannya teorema eliminasi cut tidak berlaku pada $LBB'I_{(n\sim k)}$ ketika n> 1.

Pada banyak kasus berlakunya teorema eliminasi cut pada suatu sistem sequent berimplikasi pada berlakunya teorema interpolasi pada sistem tersebut. Dengan terbuktinya teorema eliminasi cut pada $LBB'I_{(n\sim 1)}$, selanjutnya menarik untuk dipelajari lebih lanjut masalah interpolasi pada sistem-sistem tersebut.

5. DAFTAR PUSTAKA

[1] Bayu Surarso (2004), *Gentzen-type systems for logic BB'I and its non-commutative standard extensions*, Jurnal Matematika, **10**(2), 95-99.

[2] Hori , R., Ono, H., Schellinx (1994), *Extending intuitionistic linier logic with knotted structural rules*, Notre Dame Journal of Formal Logic **35**, 219-242.

[3] Komori, Y (1994), *Syntactical Investigations in BI logic and BB'I logic*, Studia Logica **53**, 397-416.