PENENTUAN SUATU PENGONTROL DENGAN INDEKS PERFORMANSI BERUPA NORMA CAMPURAN H_2 DAN H_∞

Robertus Heri Soelistyo
Jurusan Matematika FMIPA UNDIP
Jl. Prof. Soedarto, Tembalang Semarang.

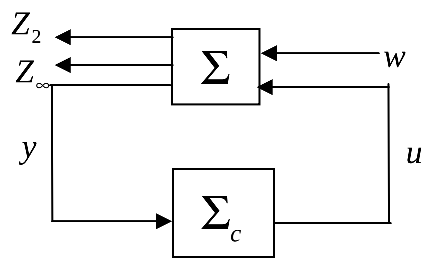
Abstract. This paper considers the mix-norm H_2/H_∞ standard problem. Specifically an LQG control design problem involving a constraint on H_∞ disturbance attenuation is addressed. It is shown that the H_2/H_∞ dynamic compensator gains are completely characterized via coupled Riccati/Lyapunov equation. The principle result involves a sufficient condition for characterizing full order guaranteeing closed loop stability, a constrained H_∞ disturbance attenuation and an optimized H_2 performance bound.

Keywords: mixed-norm H_2/H_∞, closed loop stability, H_∞ disturbance attenuation, an optimized H_2 performance bound.

1. PENDAHULUAN

Sistem kontrol berumpan balik (*feedback control sistem*) adalah sistem kontrol yang menjaga hubungan antara masukan dan keluaran dan membandingkannya dengan menggunakan selisihnya sebagai alat pengontrolan. Sedangkan sistem kotrol lup tertutup merupakan sistem kontrol yang sinyal keluarannya berpengaruh langsung pada aksi pengontrolan. Jadi sistem kontrol lup tertutup termasuk sistem kontrol berumpan balik. Dalam sistem kontrol lup tertutup, fungsi pengontrol sangatlah penting untuk memperkecil kesalahan dan membuat agar keluaran sistem mendekati harga yang diinginkan.

Salah satu cara untuk mencari pengontrol adalah dengan teori kontrol campuran H_2/H_∞. Latar belakang yang mendasari kontrol campuran H_2/H_∞, adalah adanya dua persoalan utama dalam desain sistem kontrol. Pertama optimisasi performansi yang diinginkan. Kedua, penting untuk disadari bahwa model selalu menyatakan suatu nominal sistem sementara sistem yang sebenarnya merupakan subyek ketidakpastian. Untuk keperluan itulah, kedua aspek ini harus diakomodasi dalam desain sistem kontrol yang sama yaitu sistem kontrol campuran H_2/H_∞, yang terdiri dari optimasi norma H_2 dari suatu fungsi alih lup tertutup, sementara norm norma H_∞ dari fungsi alih yang lain dipaksa untuk kurang dari suatu konstanta yang telah ditentukan. Situasi tersebut dapat digambarkan seperti Gambar 1.



Gambar 1. Desain kontrol campuran H_2/H_∞

Dimana Σ adalah sistem *time invariant* dan Σ_c merupakan pengontrolnya. Masalah optimal campuran H_2/H_∞ adalah mencari pengontrol Σ_c sedemikian se-

hingga untuk $\gamma > 0$
$\min\left\{\|T_{zw}\|_2^2 : \|T_{zw}\|_\infty < \gamma\right\}$

2. PERMASALAHAN

Misalkan diketahui plant *P(s)* order n yang *stabilizable* dan *detectable*, dengan model dinamik sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + D_1 w(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) + D_2 w(t). \end{aligned} \qquad (2.1)$$

Masalah teori kontrol LQG dengan kendala H_∞ adalah menentukan pengontrol order n

$\dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c y(t),$

$u(t) = C_c x_c(t),$

yang memenuhi syarat:

i. Sistem lup tertutup dari model (2.1) dinamik stabil asimtotik.

ii. fungsi alih *nonstrictly proper* $q_\infty \times d$

$H(s) = \widetilde{E}_\infty (sI_{\tilde{n}} - \widetilde{A})^{-1} \widetilde{D} + E_\infty$

dari $w(t)$ ke

$z_\infty(t) = E_{1\infty} x(t) + E_{2\infty} u(t) + E_\infty w(t)$

memenuhi kendala

$\|H(s)\|_\infty \le \gamma, \gamma > 0$.

iii. Performansifungsional

$$J(A_c, B_c, C_c) = \lim_{t \to \infty} E\left\{x^T(t) R_1 x(t) + 2x^T(t) R_{12} u(t) + u^T(t) R_2 u(t)\right\}$$

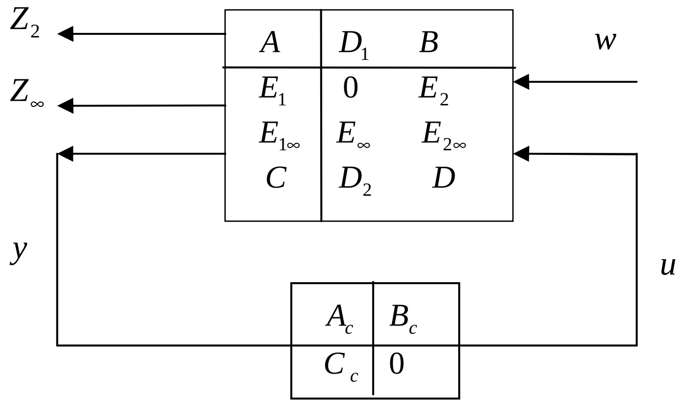
adalah minimal.

3. PENENTUAN SUATU PENGONTROL DENGAN INDEKS PERFORMANSI BERUPA NORMA CAMPURAN H_2 DAN H_∞

3.1. Teori Kontrol LQG dengan kendala Pelemahan Gangguan H_∞

Dalam sub bab ini dibahas teori kontrol LQG dengan kendala pelemahan gangguan H_∞. Tanpa criteria performansi H_2, masalah yang dibahas di sini adalah masalah kontrol baku H_∞ [3,4,5]. Keseluruhan tulisan ini membahas pengontrol berdimensi n dan lup tertutup berdimensi $\tilde{n} = 2n$.

Perhatikan blok diagram masalah baku campuran H_2 / H_∞ seperti Gambar 2 berikut.



Gambar 2. Lup Tertutup masalah baku norma campuran H_2 / H_∞

Misalkan diketahui plant $P(s)$ order n yang *stabilizable* dan *detectable* dengan model dinamik sebagai berikut.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + D_1 w(t), \qquad (3.1)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) + D_2 w(t), \qquad (3.2)$$

dimana:

w : input sebagai disturbance.
u : input dari pengontrol.
z_2 : output dari plant untuk kasus H_2.
z_∞ : output dari plant untuk kasus H_∞.
y : input pengontrol/output yang terukur.

Permasalahan teori kontrol LQG dengan kendala H_∞ adalah menentukan pengonrol order n:

$$\dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c y(t), \qquad (3.3)$$

$$u(t) = C_c x_c(t), \qquad (3.4)$$

$$K = \left[\begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline C_c & 0 \end{array}\right],$$

yang memenuhi syarat:

i. sistem lup tertutup dari model (2.1) dinamik stabil asimtotik. (3.5)

ii. fungsi alih *nonstrictly proper* $q_\infty \times d$

$H(s) = \widetilde{E}_\infty (sI_{\tilde{n}} - \widetilde{A})^{-1} \widetilde{D} + E_\infty$

dari $w(t)$ ke

$z_\infty(t) = E_{1\infty}x(t) + E_{2\infty}u(t) + E_\infty w(t)$
memenuhi kendala $\|H(s)\|_\infty \le \gamma, \gamma > 0$. (3.6)

iii. performansi fungsional

$$J(A_c, B_c, C_c) = \lim_{t\to\infty} E\{x^T(t)R_1x(t) + 2x^T(t)R_{12}u(t) + u^T(t)R_2u(t)\}$$

adalah minimal. (3.7)

Sebelum menemukan pengontrol yang memenuhi syarat (3.5)-(3.7), dibahas terlebih dulu beberapa hal sebagai berikut.
Substitusikan (3.4) ke (3.1) dan (3.2) dihasilkan persamaan:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}(t) &= \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{D}w(t)\\ y(t) &= \tilde{C}\tilde{x}(t) + D_2w(t)\end{aligned}. \quad (3.8)$$

Kemudian performansi fungsional (3.7) menjadi

$$J(A_c, B_c, C_c) = tr\tilde{Q}\tilde{R}, \quad (3.9)$$

dengan $\tilde{Q} \cong \lim_{t\to\infty} E\left[\tilde{x}(t)\tilde{x}^T(t)\right]$, (3.10)

memenuhi persamaan aljabar Lyapunov $\tilde{n}\times\tilde{n}$

$$\tilde{A}\tilde{Q} + \tilde{Q}\tilde{A} + \tilde{V} = 0. \quad (3.11)$$

Fungsi alih lup tertutp dari $w(t)$ ke $z_2(t) = E_1x(t) + E_2u(t)$ adalah:

$$\tilde{H}(s) = \frac{z_2(s)}{w(s)} = \tilde{E}(sI_{\tilde{n}} - \tilde{A})^{-1}\tilde{D}. \quad (3.12)$$

Menurut [8], pengontrol (3.3) dan (3.4) *admissible* (diperkenankan) di H_2 sehingga

$$J(A_c, B_c, C_c) = \left\|\tilde{H}(s)\right\|_2^2. \quad (3.13)$$

Dari uraian di atas ternyata performansi fungsional (3.7) identik dengan fungsi alih dari $w(t)$ ke $z_2(t)$, sehingga masalah kontrol LQG dengan kendala H_∞ identik dengan masalah campuran H_2/H_∞. Artinya, ketika meminumkan performansi (3.7) sama dengan meminimmkan fungsi alih (3.12)

Langkah pertama untuk menyelesaikan masalah kontrol LQG dengan kendala H_∞ adalah melemahkan gangguan H_∞.

Pelemahan gangguan H_∞ (H_∞ *disturbance attenuation*) ini dilakukan dengan mengganti persamaan aljabar Liapunov dengan persamaan aljabar Riccati, seperti dinyatakan dalam Lemma 1.

Lemma 1. Misalkan diberikan (A_c, B_c, C_c) dan asumsikan terdapat $\theta \in \Re^{n\times n}$ yang memenuhi $\theta \in \mathrm{N}^n$ dan

$$\tilde{A}\theta + \theta\tilde{A}^T + \gamma^{-2}(\tilde{D}E_\infty^T + \theta\tilde{E}_\infty^T)M^{-1}(\tilde{D}E_\infty^T + \theta\tilde{E}_\infty^T)^T + \tilde{V} = 0 \quad (3.14)$$

dengan N^n adalah matriks simetris $\tilde{n}\times\tilde{n}$ yang definit non negative.
Maka $(\tilde{A}, \tilde{D})$ *stabilizable* jika dan hanya jika $\tilde{A}$ stabil asimtotik.
Dalam kasus ini

$$\|H(s)\| \le \gamma \text{ dan } \tilde{Q} \le \theta. (3.15)\ (3.16)$$

Sehingga $J(A_c, B_c, C_c) = \Im(A_c, B_c, C_c, \theta)$, (3.17)

dimana $\Im(A_c, B_c, C_c, \theta) \cong tr\theta\tilde{R}$. (3.18)

Bukti.
($\Rightarrow$) Dari sistem lup tertutup (3.1)-(3.4) diketahui bahwa $(\tilde{A}, \tilde{D})$ *stabilizable* dan $(\tilde{A}, \tilde{C})$ *detectable*. Hal ini mengakibatkan $\tilde{A}$ stabil asimtotik.
($\Leftarrow$) Karena $\tilde{A}$ stabil asimtotik, maka $(\tilde{A}, \tilde{D}, \tilde{C}, D_2)$ stabil asimtotik. Sehingga $(\tilde{A}, \tilde{D})$ *stabilizable*. Untuk membuktikan (3.15), $\tilde{V}$ diganti dengan $\tilde{D}\tilde{D}^T$ dimana

$$\tilde{V} = \begin{bmatrix} V_1 & V_{12}B_c^T \\ B_cV_{12}^T & B_cV_2B_c^T \end{bmatrix}, \qquad \tilde{D} = \begin{bmatrix} D_1 \\ B_cD_2 \end{bmatrix},$$

$V_1 = D_1D_1^T$, $V_2 = D_2D_2^T$, $V_{12} = D_1D_2^T$, dan mengurangi serta menambahkan $j\omega I_n\theta$ ke (3.14) sehingga menjadi

$$\tilde{D}\tilde{D}^T = (-\tilde{A} + j\omega I_n)\theta + \theta(-\tilde{A} - j\omega I_n) - \gamma^{-2}(\tilde{D}E_\infty^T + \theta\tilde{E}_\infty^T)M^{-1}(\tilde{D}E_\infty^T + \theta\tilde{E}_\infty^T)^T. \quad (3.19)$$

Mengalikan kedua ruas (3.19) dengan $\tilde{E}_\infty(j\omega I_n - \tilde{A})^{-1}$ dari kiri dan $(j\omega I_n - \tilde{A})^{-1}\tilde{E}_\infty^T$ dari kanan diperoleh:

$$\tilde{E}_\infty(j\omega I_{\tilde{n}} - \tilde{A})^{-1}\tilde{D}\tilde{D}^T(j\omega I_{\tilde{n}} - \tilde{A})^{-T}\tilde{E}_\infty^T$$
$$= \tilde{E}_\infty\theta(j\omega I_{\tilde{n}} - \tilde{A})^{-T}\tilde{E}_\infty^T + \tilde{E}_\infty(j\omega I_{\tilde{n}} - \tilde{A})^{-1}\theta\tilde{E}_\infty^T$$
$$-\gamma^{-2}\tilde{E}_\infty(j\omega I_{\tilde{n}} - \tilde{A})^{-1}(\tilde{D}E_\infty^T + \theta\tilde{E}_\infty^T)M^{-1}(\tilde{D}E_\infty^T + \theta\tilde{E}_\infty^T)^T(j\omega I_{\tilde{n}} - \tilde{A})^{-T}\tilde{E}_\infty^T \quad (3.20)$$

Kemudian dengan menjumlahkan kedua ruas (3.20) dengan

$$\tilde{E}_\infty(j\omega I_{\tilde{n}} - \tilde{A})^{-1}\tilde{D}E_\infty^T + E_\infty\tilde{D}^T(j\omega I_{\tilde{n}} - \tilde{A})^{-T}\tilde{E}_\infty^T + E_\infty E_\infty^T$$

diperoleh

Untuk memenuhi syarat ketiga dari masalah kendali LQG dengan kendala H_∞, yaitu meminimalkan performansi fungsional $J(A_c, B_c, C_c)$, akan dibahas terlebih dahulu Lemma 2 berikut, yang menjamin eksistensi solusi tunggal yang definit non negative untuk (3.14) jika (3.15) terpenuhi.

Lemma 2. Misal diberikan (A_c, B_c, C_c), dan $\tilde{A}$ adalah stabil asimtotik dan asumsikan pelemahan gangguan (3.15) dipenuhi. Maka terdapat solusi tunggal θ yang definit non negative yang memenuhi (3.14)

$$\tilde{E}_\infty(j\omega I_{\tilde{n}} - \tilde{A})^{-1}\tilde{D}\tilde{D}^T(j\omega I_{\tilde{n}} - \tilde{A})^{-T}\tilde{E}_\infty^T + \tilde{E}_\infty(j\omega I_{\tilde{n}} - \tilde{A})^{-1}\tilde{D}E_\infty^T + E_\infty\tilde{D}^T(j\omega I_{\tilde{n}} - \tilde{A})^{-T}\tilde{E}_\infty^T + E_\infty E_\infty^T$$
$$= \tilde{E}_\infty(j\omega I_{\tilde{n}} - \tilde{A})^{-1}\left[\tilde{D}E_\infty^T + \theta\tilde{E}_\infty^T\right] + \left[\tilde{D}E_\infty^T + \theta\tilde{E}_\infty^T\right]^T(j\omega I_{\tilde{n}} - \tilde{A})^{-T}\tilde{E}_\infty^T + E_\infty E_\infty^T$$
$$-\gamma^{-2}\tilde{E}_\infty(j\omega I_{\tilde{n}} - \tilde{A})^{-1}(\tilde{D}E_\infty^T + \theta\tilde{E}_\infty^T)M^{-1}(\tilde{D}E_\infty^T + \theta\tilde{E}_\infty^T)^T(j\omega I_{\tilde{n}} - \tilde{A})^{-T}\tilde{E}_\infty^T \quad (3.21)$$

Sementara ruas kiri dan ruas kanan dari (3.21) berturut-turut sama dengan $H(j\omega)H^*(j\omega)$ dan

$$S + S^* - \gamma^{-2}SM^{-1}S^* + \gamma^2(I_{q\infty} - M),$$

dimana

$$S \cong \tilde{E}_\infty(j\omega I_{\tilde{n}} - \tilde{A})^{-1}\left[\tilde{D}E_\infty^T + \theta\tilde{E}_\infty^T\right]$$ dan

$$M = I_{q\infty} - \gamma^{-2}E_\infty E_\infty^T.$$

Sehingga (3.21) menjadi

$$H(j\omega)H^*(j\omega) = -\left[\left(\gamma M^{1/2} - \gamma^{-1}SM^{-1/2}\right)\left(\gamma M^{1/2} - \gamma^{-1}SM^{-1/2}\right)^*\right] + \gamma^2 I_{q\infty} \geq 0$$

.

Untuk membuktikan (3.16) kurangkan (3.11) ke (3.14), diperoleh:

$$\tilde{A}(\theta - \tilde{Q}) + (\theta - \tilde{Q})\tilde{A}^T$$
$$+\gamma^{-2}(\tilde{D}E_\infty^T + \theta\tilde{E}_\infty^T)M^{-1}(\tilde{D}E_\infty^T + \theta\tilde{E}_\infty^T)^T = 0$$

.

Karena $\tilde{A}$ stabil asimtotik, hal ini ekivalen dengan $\theta - \tilde{Q} \geq 0$, sehingga $J(A_c, B_c, C_c) \leq \Im(A_c, B_c, C_c, \theta)$.

Jadi terbukti $\Im(A_c, B_c, C_c, \theta) \cong tr\theta\tilde{R}$. ■

Lemma 1 menunjukkan bahwa pelemahan ganguan H_∞ dengan sendirinya menguat ketika solusi definit untuk (3.14) ada dan $\tilde{A}$ stabil asimtotik. Hal ini berarti bahwa syarat pertama dan kedua telah dipenuhi.

Sedemikian sehingga nilai eigen $\tilde{A} + \gamma^{-2}\tilde{D}E_\infty^T M^{-1}\tilde{E}_\infty + \gamma^{-2}\theta E_\infty^T M^{-1}\tilde{E}_\infty$ berada di bagian real sebelah kiri.

Bukti.

Bentuk (3.14) ekivalen dengan

$$\left(\tilde{A} + \gamma^{-2}\tilde{D}E_\infty^T M^{-1}\tilde{E}_\infty\right)\theta + \theta\left(\tilde{A} + \gamma^{-2}\tilde{D}E_\infty^T M^{-1}\tilde{E}_\infty\right)^T$$
$$+\gamma^{-2}\theta\tilde{E}_\infty^T M^{-1}\tilde{E}_\infty^T\theta + \tilde{D}N^{-1}\tilde{D}^T$$

.

Misalkan θ adalah solus yang definit nonnegative, menurut [2, Teorema 23-3] dengan $\mathrm{A}^T = \tilde{A} + \gamma^{-2}\tilde{D}E_\infty^T M^{-1}\tilde{E}_\infty$ dan $-\mathrm{KBB}^T = \gamma^{-2}\tilde{E}_\infty^T M^{-1}\tilde{E}_\infty\theta$. Akan dibuktikan

$$\mathrm{Re}\lambda(\mathrm{A} - \mathrm{BB^T K}) = \mathrm{Re}\lambda(\mathrm{A} - \mathrm{BB^T K})^{\mathrm{T}} < 0.$$

Misalkan terdapat θ_1 dan θ_2 dengan $\theta_1 \neq \theta_2$ sedemikian sehingga

$\tilde{A} + \gamma^{-2}\tilde{D}E_\infty^T M^{-1}\tilde{E}_\infty + \gamma^{-2}\tilde{E}_\infty^T M^{-1}\tilde{E}_\infty\theta_1$ dan

$\tilde{A} + \gamma^{-2}\tilde{D}E_\infty^T M^{-1}\tilde{E}_\infty + \gamma^{-2}\tilde{E}_\infty^T M^{-1}\tilde{E}_\infty\theta_2$

memiliki nilai eigen di sebelah kiri sumbu imajiner, sehingga menurut [2, Teorema 23-2] solusi dari

$$\dot{x}(t) = \tilde{A} + \gamma^{-2}\tilde{D}E_\infty^T M^{-1}\tilde{E}_\infty + \gamma^{-2}\tilde{E}_\infty^T M^{-1}\tilde{E}_\infty \theta_i , i = 1,2$$

dengan $x(0) = x_0$ mendekati nol untuk $t \to \infty$.

Menurut [2,Teorema 22-2 dan Lemma 21-1],

$$\int_0^t \left(u^T(\sigma)u(\sigma) + x^T(\sigma)\tilde{D}N^{-1}\tilde{D}^T x(\sigma) \right) d\sigma$$

$$= x^T(0)\theta_1 x(0) - x^T(t)\theta_1 x(t) + \int_0^t \left\| u(t) + B^T\theta_1 x(t) \right\|^2 dt$$

$$= x^T(0)\theta_2 x(0) - x^T(t)\theta_2 x(t) + \int_0^t \left\| u(t) + B^T\theta_1 x(t) \right\|^2 dt$$

Karena $\theta_1 \neq \theta_2$ dan keduanya simetris sehingga terdapat x_0 sedemikian sehingga $x_0^T\theta_1 x_0 \geq x_0^T\theta_2 x_0$.

Misalkan $x_0^T\theta_1 x_0 > x_0^T\theta_2 x_0$ dan $u(t) = -B^T\theta_2 x(t)$. Untuk $t \to \infty$, dihasilkan

$$x_0^T\theta_2 x_0 = x_0^T\theta_1 x_0 + \int_0^\infty \left\| B^T(\theta_1 - \theta_2)x(t) \right\|^2 dt .$$

Kontradiksi dengan $x_0^T\theta_1 x_0 \geq x_0^T\theta_2 x_0$. Sehingga pengandaian salah.

Jadi terdapat dengan tunggal θ yang definit non negatif yang memenuhi (3.14) sedemikian sehingga nilai eigen $\tilde{A} + \gamma^{-2}\tilde{D}E_\infty^T M^{-1}\tilde{E}_\infty + \gamma^{-2}\theta\tilde{E}_\infty^T M^{-1}\tilde{E}_\infty$ berada di bagian real sebelah kiri. ∎

Dari Lemma 1 dan Lemma 2, diketahui bahwa penggantian (3.11) dengan (3.14) membuktikan kestabilan lup tertutup, pengurangan/pelemahan gangguan H_∞, dan batas atas untuk criteria performansi H_2. Artinya, misalkan diberikan pengontrol (A_c, B_c, C_c) dimana terdapat solusi definit non negative untuk (3.15), criteria performansi $J(A_c, B_c, C_c)$ dari pengontrol dijamin tidak lebih buruk dari $J(A_c, B_c, C_c, \theta)$. Karena itu $J(A_c, B_c, C_c, \theta)$ dapat diinterpretasikan sebagai alat bantu untuk mengarahkan pada problem optimasi berikut ini, yaitu menentukan (A_c, B_c, C_c, θ) yang meminimalkan $J(A_c, B_c, C_c, \theta)$ dengan kendala (3.14) dimana $\theta \in \mathrm{N}^n$.

3.2. Syarat Cukup untuk Pelemahan Gangguan H_∞

Dalam subbab ini akan dinyatakan syarat cukup untuk karakterisasi pengontrol order penuh yang menjamin kestabilan lup tertutup, pelemahan gangguan H_∞ dan batas atas untuk criteria performansi H_2.

Untuk $Q, P, \hat{Q} \in \Re^{n\times n}$ dan $\alpha, \beta \geq 0$ didefinisikan notasi

$Q_a \cong QC^T + V_{12\infty}$,

$P_a \cong \left[B^T + \gamma^{-2}R_{02\infty}^T D_1^T + \gamma^{-2}R_{02\infty}^T(Q + \hat{Q}) \right] P + R_{12}^T$

, $S \cong \left(\alpha^2 I_n + \beta^2\gamma^{-2}\hat{Q}P \right)^{-1}$, dimana inversnya ada.

Remark 1. Misalkan (A_c, B_c, C_c, θ) memenuhi masalah minimasi $J(A_c, B_c, C_c, \theta)$, maka terdapat $Q, P, \hat{Q} \in \Re^{n\times n}$ yang memenuhi

$$0 = \left(A + \gamma^{-2}D_1R_{01\infty}\right)Q + Q\left(A + \gamma^{-2}D_1R_{01\infty}\right)^T + \gamma^{-2}QR_{1\infty}Q + V_{1\infty} - Q_aV_{2\infty}^{-1}Q_a^T , \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} 0 = {} & \Big(A - B\hat{R}_2^{-1}P_aS + \gamma^{-2}Q\left[R_{1\infty} - R_{12\infty}\hat{R}_2^{-1}P_aS\right] + \gamma^{-2}\left[D_1R_{01\infty} - D_1R_{02\infty}\hat{R}_2^{-1}P_aS\right]\Big)\hat{Q} \\ & + Q\Big(A - B\hat{R}_2^{-1}P_aS + \gamma^{-2}Q\left[R_{1\infty} - R_{12\infty}\hat{R}_2^{-1}P_aS\right] + \gamma^{-2}\left[D_1R_{01\infty} - D_1R_{02\infty}\hat{R}_2^{-1}P_aS\right]\Big)^T \\ & + \gamma^{-2}\hat{Q}\Big(R_{1\infty} - R_{12\infty}\hat{R}_2^{-1}P_aS - S^TP_a\hat{R}_2^{-1}R_{12\infty}^T + \beta^2S^TP_a^t\hat{R}_2^{-1}P_aS\Big)\hat{Q} + Q_aV_{2\infty}^{-1}Q_a^T \end{aligned} , \quad (3.23)$$

dengan

$$A_c = A - B\hat{R}_2^{-1}P_aS - Q_aV_2^{-1}C - Q_aV_{12\infty}^{-1}D\hat{R}_2^{-1}P_aS$$

$$+\gamma^{-2}\Big(QR_{1\infty}+D_1R_{01\infty}-D_1R_{02\infty}\hat{R}_2^{-1}P_aS$$
$$-QR_{12\infty}\hat{R}_2^{-1}P_aS-Q_aV_{2\infty}^{-1}D_2R_{01\infty}$$
$$+Q_aV_{2\infty}^{-1}D_2R_{02\infty}\hat{R}_2^{-1}P_aS\Big)$$
$$B_c=Q_aV_{2\infty}^{-1},\quad C_c=-\hat{R}_2^{-1}P_aS\ ,$$
$$\theta=\begin{bmatrix}Q+\hat{Q} & \hat{Q}\\ \hat{Q} & Q\end{bmatrix}$$

(3.24)-(3.27)

Lebih lanjut *auxiliary cost* diberikan dengan

$$J(A_c,B_c,C_c,\theta)=tr\Big[\big(Q+\hat{Q}\big)R_1-2R_{12}\hat{R}_2^{-1}P_aS\hat{Q}+S^TP_a^T\hat{R}_2^{-1}R_2\hat{R}_2^{-1}P_aS\hat{Q}\Big]\qquad(3.28)$$

Sebaliknya jika tedapat $Q,P,\hat{Q}\in\mathrm{N}^{\tilde{n}}$ yang memenuhi (3.22, 3.23), maka (A_c,B_c,C_c,θ) seperti (3.24-3.27) memenuhi (3.14) dengan *auxiliary cost* seperti (3.28).

Teorema 1. Misalkan terdapat $Q,P,\hat{Q}\in\mathrm{N}^{\tilde{n}}$ yang memenuhi (3.22,3.23) dengan (A_c,B_c,C_c,θ) seperti (3.24-3.27). Maka $(\tilde{A},\tilde{D})$ *stabilizable* jika dan hanya jika $\tilde{A}$ stabil asimtotik. Dalam kasus ini, fungsi alih lup tertutup $H(s)$ memenuhi kendala pelemahan gangguan $H_\infty\ \big(\|H(s)\|\le\gamma\big)$, dan performansi fungsional (3.7) memenuhi batas

$$J(A_c,B_c,C_c)=tr\Big[\big(Q+\hat{Q}\big)R_1-2R_{12}\hat{R}_2^{-1}P_aS\hat{Q}+S^TP_a^T\hat{R}_2^{-1}R_2\hat{R}_2^{-1}P_aS\hat{Q}\Big]$$

.

Bukti.

Bagian sebaliknya dari Remark 1 menunjukkan bahwa θ dari (3.32) memenuhi (3.14) dengan *auxiliary cost* seperti (3.32). Hal ini berarti menurut Lemma 1, kestabilan $(\tilde{A},\tilde{D})$ ekivalen dengan kestabilan asimtotik dari $\tilde{A}$. Sehingga pelemahan gangguan H_∞ terpenuhi dan performansi fungsional (3.7) memenuhi batas

$$J(A_c,B_c,C_c)=tr\Big[\big(Q+\hat{Q}\big)R_1-2R_{12}\hat{R}_2^{-1}P_aS\hat{Q}+S^TP_a^T\hat{R}_2^{-1}R_2\hat{R}_2^{-1}P_aS\hat{Q}\Big]$$

■

4. KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan, dapat disimpulkan bahwa, syarat cukup untuk mendesain pengontrol dengan kendala H_∞ pada suatu fungsi alih lup tertutup terdiri dari tiga persamaan aljabar Riccati yang dimodifikasi dalam variable $Q,P,\hat{Q}$.

5. DAFTAR PUSTAKA

[1] Bernstein D.S, Haddad. (1989), *LQG Control with an H_∞ Performance Bound: A Riccati Equation Approac*', IEEE Trans. Automat. Control (34), pp:293-305.

[2] Brockett, R.W. (1970), *Finite Dimensional Linear System*, John Willey and Sons, New York.

[3] Colaneri, P, Locatelli, A. (1997), *Control Theory and Design: An H_2 and H_∞ Viewpoint*, Academic Press.

[4] Doyle, J.C., Glover, K, Khargoneker, P.P. (1989), *State Space Solution to Standard H_2 and H_∞ Control Problem*, IEEE Trans. Automat. Control (34), pp:831-847.

[5] Doyle, J.C., Glover, K. (1988), *State Space Formulae for All Stabilizing Controller that Satisfy and H_∞ Norm Bound and Relation to Risk Sensitivity*, System Control Lett (11), pp: 161-171.

[6] Glover, K, Limebeer, Doyle, *A Charecterization of All Solution to The Four Block General Distance Problem*. Preprint.

[7] Wonham, W.M. (1979), Linear Multivariable Control: A Geometric Approach, Springer-Verlag, New York.

[8] Zames, G. (1981), *Feedback and Optimal Sensitivity: Model Reference Transformation, Multiplicative Seminorm and Approximate Inverses*, IEEE Trans. Automat. Control (26), pp:301-320.

[9] Zhou, K, Doyle. (1998), *Essentials of Robust Contro*l, Prentice Hall International.